

· 建筑工程 ·

文章编号:1006-7329(2002)01-0013-06

弹性抗滑桩内力计算的有限差分“ $m-k$ ”法^{*}

杨佑发

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘要:基于地基系数“ $m-k$ ”法的原理,提出了进行锚索抗滑桩全桩内力计算的有限差分法。同时,编写了该法的计算和图形处理程序。实例计算结果表明:只要等量差分取得足够小,虽然所耗机时稍长,但可获得高精度数值解,其精度高于采用传统手算法所得的精度,而且图形处理结果可优化抗滑桩的结构设计,且考虑了各种桩底支承条件。本方法基本原理同悬臂桩法,滑动面以下锚固桩的内力计算同普通桩完全相同,滑动面以上不同的只是此时的桩顶条件有所不同,必须考虑锚索拉力的作用。地基系数“ $m-k$ ”法适用于滑动面以上土层为土层或严重风化岩层,滑动面以下为岩层的情况。

关键词:地基系数“ $m-k$ ”法; 锚索抗滑桩; 有限差分法

中图分类号: TU735.8

文献标识码: A

锚索抗滑桩是指在普通抗滑桩桩顶施加强大的锚索拉力,从根本上改变原来普通抗滑桩不合理的悬臂式受力状态,变成上端铰支、下端近似弹性固结或简支梁式受力结构。锚索桩大大减小了桩身剪力和弯矩,从而减小了桩的截面和桩的埋深,可大幅度降低工程造价。地基系数法是计算抗滑桩或其它横向受荷桩内力的主要方法之一。由于对地基系数的假定不同,可分为“ k ”法、“ m ”法、“ c ”法、“ $m-k$ ”法、“双参数法”等,通常认为“ $m-k$ ”法适用于滑动面以上土层为土层或严重风化岩层,滑动面以下为岩层的情况。然而,目前人们在计算弹性抗滑桩的内力时,常需按文献[1]中介绍的查表法。从大量的实例计算来看,由于受表中系数截断误差的影响,常使计算结果存在一定的误差,出现与边界条件不相符的现象。为此,作者在采用该法时,利用有限差分数值计算手段,以进行弹性抗滑桩全桩的内力计算。通过编制相应的计算程序,既可避免繁琐的查表计算,提高计算速度,又可提高结果的计算精度。

1 基本原理

本方法基本原理同悬臂桩法,滑动面以下锚固桩的内力计算同普通桩完全相同。滑动面以上不同的只是此时的桩顶条件有所不同,必须考虑锚索拉力的作用。计算中必须先求桩顶锚索拉力,拉力的求法可以根据悬臂桩中所提供的控制桩顶位移法和经验法。然后以桩顶施加拉力和弯矩条件(本文中假设桩顶弯矩及剪力的大小醒知),再次以基于地基系数法的有限差分法求解桩身各内力值。设抗滑桩全长为 H 。其中,滑动面以上,受荷载桩长为 h_1 ;滑动面以下,锚固段桩长为 h_2 。设滑坡推力为梯形分布,地面 O 和滑动面处 A 的分布荷载集度为 q_0 和 q_a 。桩的截面尺寸为 $a \times b$ (长 \times 宽),桩的抗弯刚度为 EI (E 为弹性模量, I 为惯性矩), b_0 为桩的计算宽度。滑动面以上的地层地基

* 收稿日期:2001-12-10

作者简介:杨佑发(1968-),男,湖南醴陵人,副教授,博士,主要从事工程结构分析方面的教学与研究。

系数的比例系数为 m_1 , 滑动面以下地基系数为 K_1 。

抗滑桩受荷段的挠曲微分方程为:

$$EI \frac{d^4 x}{dy^4} + b_0 m_1 y x = b q_0 + b(q_A - q_0) \frac{y}{h_1} \quad (1)$$

采用等量分段 h , 由桩顶往下至滑动面将桩长离散化, 如图 1a、1b 所示, 则任意节点 n 处的控制差分方程为:

$$\frac{EI}{h^4} (x_{n-2} - 4x_{n-1} + 6x_n - 4x_{n+1} + x_{n+2}) + b_0 m_1 n h x_n = b q_0 + b(q_A - q_0) \frac{nh}{h_1} \quad (2)$$

即
$$x_{n-2} - 4x_{n-1} + \left(6 + \frac{b_0 m_1 n h^4}{EI}\right) x_n - 4x_{n+1} + x_{n+2} = \frac{bh^4}{EI h_1} [q_0 h_1 + (q_A - q_0) \cdot nh] \quad (3)$$

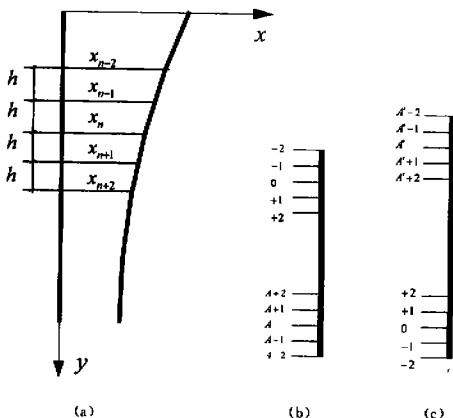


图 1 桩身挠曲和差分示意图; (b), (c) 桩在滑动面处的差分点

对于锚索抗滑桩, 可假设桩顶弯矩及剪力为特定值。

弯矩:
$$EI \frac{d^2 y}{dy^2} = M_t$$

亦即
$$\frac{EI}{h^2} (x_{-1} + x_1 - 2x_0) = M_t$$

于是
$$x_{-1} = 2x_0 - x_1 + \frac{M_t h^2}{EI} \quad (4)$$

剪力:
$$EI \frac{d^3 x}{dy^3} = P_t$$

亦即
$$\frac{EI}{2h^3} (-x_{-2} + 2x_{-1} - 2x_1 + x_2) = P_t$$

于是
$$x_{-2} = 2x_{-1} - 2x_1 + x_2 - \frac{2P_t h^3}{EI} \quad (5)$$

对锚普通抗滑桩, 则只要令 $M_t = P_t = 0$ 即可。

令 (3) 式中 $n=0$, 并将 (4) 式和 (5) 式代入, 可得

$$x_0 = 2x_{-1} - x_2 + \frac{b q_0 h^4}{2EI} + (M_t + P_t h) \frac{h^2}{EI} \quad (6)$$

$$\text{令 } a_{-1}=2, b_{-1}=1, c_{-1}=\frac{M_0 h^2}{EI}, a_0=2, b_0=1, c_0=\frac{b_0 h^4}{2EI}+(M_0+P_0 h)\frac{h^2}{EI}$$

则(4)式和(6)式可表达为:

$$x_{-1}=a_{-1}x_0-b_{-1}x_1+c_{-1}, x_0=a_0x_1-b_0x_2+c_0$$

类似地,可得

$$x_n=a_n x_{n+1}-b_n x_{n+2}+c_n \quad (7)$$

$$x_{n-1}=a_{n-1} x_n-b_{n-1} x_{n+1}+c_{n-1} \quad (8)$$

$$x_{n-2}=a_{n-2} x_{n-1}-b_{n-2} x_n+c_{n-2} \quad (9)$$

将(8)式和(9)式代入(3)式,经整理可得:

$$\begin{aligned} & \left[a_{n-2} a_{n-1} - b_{n-2} - 4a_{n-1} + 6 + \frac{b_0 m_1 n h^5}{EI} \right] x_n + (-a_{n-2} b_{n-1} + 4b_{n-1} - 4)x_{n+1} + x_{n+2} \\ & = \frac{b h^4}{EI h_1} [q_0 h_1 + (q_A - q_0) n h] - a_{n-2} c_{n-1} - c_{n-2} + 4c_{n-1} \end{aligned} \quad (10)$$

在(10)式中,令:

$$d_n = a_{n-2} a_{n-1} - b_{n-2} - 4a_{n-1} + 6 + \frac{b_0 m_1 n h^5}{EI}; \quad u_n = (a_{n-2} b_{n-1} - 4b_{n-1} + 4)/d_n;$$

$$b_n = 1/d_n; \quad c_n = \left\{ \frac{b h^4}{EI h_1} [q_0 h_1 + (q_A - q_0) n h] - a_{n-2} c_{n-1} - c_{n-2} + 4c_{n-1} \right\} / d_n$$

则(10)式仍可写成(7)式的形式。

在滑动面以下,其挠曲微分方程为:

$$\frac{d^4 x}{dy^4} + 4\beta^2 x = 0 \quad (\beta_1 = \sqrt[4]{K_1 b_0 / 4EI}) \quad (11)$$

从桩底由下至上也采用等量分段 h (见图 1(c)), 则可得该段任意节点 n 处的控制差分方程为:

$$\frac{1}{h^4} (x_{n-2} - 4x_{n-1} + 6x_n - 4x_{n+1} + x_{n+2}) + 4\beta_1^2 x_n = 0$$

$$\text{即:} \quad x_{n-2} - 4x_{n-1} + (6 + 4h^4 \beta_1^2) x_n - 4x_{n+1} + x_{n+2} = 0 \quad (12)$$

桩底边界条件有 3 种情况:

(1) 桩底为自由端

则其边界条件为桩底处弯矩和剪力等于 0。

$$\text{弯矩:} \quad EI \frac{d^2 x}{dy^2} = 0$$

$$\text{亦即} \quad \frac{EI}{h^2} (x_{-1} + x_1 - 2x_0) = 0$$

$$\text{于是} \quad x_{-1} = 2x_0 - x_1 \quad (13)$$

$$\text{剪力:} \quad EI \frac{d^3 x}{dy^3} = 0$$

$$\text{亦即} \quad \frac{EI}{2h^3} (-x_{-2} + 2x_{-1} - 2x_1 + x_2) = 0$$

$$\text{于是} \quad x_{-2} = 2x_{-1} - 2x_1 + x_2 \quad (14)$$

令(12)式中 $n=0$, 并将(13)式和(14)式代入, 经整理可得:

$$(2 + 4h^4 \beta_1^2) x_0 - 4x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\text{令} \quad a_{-1} = 2, b_{-1} = 1, c_0 = 2 + 4h^4 \beta_1^2; \quad a_0 = 4/c_0; \quad b_0 = 2/c_0$$

$$\text{则} \quad x_{-1} = a_{-1} x_0 - b_{-1} x_1; \quad x_0 = a_0 x_1 - b_0 x_2$$

(2) 桩底为铰支端

则其边界条件为桩底处弯矩和位移等于 0。

$$a_{-1} = 2; b_{-1} = 1; a_0 = 0; b_0 = 0$$

则

$$x_{-1} = a_{-1}x_0 - b_{-1}x_1; x_0 = a_0x_1 - b_0x_2$$

(3) 桩底为固定端

则其边界条件为桩底处位移和转角等于0。

$$a_{-1} = 0; b_{-1} = -1; a_0 = 0; b_0 = 0$$

则

$$x_{-1} = a_{-1}x_0 - b_{-1}x_1; x_0 = a_0x_1 - b_0x_2$$

类似地,可得

$$x_n = a_n x_{n+1} - b_n x_{n+2} \quad (15)$$

$$x_{n-1} = a_{n-1} x_n - b_{n-1} x_{n+1} \quad (16)$$

$$x_{n-2} = a_{n-2} x_{n-1} - b_{n-2} x_n \quad (17)$$

将(16)式和(17)式代入(12)式,整理可得:

$$[a_{n-2}a_{n-1} - b_{n-2} - 4a_{n-1} + (6 + 4h^3\beta^3)]x_n + (-a_{n-2}b_{n-1} + 4b_{n-1} - 4)x_{n+1} + x_{n+2} = 0 \quad (18)$$

(18)式中,令

$$c_n = [a_{n-2}a_{n-1} - b_{n-2} - 4a_{n-1} + (6 + 4h^3\beta^3)]$$

$$a_n = (a_{n-2}b_{n-1} - 6b_{n-1} + 4)/c_n; b_n = 1/c_n$$

则(18)式仍可表达成(15)式的形式。

根据桩在滑动面处位移、转角、弯矩和剪力的连续条件,参照图2(b),2(c)及(7)~(9)式和(15)~(17)式,可得到下面的线性方程组:

$$\begin{cases} x_A = x_{A'} & \text{(位移连续条件)} \\ x_{A+1} - x_{A-1} = -(x_{A'+1} - x_{A'-1}) & \text{(转角连续条件)} \\ -x_{A-2} + 2x_{A-1} - 2x_{A+1} + x_{A+2} = x_{A'-2} - 2x_{A'-1} + 2x_{A'+1} - x_{A'+2} & \text{(剪力连续条件)} \\ x_{A-1} + x_{A+1} - 2x_A = x_{A'-1} + x_{A'+1} - 2x_{A'} & \text{(弯矩连续条件)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = a_A x_{A+1} - b_A x_{A+2} + c_A \\ x_{A-1} = a_{A-1} x_A - b_{A-1} x_{A+1} + c_{A-1} \\ x_{A-2} = a_{A-2} x_{A-1} - b_{A-2} x_A + c_{A-2} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} x_{A'} = a_{A'} x_{A'+1} - b_{A'} x_{A'+2} \\ x_{A'-1} = a_{A'-1} x_{A'} - b_{A'-1} x_{A'+1} \\ x_{A'-2} = a_{A'-2} x_{A'-1} - b_{A'-2} x_{A'} \end{cases} \quad (20)$$

求解此方程组,可求得滑动面处及附近节点(上下段各5个)处的位移,从而采用迭代法可求得桩身各节点处的位移及内力。

2 计算实例

采用所述方法对某滑坡的锚索抗滑桩进行了设计与计算。

因为该滑动面以上地层为土层或严重风化岩层,滑动面以下为岩层,故采用考虑土体弹性抗力的“ $m-k$ ”法进行设计计算。假设滑动面以上的地层地基系数比例系数为 $m_1 = 5000 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-4}$, 滑动面以下地基系数为 $K_1 = 60000 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ 。实际采用的桩长为 17 m 。滑坡推力分布图形假定为三角形。因桩前后滑体有高差,同时认为桩前滑体可能滑走,从而忽略受力段的桩前土体抗力。

滑坡推力 $E_s = 686 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$, 其分布图形假定为三角形, 剩余抗滑力 $E'_s = 0$, 桩的中心间距为 3.5 m , 桩径 1.2 m , 桩长 16 m , 受荷段 $h_1 = 12 \text{ m}$, 锚固段 $h_2 = 5 \text{ m}$ 。

桩截面面积:

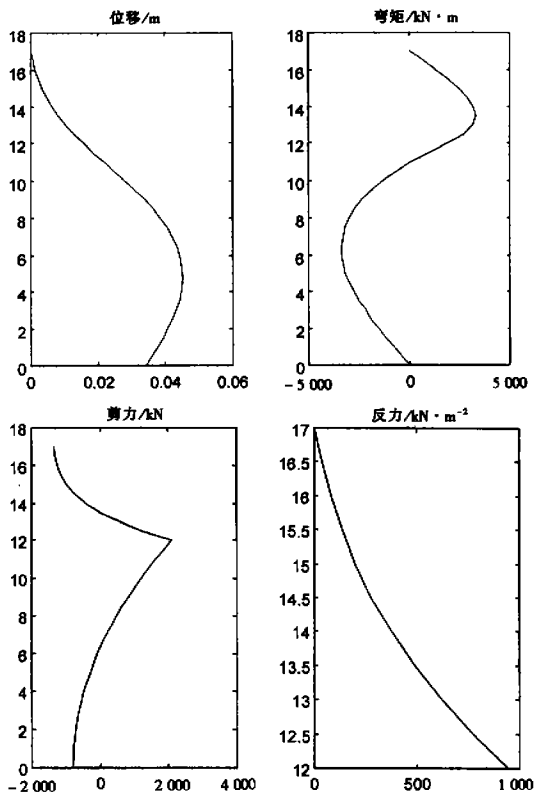


图 2 抗滑桩各点的水平位移、弯矩、剪力、反力

$$A = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 3.14 \times \frac{1.2^2}{4} = 1.1304 \text{ m}^2$$

桩截面惯性矩:

$$I_0 = W_0 \frac{d}{2} = 0.189 \times \frac{1.2}{2} = 0.1134 \text{ m}^3$$

桩截面模量:

$$W_0 = \frac{\pi d}{32} [d^2 + 2(a_E - 1)\rho_E \cdot d_0^2] = 0.189 \text{ m}^3$$

抗滑桩采用 C₃₀ 混凝土, 其弹性模量为 $E_b = 2.55 \times 10^7$ kPa, 桩的抗弯刚度 $EI = 0.85E_b I_0 = 0.85 \times 2.55 \times 10^7 \times 0.1134 = 2.46 \times 10^6$ kN·m², 桩的计算宽度 $b_0 = 0.9(d+1) = 0.9 \times (1.2+1) = 1.98$ m。

桩顶采用两根锚索, 单根锚索轴向拉力设计值为 586 kN, 则每根锚索选用 6Φ²⁵ 钢丝绳。

由于锚固端为中风化泥岩, 桩底按固定端处理, 今采用等量分段长度 $h = 0.05$ m, 全桩内力计

算结果见图2。

3 结论

基于地基系数“ $m-k$ ”法的分析原理,针对弹性抗滑桩全桩内力计算的有限差分法便于程序编制。传统的弹性地基系数法在计算抗滑桩或其它横向受核桩内力时,由于需查表手算,不但计算过程繁琐,容易出错,而且受查用表格中各系数误差的影响,常使计算结果出现不同程度的误差。有限差分法不但可以提高抗滑桩内力计算速度,而且可提高地基系数法本身的计算精度。为便于计算结果的分析,程序可对计算结果进行自动图形处理,有助于抗滑桩的结构设计。

参考文献:

- [1] 铁道部第二勘察设计院. 抗滑桩设计与计算[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1983.
- [2] 戴自航, 彭振斌. 土体滑坡治理的合理设计与计算[J]. 中南工业大学学报, 2000, 31(2): 98-101.
- [3] 龚晓南. 土工计算机分析[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.

Finite Difference “ $m-k$ ” Method of Calculation of Anchor—stabilizing Piles

YANG You-fa

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Based on the principle of the foundation coefficient “ $m-k$ ” method, the finite difference method is presented to analyze the internal forces of a whole prestressed anchor-stabilizing pile. The calculation and figure treatments are programmed. An example shows that the high precise solution can be obtained if the segments are small enough, though more computing time may be consumed. Obviously, the calculation precision is better than that of traditional method. The results of figure treatments by the program can optimize the construction design of stabilizing piles. Three kinds of support condition are taken into account. The foundation coefficient “ $m-k$ ” method applies to the situation that above the slide—surface is soil layer or efflorescence layer, while below the slide—surface is terrane.

Key words: foundation coefficient “ $m-k$ ” method; anchor—stabilizing pile; finite difference method