文章编号:1006-7329(2003)06-0058-04

边界拟合坐标涡量-流函数绕物体流动计算*

甘 孜
(重庆交通学院 河海建筑工程系,重庆 400074)

摘要:列出了用边界拟合坐标表示的涡量-流函数绕流计算偏微分方程组,及其交替隐式有限差分和显式有限差分方程组。用自动调控边界计算了矩形区域单园柱绕流运动,具有无穷域绕流特征。绘制了速度矢量分布图,和流函数,涡量,两个分速度及压强的等值线分布图。

关键词:涡量-流函数;边界拟合坐标;有限差分;绕流计算;无穷域;自动调控边界
中图分类号:O351.2 **文献标识码**:A

Around Body Flow Computation with Vortex - Flow - stream Function in Boundary Fitted Coordinates

GAN Zi
(Department of River and Ocean Construction Engineering, Chongqing Institute of Communications, Chongqing 400074, P.R.China)

Abstract: In this paper, partial differential equations of vortex flow - stream function in boundary fitted coordinates and related ADI equations were listed. The flow around a cylinder in quadrilateral area by auto control boundary was computed. The diagram of distribution of speed arrow, constant lines of flow - stream function, vortex, two speed parts and pressure were studied.

Keywords: vortex - flow - stream function; boundary fitted coordinates; finite difference; flow computation; infinite region; automatic boundary

目前绕流偏微分方程计算普遍存在无穷域流动边界有限问题。一般提出计算矩形域两侧边界条件为光滑固壁流线即第一类边界条件(见参考文献[2]第114页),与无穷域绕流问题有一些差异。为缩小差异接近无穷域绕流,一般方法是扩大边界。这导致计算量过大。在无穷远来流绕矩形区域内单园柱体或物体群的流动计算的力学模型中,本文采取涡量-流函数方法,偿试使用主控方程自动调控边界流动,企图实现无穷域绕流流动条件,即涡量耗损扩散性透过外边界直达无穷远域。计算结果显示外边界流动具有无穷域绕流流动特征。

偏微分方程自动生成自适应边界拟合坐标,物理域网线分布合理,弯曲弧线边界网格点均匀分布,计算域边界网格点排列整齐,有利于多物体群绕流各式边界处理及涡量-流函数计算稳定。有关边界拟合坐标网系的生成见参考文献[5]。

拟合坐标涡量方程(1)式是对流扩散方程,流函数方程(2)式是伯松方程,压强方程(3)式是伯松方程。外边界大部和内部域的流函数计算用(10)-(11)式。内部涡量计算用方程(6)-(7)式。全部边界和内部压强计算用(13)-(14)式.以上各计算式组成交替隐式差分方程组,是无条件稳定的。外边界及内部速度计算按差分方程(17)式。压强项不出现在(1)式中,根据速度即可计算压

* 收稿日期:2003-08-28
作者简介:甘 孜(1960-),男,重庆人,硕士,讲师,从事水力学教学及研究工作。

强。(1)式系数项是非线性项,迭代中的改变量不大,可作为变系数项。如果此项处理偏大,将导致计算不稳定。有关稳定性见文献[3]第 199 页。涡量－流函数及压强方程见①(下)214 及②141 及 155 页。方程作边界拟合坐标变换见文献[2]第 129 页。

用三对角追赶法解算隐式差分方程组。为提高解的收敛速度,本文采用显式差分方程(8)、(12)、(15)式,作了加权计算。有关追赶法使用条件见文献[3]第 182 页。加权计算见参考文献[4]第 308 页。

不同于一般涡量－流函数方法的在所有边界上给出流函数值,本文只有外边界四个角点流函数值为定量,即确定来流及出流的流量值。除这四点流函数值外,全部外边界全部流动要素均未给出,其中速度,流函数和压强均按内域流动方程计算。物体边界流函数取定量值,即进口边界两端点流函数平均值,定量物体边界将导致尾涡流无摆动。物体边界涡量值按涡量定义差分方程(18)式计算,涡量主体在物体边界附近。因涡量按其耗损扩散性,扩散至外边界,以及为避免涡量计算不稳定,外边界涡量取外插涡量值。物体边界为零值速度。定量进口边界两端点压强值。由于外边界各要素分布情况均随中心区情况而变动,等效将中心区流动扩散到外无穷域,或等效从无穷区域流动计算结果中取得本文外边界流动值,构成了自动调控边界。

1　边界拟合坐标偏微分方程式

1) 涡量偏微分方程式:

$$\mathrm{Str}\zeta_t + (U\xi_x + V\xi_y)\zeta_\xi + (U\eta_x + V\eta_y)\zeta_\eta = \mathrm{Re}^{-1}(\alpha\zeta_{\xi\xi} + 2\beta\zeta_{\xi\eta} + \gamma\zeta_{\eta\eta}) \tag{1}$$

2) 流函数偏微分方程式:

$$\alpha\Psi_{\xi\xi} + 2\beta\Psi_{\xi\eta} + \gamma\Psi_{\eta\eta} = -\zeta \tag{2}$$

3) 压强偏微分方程式:

$$Eu(\alpha P_{\xi\xi} + 2\beta P_{\xi\eta} + \gamma P_{\eta\eta}) = 2[(U_\xi\xi_x + U_\eta\eta_x)(V_\xi\xi_y + V_\eta\eta_y) - (U_\xi\xi_y + U_\eta\eta_y)(V_\xi\xi_x + V_\eta\eta_x)] \tag{3}$$

4) 速度和涡量定义方程式:

$$U = \Psi_\xi\xi_y + \Psi_\eta\eta_y, V = -(\Psi_\xi\xi_x + \Psi_\eta\eta_x) \tag{4}$$

$$\zeta = V_\xi\xi_x + V_\eta\eta_x - (U_\xi\xi_y + U_\eta\eta_y) \tag{5}$$

式中:涡量 ζ, 流函数 Ψ,压强 P,X,Y 方向的分速度 U,V,下标表示取偏导数,运动粘滞系数 ν,斯脱鲁哈利数 $\mathrm{Str} = L/V_\infty T$,取 $\mathrm{Str} = 1$,雷诺数 $Re = V_\infty L/\nu$,欧拉数 $Eu = P/\rho V_\infty^2$,取 $Eu = 1$,见参考文献[1](下)第 233 页,变换系数:α, β, γ, ξ_x, ξ_y, η_x, η_y,见参考文献[5]。

2　有限差分方程式

1) 涡量差分方程式:

$$\Delta t[(U1^n_{i,j}/2) - \alpha_{(i,j)}Re^{-1}]\zeta^{n+1/4}_{i+1,j} + (1 + 2\alpha_{(i,j)}\Delta t\, Re^{-1})\zeta^{n+1/4}_{i,j} - \Delta t[(U1^n_{i,j}/2) + \alpha_{(i,j)}Re^{-1}]\zeta^{n+1/4}_{i-1,j}$$
$$= \zeta c^n_{i,j} - \Delta t\, V1^n_{i,j}\zeta^n_{\eta(i,j)} + \Delta t Re^{-1}[\gamma_{(i,j)}\zeta^n_{\eta\eta(i,j)} + 2\beta_{(i,j)}\zeta^n_{\xi\eta(i,j)}] \tag{6}$$

$$\Delta t[(V1^n_{i,j}/2) - \gamma_{(i,j)}Re^{-1}]\zeta^{n+1/2}_{i,j+1} + (1 + 2\gamma_{(i,j)}\Delta t Re^{-1})\zeta^{n+1/2}_{i,j} - \Delta t[(V1^n_{i,j}/2) + \gamma_{(i,j)}Re^{-1}]\zeta^{n+1/2}_{i,j-1}$$
$$= \zeta c^n_{i,j} - \Delta t U1^n_{i,j}\zeta^{n+1/4}_{\xi(i,j)} + \Delta t Re^{-1}[\alpha_{(i,j)}\zeta^{n+1/4}_{\xi\xi(i,j)} + 2\beta_{(i,j)}\zeta^{n+1/4}_{\xi\eta(i,j)}] \tag{7}$$

$$\zeta^{n+1}_{i,j} \doteq \zeta c^n_{i,j} - \Delta t[U1^n_{i,j}\zeta^{n+1/2}_{\xi(i,j)} + V1^n_{i,j}\zeta^{n+1/2}_{\eta(i,j)}] + \Delta t Re^{-1}[\alpha_{(i,j)}\zeta^{n+1/2}_{\xi\xi(i,j)} + 2\beta_{(i,j)}\zeta^{n+1/2}_{\xi\eta(i,j)} + \gamma_{(i,j)}\zeta^{n+1/2}_{\eta\eta(i,j)}] \tag{8}$$

$$U1^n_{i,j} = U^n_{i,j}\xi_{x(i,j)} + V^n_{i,j}\xi_{y(i,j)},\quad V1^n_{i,j} = U^n_{i,j}\eta_{x(i,j)} + V^n_{i,j}\eta_{y(i,j)} \tag{9}$$

2) 流函数差分方程式:

$$-\alpha_{(i,j)}(\Psi^{n+1/4}_{i+1,j} - 2\Psi^{n+1/4}_{i,j} + \Psi^{n+1/4}_{i+1,j}) = \zeta^n_{i,j} + \gamma_{(i,j)}\Psi^n_{\eta\eta(i,j)} + 2\beta_{(i,j)}\Psi^n_{\xi\eta(i,j)} \tag{10}$$

$$-\gamma_{(i,j)}(\Psi^{n+1/2}_{i,j+1} - 2\Psi^{n+1/2}_{i,j} + \Psi^{n+1/2}_{i,j-1}) = \zeta^n_{i,j} + \alpha_{(i,j)}\Psi^{n+1/4}_{\xi\xi(i,j)} + 2\beta_{(i,j)}\Psi^{n+1/4}_{\xi\eta(i,j)} \tag{11}$$

$$2(\alpha_{(i,j)}+\gamma_{(i,j)})\Psi^{n+1}_{i,j}=\zeta^{n}_{i,j}+\alpha_{(i,j)}(\Psi^{n+1/2}_{i+1,j}+\Psi^{n+1/2}_{i+1,j})+$$
$$2\beta_{(i,j)}\Psi^{n+1/2}_{\xi\eta(i,j)}+\gamma_{(i,j)}(\Psi^{n+1/2}_{i,j+1}+\Psi^{n+1/2}_{i,j-1}) \tag{12}$$

3) 压强差分方程式：

$$-\alpha_{(i,j)}(P^{n+1/4}_{i+1,j}-2P^{n+1/4}_{i,j}+P^{n+1/4}_{i-1,j})=\gamma_{(i,j)}P^{n}_{\eta(i,j)}+2\beta_{(i,j)}P^{n}_{\xi\eta(i,j)}-2S^{n}_{i,j} \tag{13}$$

$$-\gamma_{(i,j)}(P^{n+1/2}_{i,j+1}-2P^{n+1/2}_{i,j}+P^{n+1/2}_{i,j-1})=\alpha_{(i,j)}P^{n+1/4}_{\xi(i,j)}+2\beta_{(i,j)}P^{n+1/4}_{\xi\eta(i,j)}-2S^{n}_{i,j} \tag{14}$$

$$2(\alpha_{(i,j)}+\gamma_{(i,j)})P^{n+1}_{i,j}=-2S^{n+1/2}_{i,j}+\alpha_{(i,j)}(P^{n+1/2}_{i+1,j}+P^{n+1/2}_{i-1,j})+$$
$$2\beta_{(i,j)}P^{n+1/2}_{\xi\eta(i,j)}+\gamma_{(i,j)}(P^{n+1/2}_{i,j+1}+P^{n+1/2}_{i,j-1}) \tag{15}$$

$$S^{n}_{i,j}=(U^{n}_{\xi(i,j)}\xi_{x(i,j)}+U^{n}_{\eta(i,j)}\eta_{x(i,j)})(V^{n}_{\xi(i,j)}\xi_{y(i,j)}+V^{n}_{\eta(i,j)}\eta_{y(i,j)})-$$
$$(U^{n}_{\xi(i,j)}\xi_{y(i,j)}+U^{n}_{\eta(i,j)}\eta_{y(i,j)})(V^{n}_{\xi(i,j)}\xi_{x(i,j)}+V^{n}_{\eta(i,j)}\eta_{x(i,j)}) \tag{16}$$

(4)速度和涡量定义差分方程式：

$$U^{n}_{i,j}=\Psi^{n}_{\xi(i,j)}\xi_{y(i,j)}+\Psi^{n}_{\eta(i,j)}\eta_{y(i,j)},\qquad V^{n}_{i,j}=\Psi^{n}_{\xi(i,j)}\xi_{x(i,j)}+\Psi^{n}_{\eta(i,j)}\eta_{x(i,j)} \tag{17}$$

$$\zeta^{n}_{i,j}=V^{n}_{\xi(i,j)}\xi_{x(i,j)}+V^{n}_{\eta(i,j)}\eta_{x(i,j)}-U^{n}_{\xi(i,j)}\xi_{y(i,j)}-U^{n}_{\eta(i,j)}\eta_{y(i,j)} \tag{18}$$

其中：

$$F^{n}_{\xi(i,j)}=(F^{n}_{i+1,j}-F^{n}_{i-1,j})/2 \tag{19}$$

$$F^{n}_{\eta(i,j)}=(F^{n}_{i,j+1}-F^{n}_{i,j-1})/2 \tag{20}$$

$$F^{n}_{\xi\xi(i,j)}=F^{n}_{i+1,j}-2F^{n}_{i,j}+F^{n}_{i-1,j-1} \tag{21}$$

$$F^{n}_{\eta\eta(i,j)}=F^{n}_{i,j+1}-2F^{n}_{i,j}+F^{n}_{i,j-1} \tag{22}$$

$$F^{n}_{\xi\eta(i,j)}=(F^{n}_{i+1,j+1}-F^{n}_{i+1,j-1}-F^{n}_{i-1,j+1}+F^{n}_{i-1,j-1})/4 \tag{23}$$

$$Fc^{n}_{i,j}=(F^{n}_{i+1,j}+F^{n}_{i-1,j}+F^{n}_{i,j}+F^{n}_{i,j+1}+F^{n}_{i,j-1})/5 \tag{24}$$

$$i=0,1,2,\cdots,N1 \tag{25}$$

$$j=0,1,2,\cdots,N2 \tag{26}$$

任意函数 F 可以是 ζ,Ψ,P,U,V，等。式(6)，(10)，(13)，和式(7)，(11)，(14)分别是 ξ 和 η 方向交替隐式差分方程，式(8)，(12)，(15)是加权方程。$N1,N2$ 是纵横网格数。

3 算例及讨论

利用方程式(6)-(18)，计算了矩形区域单园柱绕流。雷诺数 $Re=V_{\infty}d/\nu=1\,600$，急流绕流，因为临界雷诺数 $Re^{*}=250$。根据计算结果数据绘制了图1、图2、图3、图4、图5、图6。

从左向右流动。图片中各相邻等值线的函数差值等值。各图片间函数相互对应。

图3显示，涡量产生于园柱边界，高雷诺数急流绕流使涡量线向园柱后拖延扩展并大幅衰减，形成两个半区相互反转涡系。柱后附近涡量很大。急流使进口边界附近很小涡量。急流导致园柱前产生两个横条小叶片状相对半区负涡区。图2显示进口边界等间隙流线族系从中间向两边分开

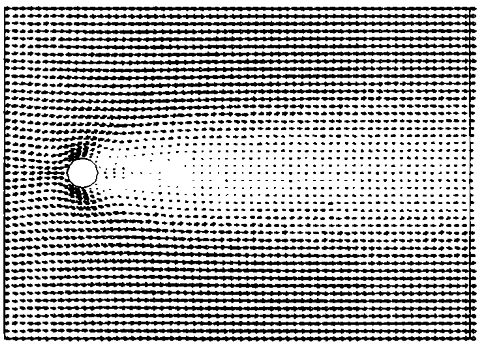

图1 速度矢量分布

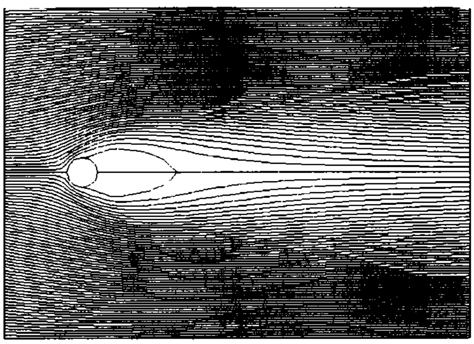

图2 流函数等值线分布

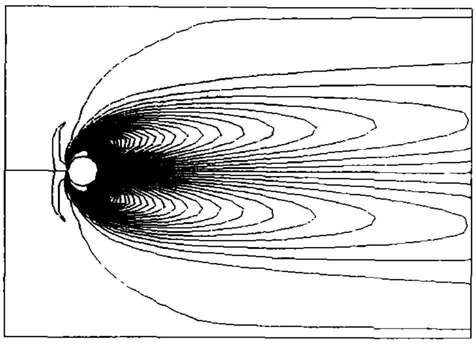

图 3　涡量等值线分布

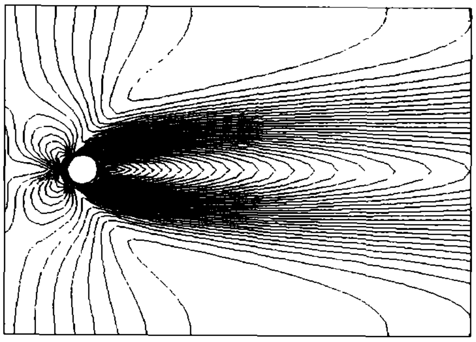

图 4　纵向分速度等值线分布

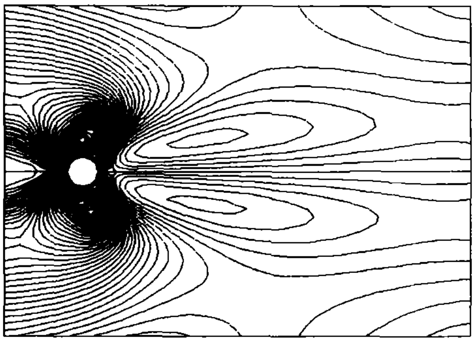

图 5　横向分速度等值线分布

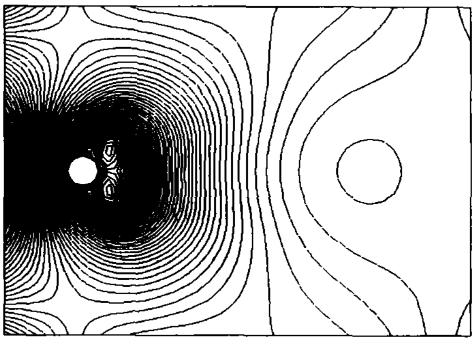

图 6　压强等值线分布

绕过园柱后再向纵中线收拢,但出口流线族密集于边界两端部分,说明两端单宽流量很大。纵中流线在园柱侧后边界脱体分离,约二倍半园柱长度后收拢于纵中线,脱体流线所围区域内是两个快速回流旋涡区。园柱到出口纵中线一带流线稀疏,说明这一带单宽流量很小,是尾流区。图 1 显示速度矢量沿园柱前边界以抛物形线向外排挤,柱后到出口有反向矢量,零矢量和正向矢量,说明是旋涡尾流区。在园柱前边界附近,矢量长度沿横网格线梯次增加,表示典型边界层流动特征。图 4 显示纵向分速度线在园柱到出口一带密集聚积,说明其数值增减变化剧烈。在园柱前边界附近有两个曲线半旋涡系,说明有沿程剧烈减速。分布曲线说明,两侧边界中后部为纵向分速度最大值,进口中心略有减速,出口中心减速显著。图 5 显示横向分速度线在园柱前边界两侧附近有两个高密度曲线旋涡系,说明有两个最大峰值点,速度矢量在此大转向。园柱后横向分速度线又有两个曲线长旋涡系,说明又有两个次峰值点。图 6 显示压强等值线在园柱前后一带密集挤压,园柱前附近沿程降压,园柱后附近沿程增压。包围园柱有个大型曲线旋涡系,是向中心减压,说明园柱工作在低压区。其后部有两个曲线旋涡子系,说明是两个最低压强点,对应尾流旋涡。出口前中线上有一曲线圈,说明有个增压峰值点,其后缓慢降压。两侧边界全线沿程增压,进口边界中心段增压显著。出口边界中心压强持平略有增加。但是进口总压强仍然大于出口。

4　结论

1) 本文计算结果,摸拟了实际绕流场基本状况。

2) 计算结果显示,外边界流动具有无穷域绕流流动特征,说明本文方法可在有限边界作无穷外域问题计算,是无穷外域一个新方法。

(下转第 66 页)

力损失等具有较大的影响。目前工程中广泛采用的先下后上,左右对称的施工次序较顺时针张拉次序合理,而同步张拉对板体的应力变形变化更加均匀,且张拉过程所引起的预应力损失最小,能达到预定设计的反拱,属最佳的张拉次序。另外,笔者还进一步分析了 T 型梁的张拉次序对梁体的影响情况,也得出类似规律。

参考文献:

[1] GB 50010 - 2002,混凝土结构设计规范 GB50010 - 2002〔S〕.

[2] 周岑,孙利民.钢筋混凝土结构弹塑性分析在 ANSYS 中的实现〔A〕.Ansys China 2002 用户年会论文集〔C〕.2002.

[3] 朱伯芳.有限单元法原理与应用(第二版)〔M〕.北京:中国水利水电出版社,1998.

[4] Structural Analysis Guide, Release 5.4〔M〕.ANSYS System Inc.,2002.

[5] 吴德伦.非线性结构力学〔M〕.重庆:重庆大学出版社,1990.

[6] JTJ 023 - 85,公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范〔S〕.

(上接第 61 页)

参考文献:

[1] 吴望一.流体力学(上、下册)〔M〕.北京:北京大学出版社,1982.

[2] 顾尔祚.流体力学有限差分法基础〔M〕.上海:上海交通大学出版社,1988.

[3] 陆金甫,关治.偏微分方程数值解法〔M〕.北京:清华大学出版社,1987.

[4] 陆金甫,顾丽珍,陈景良、偏微分方程差分方法〔M〕.北京:高等教育出版社,1988.

[5] 甘孜.有物体群的多连通域有限差分网格自动生成〔J〕、重庆建筑大学学报,2001,23(5):110 - 114、