文章编号:1006-7329(2003)02-0063-04

E^n 中质点组的最小转动惯量轴*

杨世国

(安徽教育学院数学系,合肥,230061)

摘 要:利用线性代数理论与方法研究了 n 维欧氏空间 E^n 中质点组的最小转动惯量轴问题,给出这一问题的一般解法,获得这一结果:质点组 $\sigma=\{A_i(m_i);i=1,2,\cdots,t\}$ 的最小转动惯量轴是过质点组 σ 的重心且平行于相随矩阵 C 的最大特征值所对应的特征向量的直线。

关键词:质点;重心;矩阵;特征值

中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A

设 $A_i(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni})(i=1,2,3,\cdots,t)$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的任意 t 个点,将每点 A_i 赋予质量 $m_i>0$。在 E^n 中,质点组 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 关于直线 l 的转动惯量为 $S_l=\sum\limits_{i=1}^{t}m_id_i^2$($d_i$ 为点 A_i 到直线 l 的距离),使得转动惯量 S_l 取最小值的直线 l_0 称为质点组 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 的最小转动惯量轴。

对 E^n 中任意给定的有限质点组,怎样求出它的最小转动惯量轴问题,不管在理论研究方面还是在实际应用方面都具有很大的意义,本文探讨并解决了这一问题。

质点组 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 的重心为

$$G(g_1,g_2,\cdots,g_n),$$

其中

$$g_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^{t}m_jx_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{t}m_j}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1}$$

记

$$C_{sk}=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{t}m_j}\sum_{j=1}^{t}m_j(x_{sj}-g_s)(x_{kj}-g_k)\qquad(s,k=1,2,\cdots,n)\tag{2}$$

$$C=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1n}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\C_{n1}&C_{n2}&\cdots&C_{nn}\end{bmatrix}\tag{3}$$

由于 $C_{sk}=C_{ks}$,所以 C 是 $n\times n$ 阶实对称矩阵,我们称矩阵 C 为质点 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 的相随矩阵。

如果我们在矩阵 C 的诸分量 C_{sk} 中令 $m_1=m_2=\cdots=m_t=1$,所得矩阵为 C_0,我们将矩阵 C_0 称为 E^n 中点组 $A_i(i=1,2,\cdots,t)$ 的相随矩阵。

在上述记号之下,我们来讨论质点组 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 的最小转动惯量轴问题。

---

* 收稿日期:2003-01-15
基金项目:安徽省教育厅科研资金资助项目(2003kj067)
作者简介:杨世国(1952-),男,安徽明光人,教授,主要从事度量几何研究。

设 E^n 中直线 l 的点向式方程为

$$\frac{x_1 - b_1}{l_1} = \frac{x_2 - b_2}{l_2} = \cdots = \frac{x_n - b_n}{l_n} \tag{4}$$

其中 $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是待定点的坐标, $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 为待定直线 l 的方向余弦,因此

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = 1 \tag{5}$$

下面确定 b_i 与 $l_i(i=1,2,\cdots,n)$,使质点组 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 关于直线 l 的转动惯量最小。

由于向量 $\overrightarrow{BA}_j = \{x_{1j} - b_1, x_{2j} - b_2, \cdots, x_{nj} - b_n\}$ 在直线(4)上的射影为

$$\sum_{i=1}^{n} l_i(x_{ij} - b_i),$$

于是点 A_j 到直线(4)的距离平方为

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - b_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} l_i(x_{ij} - b_i)\right]^2,$$

所以质点组 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 关于直线(4)的转动惯量为

$$S = \sum_{j=1}^{t} m_j\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - b_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} l_i(x_{ij} - b_i)\right]^2\right\} \tag{5}$$

根据极值法则[1],(5)式对 b_k 对导,得

$$\sum_{j=1}^{t} m_j\left\{(x_{kj} - b_k) - l_k\sum_{i=1}^{n} l_i(x_{ij} - b_i)\right\} = 0$$

上式整理得

$$\left(\sum_{j=1}^{t} m_j x_{kj} - b_k\sum_{j=1}^{t} m_j\right) - l_k\sum_{j=1}^{t} m_j\sum_{j=1}^{n} l_i(x_{ij} - b_i) = 0$$

或

$$\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{t} m_j}\sum_{j=1}^{t} m_j x_{kj} - b_k\right) - l_k \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{t} m_j} \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{n} m_j l_i(x_{ij} - b_i) = 0$$

由(1)中记号上式即为

$$\frac{g_k - b_k}{l_k} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{t} m_j} \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{n} m_j l_i(x_{ij} - b_i) \tag{6}$$

由于上式右端与 k 无关,所以

$$\frac{g_1 - b_1}{l_1} = \frac{g_2 - b_2}{l_2} = \cdots = \frac{g_n - b_n}{l_n} \tag{7}$$

由此可见,质点组 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 的重心应在所求直线上。因此,直线(4)的待定点 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 不妨就取质点组 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 的重心 $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$,这时(5)式变为

$$S = \sum_{j=1}^{t} m_j\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - g_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} l_i(x_{ij} - g_i)\right]^2\right\} \tag{8}$$

由(2)、(3)中的记号有

$$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{n} m_j(x_{ij} - g_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t} m_j(x_{ij} - g_i)^2$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{t} m_j\right)\sum_{i=1}^{n} C_{ii}$$

$$\sum_{j=1}^{t} m_j\left[\sum_{i=1}^{n} l_i(x_{ij} - g_i)\right]^2 = \sum_{j=1}^{t} m_j\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_i l_k(x_{ij} - g_i)(x_{ki} - g_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_i l_k\sum_{j=1}^{t} m_j(x_{ij} - g_i)(x_{kj} - g_k)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{t} m_i\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_i k_k C_{ik}$$

于是(8)式化为

$$S = \left(\sum_{j=1}^{t} m_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} C_{ii} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_i l_k C_{ik}\right) \tag{9}$$

我们再来确定诸 $l_k(k=1,2,\cdots,n)$ 使 S 取极小值，为此，我们考虑：$\sum_{i=1}^{n} C_{ii} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_i l_k C_{ik}$ 在条件

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = 1$$

下的极值，现作

$$f = \sum_{i=1}^{n} C_{ii} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_i l_k C_{ik} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} l_i^2 - 1\right) \tag{10}$$

其中 λ 是待定因子[1]。

(10)式对 l_s 求导得

$$-2\sum_{i=1}^{n} l_i C_{is} + 2\lambda l_s = 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} l_i C_{is} = \lambda l_s \qquad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

亦即

$$\begin{cases} l_1 C_{11} + l_2 C_{21} + \cdots + l_n C_{n1} = \lambda l_1 \\ l_1 C_{12} + l_2 C_{22} + \cdots + l_n C_{n2} = \lambda l_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ l_1 C_{1n} + l_2 C_{2n} + \cdots + l_n C_{nn} = \lambda l_n \end{cases} \tag{12}$$

由于 $C_{sk} = C_{ks}$，所以(12)式可写成

$$\begin{cases} (C_{11} - \lambda) l_1 + C_{12} l_2 + \cdots + C_{1n} l_n = 0 \\ C_{21} l_1 + (C_{22} - \lambda) l_2 + \cdots + C_{2n} l_n = 0 \\ \quad\cdots\cdots \\ C_{n1} l_1 + C_{n2} l_2 + \cdots + (C_{nn} - \lambda) l_n = 0 \end{cases} \tag{13}$$

齐次线性方程组(13)有非零解的充分必要条件是[2,3]

$$|C - \lambda E| = 0 \tag{14}$$

(其中 E 是 n 阶单位矩阵)。由此可见，待定因子 λ 是矩阵 C 的特征值，用 l_s 乘(11)式两端，并对 S 求和得

$$\lambda = \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} l_i l_s C_{is} \tag{15}$$

由(9)、(15)两式可知，较大的 λ 对应着较小的 S；反之亦然。这说明我们所需要的 λ(待定因子)就是方程(14)的最大根，即矩阵 C 的最大特征值。由此我们得知求诸 l_k 的方法：

先求方程(14)的最大根 λ。然后将 $\lambda = \lambda_0$ 代入方程组(13)，结合条件 $\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = 1$，便可求出所需要的 $l_1, l_2, \cdots, l_n$。实际上，所需的 $(l_1, l_2, \cdots, l_n)^T$ 就是矩阵 C 的属于其最大特征值 λ_0 的单位特征向量。综上分析，我们有如下结论：

定理　在 E^n 中过质点组 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 的重心，方向向量为相随矩阵 C 的最大特征值所对应的单位特征向量的直线 l_0 就是质点组 $A_i(m_i)(i=1,2,\cdots,t)$ 的最小转动惯量轴。

文献[4～6]中研究了 E^n 中有限点集的不等式问题，应用上面定理我们立刻可得有限点集下面一个结果。

推论　在 E^n 中，设直线 l_0 过点组 $A_i(i=1,2,\cdots,t)$ 的相随矩阵 C_0 的最大特征值所对应的单位特征向量，则点 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 到直线 l_0 的距离平方和最小。

参考文献:

[1] Tutschke,W.实分析基地[M].北京:人民教育出版社,1979,180-189.
[2] 张远达.线性代数原理[M].上海:上海教育出版社.1980,179-231.
[3] 王松桂,贾忠贞.矩阵论中的不等式[M].合肥:安徽教育出版社,1994,72-80.
[4] 杨路,张景中.关于有限点集的一类几何不等式[J].中国科技大学学报,1981,11(2):1-8.
[5] 杨路,张景中.关于有限点集的一类几何不等式[J].数学学报,1980,23(5):740-749.
[6] 杨世国.共超球质点系的一个结果[J].数学杂志,1994,14(1):97-100.

Axes of Minimal Moment of Inertia for Particle Set in E^n

YANG Shi - guo
(Anhui Educational Institute, Hefei 230061, P.R. China)

Abstract: In this paper, the theory and method of linear algebra are used to study the problem about axes of minimal moment of inertia for particle set in the n - dimensional Eucldean space En. The general method is given to solve this problem and the result obtained is that the axes of minimal moment of inertia for particle set $\sigma = \{A_i(m_i);\ i = 1,2,\cdots,t\}$ is the straight line passing the center of gravity of σ and paralleling the eigen-vector related maximum eigenvalue of the matrix C.

Keywords: particle; barycenter; matrix; eigenvalue

(上接第32页)

The FPPM Solutions for the Problems of Large Deflection of Axisymmetric Circular Plate

CHEN Shan - lin, LI Qi - zhong
(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P.R. China)

Abstract: In this paper, the Free - Parameters Perturbation Method (FPPM) is applied to analyze the problems of large deflection of circular plates under uniformly distributed pressure and concentrating load at the center respectively. The stiffness characteristics, stress distribution regularity and deformation curves of circular plates with boundaries rigidly clamped or clamped with slip along outer edges are obtained. Meanwhile, the results and computing processes are compared with those of Chien's solutions.

Keywords: Free - Parameters Perturbation Method (FPPM); axisymmetric circular plate; problems of large deflection