第25卷 第6期 重庆建筑大学学报 Vol.25 No.6
2003年12月 Journal of Chongqing Jianzhu University Dec.2003

文章编号:1006-7329(2003)06-0046-06

悬臂梁大挠度问题的摄动解*

何晓婷, 陈山林
(重庆大学 土木工程学院,重庆 400045)

摘要:利用拟线性分析方法,研究了悬臂梁的大挠度问题,并与该问题的双参数摄动算法进行了比较。分析表明:将拟线性方法用于研究悬臂梁的大挠度问题,计算较为简便,同时又具有良好的精度。

关键词:悬臂梁; 大挠度; 拟线性
中图分类号:O343.5;O39;TB12 **文献标识码**:A

Perturbation Solution to Large Deflection Problem of Cantilever Beams

HE Xiao-ting, CHEN Shan-lin
(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P.R.China)

Abstract: The large deflection problem of cantilever beams is studied by means of pseudolinear approach and the result is compared with that by algorithm of nonlinear governing equation. It indicates that large deflection problem solved by pseudolinear analysis can lead to simple and precise results.

Keywords: cantilever beam; large deflection; pseudolinear

钱伟长教授在文献[1]中,采用双参数摄动研究了图1所示的悬臂梁大挠度问题,用于处理宁波甬江大桥施工弧长计算及桥面坡度等应用问题。梁的大挠度问题历史上称为欧拉-伯努利问题[2],一般情形下,基本方程是一非线性的微分积分方程,求解困难。历史上作者们的研究,大致可分为对于个别简单情形的闭合分析解和基于有限元方法的数值解。文献[2]通过一阶导数代换,用数值积分或拟线性分析方法处理了梁大挠度的各类问题,结果精度能满足一般的设计要求。本文采用文献[2]的方法,对悬臂梁问题进行了简化处理,然后用摄动法求解,并与文献[1]的结果进行了比较。

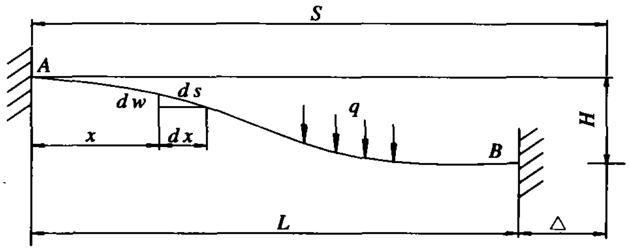

图1 悬臂梁坐标、荷载及几何参数

1 基本方程和边界条件

图1所示悬臂梁大挠度问题的基本方程为[1]:

$$\frac{d^2w/dx^2}{[1+(dw/dx)^2]^{3/2}}=\frac{M(x)}{EI} \tag{1}$$

* 收稿日期:2003-09-05
作者简介:何晓婷(1971-),女,四川邛崃人,讲师,博士生,主要从事结构工程研究。

式中：w——挠度；EI——抗弯刚度；$M(x)$——弯矩。

$M(x)$若用 $x=0$ 处的弯矩 M_0 和剪力 Q_0 来表达，则有：

$$M(x)=M_0-Q_0x+\int_0^x q(x-\xi)[1+(\mathrm{d}w/\mathrm{d}\xi)^2]^{1/2}\mathrm{d}\xi \tag{2}$$

式中：M_0 和 Q_0 待定。

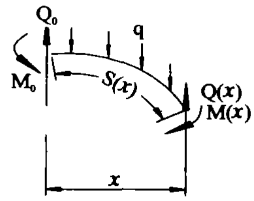

图 2　梁左端力与力矩的关系

边界条件为

$$\begin{cases}x=0: w=0, \mathrm{d}w/\mathrm{d}x=0\\ x=L: w=H, \mathrm{d}w/\mathrm{d}x=0\end{cases} \tag{3}$$

式中：H——A、B 两端高差，已知，并且假定(2)式中 q 为常数。

上述问题是一非线性微分积分方程。(1)式有两个积分常数，(2)式中有两个待定的初参数，由(3)式给出四个边界条件，问题是可以确定的。

2　弯矩 $M(x)$的简化

在弯矩 $M(x)$的表达式中，第三项可以进行如下计算：

$$\int_0^x q(x-\xi)[1+(\mathrm{d}w/\mathrm{d}\xi)^2]^{1/2}\mathrm{d}\xi=q\int_0^x(x-\xi)\mathrm{d}S=q(x-\xi)S\mid_0^x+\int_0^x qS\mathrm{d}\xi=q\int_0^x S\mathrm{d}\xi$$

因此，(2)式可表示为：

$$M(x)=M_0-Q_0x+q\int_0^x S(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4}$$

若引入：

$$\Delta(x)=S(x)-x \tag{5}$$

并代入(4)式中，则有：

$$M(x)=M_0-Q_0x+\frac{q}{2}x^2+q\int_0^x\Delta(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{6}$$

上式中最后的积分项是由于弧长影响而对弯矩产生的修正项。

文献[2]对 $\Delta(x)$提出了各种简化方案，如：

$$\Delta(x)=\mathrm{const};\ \Delta(x)=\Delta\frac{x}{L};\ \Delta(x)=\Delta\sqrt{\frac{x}{L}};\ \Delta(x)=\Delta\sin\frac{\pi x}{2L} \tag{7}$$

并且指出：各种近似带来的误差，约在 3% 左右。

式中，Δ 的定义如下：$\Delta=\Delta(L)$，$S=S(L)$，因此：

$$\Delta=S-L \tag{8}$$

式中：S——梁的曲线弧长；L——水平跨度。由于 S 未知，因此本问题中的 Δ 未知。

考虑到本问题中梁变形的特点，可作近似假定：当 $x=L/2$ 时，$S(L/2)=S/2$，因此，

$$\Delta(L/2)=S/2-L/2=\Delta/2 \tag{9}$$

同时，$\Delta(0)=0$，$\Delta(L)=\Delta$，若用多项式逼近 $\Delta=\Delta(x)$，即取

$$\Delta(x)=\frac{\Delta}{L}x(1+ax+bx^2+cx^3+\cdots) \tag{10}$$

$\Delta(0)=0$ 已满足，由(9)式和 $\Delta(L)=\Delta$，可得

$$\begin{cases}aL+bL^2+cL^3+\cdots=0\\ a\dfrac{L}{2}+b\dfrac{L^2}{4}+c\dfrac{L^3}{8}+\cdots=0\end{cases} \tag{11}$$

满足上式只有 $a=b=c=\cdots=0$。因此，如果 $S(L/2)=S/2$，用多项式逼近 $\Delta=\Delta(x)$，恰当的结果：

$$\Delta(x)=\Delta\frac{x}{L} \tag{12}$$

与(7)式的第二种近似一致。

将(12)式代入(6)式,可得

$$M(x)=M_0-Q_0x+\frac{q}{2}\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)x^2 \tag{13}$$

若用(13)式近似代替(2)式,我们就将(1)式简化为一非线性微分方程,问题得到第一步简化。

应当指出,文献[2]在计算分布力 q 引起的弯矩 $M(x)$ 时,用了公式 $qSx/2$,对应的(2)式应为:

$$M(x)=M_0-Q_0x+\frac{q}{2}Sx=M_0-Q_0x+\frac{q}{2}[\Delta(x)+x]x \tag{14}$$

与(6)相比,可知并不一致。文献[2]的处理,事实上是假定了 $S(x)$ 弧段的重心位于 $x/2$ 处,这并不总是成立的。因此,作为一般公式,文献[2]的计算欠妥。不过,当用近似公式(12)式时,(6)式与(14)式有着相同的结果(13)式。若用其它近似,例如(7)式的第三和第四种近似,(6)式与(14)式的结果就有差异了。

3 基本方程的简化

将(13)式代入(1)式,得到基本方程:

$$\frac{d^2w/dx^2}{[1+(dw/dx)^2]^{3/2}}=\frac{1}{EI}\left[M_0-Q_0x+\frac{q}{2}\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)x^2\right] \tag{15}$$

令等式右端为 $\lambda(x)$,并用边界条件:$x=0, dw/dx=0$ 积分一次可得:

$$\frac{dw/dx}{[1+(dw/dx)^2]^{1/2}}=\int_0^x\lambda(x)dx=\varphi(x) \tag{16}$$

式中的 $\varphi(x)$ 为:

$$\varphi(x)=\frac{1}{EI}\left[M_0x-\frac{Q_0}{2}x^2+\frac{q}{6}\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)x^3\right] \tag{17}$$

沿用文献[2]的方法,从(16)式中解出 dw/dx,

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\varphi(x)}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}} \tag{18}$$

从0到 x 积分一次,若用边界条件:$x=0, w=0$ 可得:

$$w(x)=\int_0^x\frac{\varphi(x)}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}}dx \tag{19}$$

已经用到边界条件:$x=0, w=0$。

将(18)、(19)式代入,边界条件(3)的后两式给出:

$$H=\int_0^L\frac{\varphi(x)}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}}dx \tag{20}$$

以及

$$\varphi(L)=\frac{1}{EI}\left[M_0L-\frac{Q_0}{2}L^2+\frac{q}{6}\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)L^3\right]=0 \tag{21}$$

由此得到:

$$M_0-\frac{Q_0}{2}L+\frac{q}{6}\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)L^2=0 \tag{22}$$

弧长 S 为:

$$S=L+\Delta=\int_0^L[1+(dw/dx)^2]^{1/2}dx$$

将(18)式代入,可得:

$$S=L+\Delta=\int_0^L\frac{1}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}}dx \tag{23}$$

这样，式(20)，(22)和(23)给出确定待定系数 M_0、Q_0 和 Δ 的方程组。

4　M_0、Q_0 和 Δ 的近似计算

(23)式的积分可简化为：

$$\int_0^L \frac{1}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}}\mathrm{d}x = \int_0^L\left[1+\frac{\varphi^2(x)}{2}+\frac{3\varphi^4(x)}{8}+\cdots\right]\mathrm{d}x$$

$$\approx \int_0^L\left[1+\frac{\varphi^2(x)}{2}\right]\mathrm{d}x = L+\frac{1}{2}\int_0^L\varphi^2(x)\mathrm{d}x \tag{24}$$

将(17)式代入，积分后可求得：

$$\left(\frac{1}{EI}\right)^2\left[\frac{1}{6}M_0^2L^3-\frac{1}{8}M_0Q_0L^4+\left(\frac{1}{30}M_0N_0+\frac{1}{40}Q_0^2\right)L^5-\frac{1}{72}Q_0N_0L^6+\frac{1}{504}N_0^2L^7\right]=\Delta \tag{25}$$

其中：$N_0=q\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)$。(20)式中的积分也可类似简化为：

$$\int_0^L \frac{\varphi(x)}{[1-\varphi^2(x)]^{1/2}}\mathrm{d}x = \int_0^L\varphi(x)\left[1+\frac{\varphi^2(x)}{2}+\frac{3\varphi^4(x)}{8}+\cdots\right]\mathrm{d}x$$

$$\approx \int_0^L\left[1+\frac{\varphi^2(x)}{2}\right]\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^L\varphi(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^L\varphi^3(x)\mathrm{d}x \tag{26}$$

将(17)式代入，积分后可求得：

$$\left(\frac{1}{EI}\right)\left(\frac{1}{2}M_0L^2-\frac{1}{6}Q_0L^3+\frac{1}{24}N_0L^4\right)+\left(\frac{1}{EI}\right)^3\left(\frac{1}{8}M_0^3L^4-\frac{3}{20}M_0^2Q_0L^5\right)+$$
$$\left(\frac{1}{EI}\right)^3\left[\left(\frac{1}{24}M_0^2N_0+\frac{1}{16}M_0Q_0^2\right)L^6-\left(\frac{1}{28}M_0Q_0N_0+\frac{1}{112}Q_0^3\right)L^7\right]+$$
$$\left(\frac{1}{EI}\right)^3\left[\left(\frac{1}{192}M_0N_0^2+\frac{1}{128}Q_0^2N_0\right)L^8-\frac{1}{432}Q_0N_0^2L^9+\frac{1}{4\,320}N_0^3L^{10}\right]=H \tag{27}$$

其中，N_0 和上面一致。方程(22)、(25)和(27)是确定 M_0、Q_0 和 Δ 的三个非线性代数方程。

为了便于求解，引入下列无量纲量：

$$m_0=\frac{M_0L}{EI},\ \Omega_0=\frac{Q_0L^2}{EI},\ \alpha=\frac{1}{12}\frac{qL^3}{EI} \tag{28}$$

分别代入方程(22)、(25)和(27)，于是方程组简化为：

$$m_0-\frac{1}{2}\Omega_0+2n_0=0 \tag{29}$$

$$\frac{1}{6}m_0^2-\frac{1}{8}m_0\Omega_0+\frac{2}{5}m_0n_0+\frac{1}{40}\Omega_0^2-\frac{1}{6}\Omega_0n_0+\frac{2}{7}n_0^2=\frac{\Delta}{L} \tag{30}$$

$$\frac{1}{2}m_0-\frac{1}{6}\Omega_0+\frac{1}{2}n_0+\frac{1}{8}m_0^3-\frac{3}{20}m_0^2\Omega_0+\frac{1}{2}m_0^2n_0+\frac{1}{16}m_0\Omega_0^2-$$
$$\frac{3}{7}m_0\Omega_0n_0-\frac{1}{112}\Omega_0^3+\frac{3}{4}m_0n_0^2+\frac{3}{32}\Omega_0^2n_0-\frac{1}{3}\Omega_0n_0^2+\frac{2}{5}n_0^3=\frac{H}{L} \tag{31}$$

其中，$n_0=\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)\alpha$。三个方程中的未知量分别是：$m_0$，$\Omega_0$ 和 n_0（或 Δ）。

把以上的未知量 m_0，Ω_0 按 α 展开，n_0 由于本身就是带 α 的表达式，其形式不变即有：

$$m_0=x_0+x_1\alpha+\cdots;\ \Omega_0=y_0+y_1\alpha+\cdots;\ n_0=\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)\alpha \tag{32}$$

现将方程(32)代入(29)，有：

$$(x_0+x_1\alpha+\cdots)-\frac{1}{2}(y_0+y_1\alpha+\cdots)+2\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)\alpha=0$$

即：

$$\left(x_0-\frac{1}{2}y_0\right)+\alpha\left(x_1-\frac{1}{2}y_1+2+2\frac{\Delta}{L}\right)+\cdots=0$$

因此有：
$$x_0 - \frac{1}{2}y_0 = 0 \tag{33}$$
$$x_1 - \frac{1}{2}y_1 + 2 + 2\frac{\Delta}{L} = 0 \tag{34}$$
方程(32)代入(30)，并将 α 的零次项和一次项归并在一起，令其系数为0，因此有：
$$\frac{1}{6}x_0^2 - \frac{1}{8}x_0y_0 + \frac{1}{40}y_0^2 - \frac{\Delta}{L} = 0 \tag{35}$$
$$\frac{1}{3}x_0x_1 - \frac{1}{8}(x_0y_1 + x_1y_0) + \frac{2}{5}\left(1 + \frac{\Delta}{L}\right)x_0 + \frac{1}{20}y_0y_1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{\Delta}{L}\right)y_0 = 0 \tag{36}$$
将方程(32)代入(31)，得到：
$$\frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{6}y_0 + \frac{1}{8}x_0^3 - \frac{3}{20}x_0^2y_0 + \frac{1}{16}x_0y_0^2 - \frac{1}{112}y_0^3 = \frac{H}{L} \tag{37}$$
$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\Delta}{L} + \frac{3}{8}x_0^2x_1 - \frac{3}{20}x_0^2y_1 - \frac{3}{10}x_0x_1y_0 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta}{L}\right)x_0^2 +$$
$$\frac{1}{8}x_0y_0y_1 + \frac{1}{16}x_1y_0^2 - \frac{3}{7}\left(1 + \frac{\Delta}{L}\right)x_0y_0 - \frac{3}{112}y_0^2y_1 + \frac{3}{32}\left(1 + \frac{\Delta}{L}\right)y_0^2 = 0 \tag{38}$$
联立方程(33)和(35)，可解得：
$$x_0 = \pm 2\sqrt{15\frac{\Delta}{L}},\ y_0 = 2x_0 = \pm 4\sqrt{15\frac{\Delta}{L}} \tag{39}$$
同理，将 x_0、y_0 代入(36)，同时联立(34)，可解得：
$$x_1 = 1 + \frac{\Delta}{L};\ y_1 = 6\left(1 + \frac{\Delta}{L}\right) \tag{40}$$
于是，我们利用摄动法获得了关于 m_0，Ω_0 的近似解析解：
$$m_0 = 2\sqrt{15\frac{\Delta}{L}} + \left(1 + \frac{\Delta}{L}\right)\alpha \tag{41}$$
$$\Omega_0 = 4\sqrt{15\frac{\Delta}{L}} + 6\left(1 + \frac{\Delta}{L}\right)\alpha \tag{42}$$
下面计算弧长，将 $y_0 = 2x_0$ 代入(37)整理后得到：
$$\frac{1}{280}x_0^3 + \frac{1}{6}x_0 - \frac{H}{L} = 0 \tag{43}$$
由于 H/L 为小量，利用摄动法可将 x_0 展开为：$x_0 = t_0 + t_1\frac{H}{L} + \cdots$，代入(43)，并按 H/L 的零阶项和一阶项整理得：
$$\frac{t_0^3}{280} + \frac{t_0}{6} + \left(\frac{3t_0^2t_1}{280} + \frac{t_1}{6} - 1\right)\frac{H}{L} + \cdots = 0 \tag{44}$$
因此有：$\frac{t_0^3}{280} + \frac{t_0}{6} = 0$ 和 $\frac{3t_0^2t_1}{280} + \frac{t_1}{6} - 1 = 0$，解得：$t_0 = 0$，$t_1 = 6$，从而 $x_0 = 6H/L$，将 $x_0 = \pm 2\sqrt{15\frac{\Delta}{L}}$ 代入上式，求得：
$$\frac{\Delta}{L} = \frac{3}{5}\left(\frac{H}{L}\right)^2 \tag{45}$$
因此，弧长为
$$S = L + \Delta = L + 3H^2/5L \tag{46}$$
至此，方程(38)尚未用到，将解 x_0，y_0，x_1，y_1 代入方程(38)，可以证实，该方程已自动满足。

5 分析与比较

由于本文与文献[1]解决的是相同问题，只是方法上的差异，故有必要将解答进行比较，以验证

拟线性法求解悬臂梁大挠度问题的精确度。

1) 由高差引起的弧长增量 Δ/L(均按本文的符号定义,$\beta=6\dfrac{H}{L}$)。

文献[1]:
$$\frac{\Delta}{L}=\frac{1}{60}\beta^2 \tag{47}$$

本文:
$$\frac{\Delta}{L}=\frac{3}{5}\left(\frac{H}{L}\right)^2=\frac{3}{5}\left(\frac{\beta}{6}\right)^2=\frac{1}{60}\beta^2$$
,完全一致。

2) 设计参量 m_0,Ω_0。

文献[1]:
$$m_0=\alpha+\beta+\frac{1}{420}\alpha^3-\frac{1}{420}\alpha^2\beta+\frac{3}{140}\alpha\beta^2-\frac{3}{140}\beta^3 \tag{48}$$
$$\Omega_0=6\alpha+2\beta+\frac{1}{70}\alpha^3+\frac{1}{42}\alpha^2\beta+\frac{1}{10}\alpha\beta^2-\frac{3}{70}\beta^3 \tag{49}$$

本文:
$$m_0=2\sqrt{15\frac{\Delta}{L}}+\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)\alpha=\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta^2}{60} \tag{50}$$
$$\Omega_0=4\sqrt{15\frac{\Delta}{L}}+6\left(1+\frac{\Delta}{L}\right)\alpha=6\alpha+2\beta+\frac{\alpha\beta^2}{10} \tag{51}$$

若忽略 α、β 的三次项,结果完全一致。

3) 垂直挠度 $W(\xi)$

文献[1]:
$$W(\xi)=\overset{(1)}{W}(\xi)+\overset{(2)}{W}(\xi) \tag{52}$$

其中,一级近似:
$$\overset{(1)}{W}(\xi)=\frac{1}{2}\xi^2(1-\xi)^2\alpha+\frac{1}{6}\xi^2(3-2\xi)\beta \tag{53}$$

二级近似:
$$\overset{(2)}{W}(\xi)=\overset{(2)}{W}_1(\xi)\alpha^3+\overset{(2)}{W}_2(\xi)\alpha^2\beta+\overset{(2)}{W}_3(\xi)\alpha\beta^2+\overset{(2)}{W}_4(\xi)\beta^3 \tag{54}$$

将(19)积分展开,按文献[1]进行无量纲化后得到本文的垂直挠度:

$$W(\xi)=\frac{1}{2}m_0\xi^2-\frac{1}{6}\Omega_0\xi^3+\left(\frac{1}{2}n_0+\frac{1}{8}m_0^3\right)\xi^4-\frac{3}{20}m_0^2\Omega_0\xi^5+\left(\frac{1}{2}m_0^2n_0+\frac{1}{16}m_0\Omega_0^2\right)\xi^6$$
$$-\left(\frac{3}{7}m_0\Omega_0n_0+\frac{1}{112}\Omega_0^3\right)\xi^7+\left(\frac{3}{4}m_0n_0^2+\frac{3}{32}\Omega_0^2n_0\right)\xi^8-\frac{1}{3}\Omega_0n_0^2\xi^9+\frac{2}{5}n_0^3\xi^{10} \tag{55}$$

将(47)~(49)式代入上式,按 α 和 β 的一阶和三阶项整理得:

项 α:$\frac{1}{2}\xi^2(1-\xi)^2$,项 β:$\frac{1}{6}\xi^2(3-2\xi)$,项 $\alpha^3,\alpha^2\beta,\alpha\beta^2,\beta^3$ 等等。经比较,垂直挠度与文献[1]一级近似解完全一致,与二级近似解较为接近。

由以上可知:由本文方法确定的参量都与 α 和 β 有关,其精度介于文献[1]的一级近似解与二级近似解之间。由于文献[1]采用双参数同时摄动的解法,计算复杂,但精度高。本文在对基本方程进行简化处理后,先利用小参数 α 摄动求解,再在 Δ/L 的计算中引入另一参数 H/L(即 β),计算简便,同时又具有良好的精度。

参考文献:

[1] 钱伟长.宁波甬江大桥的大挠度非线性计算问题[J].应用数学和力学,2002,23(5):441-451.

[2] Fertis. Demeter G. Nonlinear Mechanics[M].(c)1999 by CRC Press LLC. US.

[3] A.H.Nayfeh.摄动方法导引[M].上海:上海翻译出版公司,1990.

[4] 孙训方.材料力学[M].北京:高等教育出版社,1987.