文章编号:1006-7329(2003)02-0048-06

锚杆动测问题的解析解*

许 明, 张永兴, 李 燕
(重庆大学 土木工程学院,重庆 400045)

摘要:岩石声波测试技术应用于锚固工程的无损检测中,其基本原理是采用动力瞬态激振使锚杆引起弹性振动,通过测定锚杆的振动响应来估计和推断锚杆中的缺陷。应用弹性动力学的基本理论,建立了锚杆动测问题的物理模型,在力学上表现为给定扰动源信息及边界条件、初始条件,建立描述介质运动的支配方程,归结为双曲型或双曲-扩散型方程的初值或初值-边值问题,由此求解其动力响应,推导了一维非齐次波动方程在有界域情况下的解析解。

关键词:锚杆; 波动方程; 解析解; 应力波; 动力测试
中图分类号:TU459⁺.3　　　　**文献标识码**:A

为进一步满足各类岩土锚固工程监测的需要,工程界迫切需要一种既简便经济又迅速可靠的锚杆质量检测方法,为施工质量控制和工程可靠性检测提供可靠的手段。现场拉拔实验不仅要花费很长的时间和耗资相当大,而且检测面小。因此,开展和应用动力测试的方法来弥补静载荷试验法是十分必要和具有重要意义的[1,2,3]。

应力波检测方法在力学上表现为给定扰动源信息及边界条件、初始条件,建立描述介质运动的支配方程,并由此求解其动力响应,实质上是处理可变场的问题,通常归结为双曲型或双曲-扩散型方程的初值或初值-边值问题。本文应用弹性动力学的基本理论,建立了锚杆动测问题的物理模型,推导了锚杆一维波动方程在有界域情况下的解析解。

1 波动方程

在动力测试时,有一定的假设条件或应用前提,这里需要对锚杆做如下基本假设:

1) 锚杆的受激振动在弹性限度内。锚杆在振动时,杆体内各质点的位移、应力和应变之间的关系都服从弹性虎克定律。低应变动力测试中由于激振力很小,并且是可以控制的,故锚杆的振动完全满足这一假设条件。

2) 锚杆材料均匀或分段均匀且各向同性。作为砂浆材料,在拉伸与压缩特性方面存在明显差异,而且也不是均匀的,但在微米级的弹性振动情况下,仍然可以近似满足这一假设要求,或这种差异可忽略不计。

3) 锚杆受激振动时,其截面保持为平面。这就是说,锚杆受激振动时,同一截面上所有质点位移的方向和大小都是一致的,也不存在相位的差别或振动的超前或滞后现象。这对于锚杆直径 d 和杆长 l 之比 $d/l \leqslant 1/10$ 的情况是满足这一假设要求的。

按照假设条件,有

$$\sigma = E\varepsilon, \ \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

* 收稿日期:2003-01-17
基金项目:国家计委高新技术([1999]2062)
作者简介:许 明(1975-),男,湖北省洪湖市人,博士,主要从事岩土工程及无损检测的研究。

杆中纵波控制方程为[4]

$$\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{R}{\rho A}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

式中：不计体力，σ 为应力；ε 为轴向应变；u 是质点纵向位移；E 是锚杆材料的弹性模量；ρ 是质量密度；R 为岩土介质与锚固体界面间单位长度上的粘结摩阻力；A 是杆的横截面面积；t 是从冲击时刻算起的时间；x 是锚杆截面的位置。这里，假设锚杆参数 E、ρ、A 不随 x 而变化。摩阻力 R 与段元侧岩土介质的性质、密实程度、段元侧面的粗糙度及锚杆施工方法等因素有关。

2　非齐次方程的定解问题

对于包含扰动源作用的非齐次的波动方程的初值－边值问题求解，原则上可按有界杆的强迫振动予以考虑，即根据分离变量法所得级数解的结构，按相应的特征函数系设级数解，然后，再确定系数得形式解。在确定系数的过程中，对于二阶线性非齐次常微分方程的初值问题，可由齐次化原理将外力项的贡献转化为初始速度的贡献，按齐次问题来求解。大多数实际问题的情况是纵向外力施加在杆端，因而对于杆的纵向强迫振动往往感兴趣的是齐次的振动方程和非齐次的边界条件。对于这一类问题的处理方法很多，如设法将端部外力的作用利用 δ－函数来表示，然后按非齐次的方程求解；也可以将非齐次的边界条件经过未知函数的代换转化为对于新的未知函数的齐次边界条件的问题。

对于杆长为 l 的锚杆，纵振动的运动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{R}{\rho A}\qquad (0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t) \tag{3}$$

初始条件

$$u(x,0)=0 \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

边界条件

$$u(0,t)=U(t) \tag{5}$$

$$u(l,t)=0$$

式中：$U(t)$为锚头的位移，可通过加速度传感器获得。由于低应变法的输入能量小，而基岩一般较硬，故可将锚固体末端作为固定端处理。

3　非齐次边界条件的齐次化

适当地作一代换，将边界条件(5)转化为齐次的。为此令

$$u=V+W \tag{6}$$

适当地选择 V，使新未知函数 W 的边界条件转化为齐次的，即使

$$W(0,t)=W(l,t)=0 \tag{7}$$

由(5)、(6)可知，要使(7)成立，只要选取 V，使其满足

$$V(0,t)=U(t),\ V(l,t)=0 \tag{8}$$

即可。为了使以后的计算简便，可选取 V 的一次式，即

$$V(x,t)=-\frac{U(t)}{l}x+U(t) \tag{9}$$

为好。函数(9)可满足(8)式的要求。

总之，只要作代换

$$u=W-\frac{U(t)}{l}x+U(t) \tag{10}$$

之后,就能使新未知函数 W 满足齐次边界条件下的混合问题

$$\begin{cases} W_{tt} = \dfrac{E}{\rho} W_{xx} - \left(\dfrac{R}{\rho A} + U_{tt} - \dfrac{x}{l} U_{tt}\right),\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \\ W(x,0) = \left(\dfrac{x}{l} - 1\right) U(0),\ W_t(x,0) = \left(\dfrac{x}{l} - 1\right) U'(0) \\ W(0,t) = W(l,t) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

4 非齐次方程的解析解

设两端固定的杆的强迫振动定解问题(11)有如下形式的解

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{12}$$

其中 $T_n(t)$是待定函数,$\sin \frac{n\pi x}{l}$, $n=1,2,\cdots$是相应的齐次方程在齐次边界条件下的特征函数系。

令

$$f(x,t) = -\left(\frac{R}{\rho A} + U_{tt} - \frac{x}{l} U_{tt}\right) \tag{13}$$

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{l} - 1\right) U(0) \tag{14}$$

$$\psi(x) = \left(\frac{x}{l} - 1\right) U'(0) \tag{15}$$

为确定函数 $T_n(t)$,先将方程(11)中的非齐次项(13)展为特征函数系的级数

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{16}$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x$$

再将(12)、(16)代入(11),得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{E}{\rho} T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

比较系数,有

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{E}{\rho} T_n(t) = f_n(t),\ n = 1,2,\cdots \tag{17}$$

再将解(12)代入初始条件,得

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

所以

$$T_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x = \varphi_n$$

$$T_n'(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x = \psi_n$$

于是,得到 T_n 的常微分方程初值问题

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \dfrac{E}{\rho} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n,\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases} \tag{18}$$

对于二阶线性常系数非齐次常微分方程的初值问题,可由拉氏变换或常数变易法求出其解

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi\sqrt{E/\rho}}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau+\varphi_n\cos\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}+\frac{l}{n\pi\sqrt{E/\rho}}\psi_n\sin\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l},\ (n=1,2,\cdots)\tag{19}$$

式中

$$\begin{aligned}f_n(t)&=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{R}{\rho A}+U_{tt}-\frac{x}{l}U_{tt}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{\rho Al}\int_0^l R\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x-\frac{2U_{tt}}{n\pi}\end{aligned}$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{x}{l}-1\right)U(0)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=-\frac{2U(0)}{n\pi}$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{x}{l}-1\right)U'(0)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=-\frac{2U'(0)}{n\pi}$$

故

$$\begin{aligned}T_n(t)&=-\frac{2l}{n^2\pi^2EA}\left(1-\cos\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)\int_0^l R\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{2}{n\pi}\left[U(t)-\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}}{l}\int_0^t U(\tau)\sin\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\right]\\&=-\frac{2l}{n^2\pi^2EA}\left(1-\cos\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)\int_0^l R\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{2}{n\pi}U(t)+\frac{2\sqrt{E/\rho}}{l}\int_0^t U(\tau)\sin\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

将 $T_n(t)$ 代入级数(12),即可求得 $W(x,t)$,从而求得 $u(x,t)$。

$$\begin{aligned}W(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\begin{aligned}&-\frac{2l}{n^2\pi^2EA}\left(1-\cos\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)\int_0^l R\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&-\frac{2}{n\pi}U(t)+\frac{2\sqrt{E/\rho}}{l}\int_0^t U(\tau)\sin\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(x,t)&=W(x,t)-\frac{U(t)}{l}x+U(t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\begin{aligned}&-\frac{2l}{n^2\pi^2EA}\left(1-\cos\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)\int_0^l R\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&-\frac{2}{n\pi}U(t)+\frac{2\sqrt{E/\rho}}{l}\int_0^t U(\tau)\sin\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{U(t)}{l}x+U(t)\end{aligned}$$

将杆长进行等间隔划分,在每一个杆长单元内摩阻力 R 近似为常数,同时应力波在该单元传播时对应时间间隔内的边界位移 U 也近似为常数,这样可对 $u(x,t)$ 式进行化简。

设杆长共划分为 j 个单元,对于任一杆单元 i,$\frac{(i-1)l}{j}\leqslant x\leqslant\frac{il}{j}$,$\frac{(i-1)l}{\sqrt{E/\rho}j}\leqslant t\leqslant\frac{il}{\sqrt{E/\rho}j}$,$j\geqslant i\geqslant 1$,此时有

$$u_i(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\begin{aligned}&-\frac{2lR_i}{n^2\pi^2EA}\left(1-\cos\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)\frac{l}{n\pi}(1-\cos n\pi)\\&-\frac{2}{n\pi}U_i+\frac{2\sqrt{E/\rho}U_i}{l}\frac{l}{n\pi\sqrt{E/\rho}}\left(1-\cos\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)\end{aligned}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{U_i}{l}x+U_i$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} -\dfrac{2l^2R_i}{n^3\pi^3EA}\left(1-\cos\dfrac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)(1-\cos n\pi) \\ -\dfrac{2}{n\pi}U_i+\dfrac{2U_i}{n\pi}\left(1-\cos\dfrac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)\end{bmatrix}\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{U_i}{l}x+U_i$$

由于 $\cos n\pi=\begin{cases}-1, n=2k-1\\ 1, n=2k\end{cases}, k=1,2,\cdots$,于是

$$u_i(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2l^2R_i}{n^3\pi^3EA}\left(1-\cos\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)(1-\cos n\pi)\right.$$
$$\left.-\frac{2U_i}{n\pi}\cos\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{U_i}{l}x+U_i$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{4l^2R_i}{(2k-1)^3\pi^3EA}+\frac{2}{(2k-1)\pi}\left(\frac{2l^2R_i}{(2k-1)^2\pi^2EA}\right.\right.$$
$$\left.\left.-U_i\right)\cos\frac{(2k-1)\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right]\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}$$
$$-\frac{U_i}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cos\frac{2k\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\sin\frac{2k\pi x}{l}-\frac{U_i}{l}x+U_i$$

将横截面位移对时间变量和空间变量求导,可得速度、加速度和应变、应力。

$$u_t'(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{n\pi\sqrt{E\rho}A}\sin\dfrac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\displaystyle\int_0^l R\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ -\dfrac{2}{n\pi}U'(t)+\dfrac{2n\pi E}{l^2\rho}\displaystyle\int_0^t U(\tau)\cos\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\end{bmatrix}\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{U'(t)}{l}x+U'(t)$$

$$u_t''(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{\rho Al}\cos\dfrac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\displaystyle\int_0^l R\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x-\frac{2}{n\pi}U''(t) \\ +\dfrac{2n\pi E}{l^2\rho}\left(U(t)-\dfrac{n\pi\sqrt{E/\rho}}{l}\displaystyle\int_0^t U(\tau)\sin\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\right)\end{bmatrix}\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{U''(t)}{l}x+U''(t)$$

$$u_x'(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}-\dfrac{2l}{n^2\pi^2EA}\left(1-\cos\dfrac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)\displaystyle\int_0^l R\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ -\dfrac{2}{n\pi}U(t)+\dfrac{2\sqrt{E/\rho}}{l}\displaystyle\int_0^t U(\tau)\sin\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\end{bmatrix}\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\frac{U(t)}{l}$$

$$\sigma(x,t)=E\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}-\dfrac{2l}{n^2\pi^2EA}\left(1-\cos\dfrac{n\pi\sqrt{E/\rho}t}{l}\right)\displaystyle\int_0^l R\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ -\dfrac{2}{n\pi}U(t)+\dfrac{2\sqrt{E/\rho}}{l}\displaystyle\int_0^t U(\tau)\sin\frac{n\pi\sqrt{E/\rho}(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\end{bmatrix}\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-E\frac{U(t)}{l}$$

其中,$\sqrt{E/\rho}=c_0$ 为波的传播速度。

5 结语

锚杆动测问题的位移场可由岩土介质与锚固体界面间的粘结摩阻力函数和边界位移表示,进而可求出锚杆任意截面的速度、加速度和应变、应力。粘结摩阻力函数一般情况下未知,该问题是一个欠定问题。根据应力波理论分析,可对摩阻力沿杆长的变化赋于一系列初始值,然后求解波动方程,计算出锚头的位移响应曲线,并与实测的位移边界进行对比。若两者不一致,则修改初始值,重新进行计算。重复这一迭代过程,直到计算出的位移曲线与实测的差满足一定的误差要求为止[5,6,7]。

波动方程中一般未考虑在实际问题中弥散的影响,也未考虑由于物体几何形状的不规则或介

质的不均匀对波传播的影响，对于应用上更为实际的弹性波导中的瞬态波，欲求其精确解将是极为困难的，因此发展各种数值方法和近似方法是处理这类动力学问题的重要途径。

参考文献：

[1] Zhang Yongxing, Xu Ming. Numerical Analysis of Quality Inspection of Anchorage System[J]. Journal of Chongqing University (English Edition), 2002, 1(1): 42 - 46.

[2] 许明，张永兴，阴可．砂浆锚杆的锚固及失效机理研究[J]．重庆建筑大学学报，2001，23(6)：10 - 15.

[3] 许明，张永兴．锚杆极限承载力的人工神经网络预测[J]．岩石力学与工程学报，2002，21(5)：755 - 758.

[4] 许明，张永兴．锚固系统的质量管理与检测技术研究[J]．重庆建筑大学学报，2002，24(1)：29 - 33.

[5] 马宏伟，吴斌．弹性动力学及其数值方法[M]．北京：中国建材工业出版社，2000.

[6] 雷林源．桩基动力学[M]．北京：冶金工业出版社，2000.

[7] 王靖涛．桩基应力波检测理论及工程应用[M]．北京：地震出版社，1999.

Analytic Solution of Anchor Bolts with Dynamic Detection

XU Ming, ZHANG Yong - xing, LI Yan

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P.R.China)

Abstract: Sonoprobe method has been applied in non - destructive inspection of anchorage project. Its fundament is that to use dynamic transient excitation for inducing anchor bar's elastic vibration. The flaws in the bar can be estimated or deduced by determining transient response of anchor bar. Based on the theory of elasto - dynamics, in this paper, a theoretical model of acoustic detection of anchor bar has been built up. On the mechanics field, this method means that if information of disturbance resource, boundary conditions and initial conditions has been given, the dominant equation describing medium motion would be established. That is, it leads to the problem of initial value or initial boundary value of hyperbolic type or hyperbolic - diffusibility type equation. Thereby the dynamic response could be solved. As an example, analytic solution of heterogeneous wave equation is deduced in case of bounded region.

Keywords: anchor bolt; wave equation; analytic solution; stress wave; dynamic detection