

基于拉压与翘扭插值函数几何非线性刚度矩阵

刘 坚^{1,2}, 李开禧¹, 王永华¹

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045; 2. 广州大学, 广州 510405)

摘要:提出了翘曲扭转稳定函数的概念和计算公式,首次推导了基于扭转翘曲稳定插值函数的双轴对称开口轻型薄壁梁柱单元的翘曲扭转切线刚度矩阵,同时提出了基于拉压与翘扭稳定插值函数的轻钢梁柱单元空间几何非线性切线刚度矩阵。

关键词:翘曲扭转稳定函数; 翘曲扭转切线刚度矩阵; 几何非线性分析; 轻钢梁柱单元

中图分类号:TU311.2 **文献标识码:**A **文章编号:**1006-7329(2004)02-0048-06

Geometric Nonlinear Stiffness Matrix Based on Tension - Compression and Torsion - Warping Interpolation Function

LIU Jian^{1,2}, Li Kai-xi¹, WANG Yong-hua¹

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China; 2. Guangzhou University, Guangzhou 510405, P. R. China)

Abstract: The conception and calculation formula on torsion - warping stability function is brought forward and the torsion - warping tangent stiffness matrix of bi - axisymmetric open thin wall and lightweight beam - column element is derived for the first time, based on torsion - warping stability interpolation function. At the same time, the spatial geometric tangent stiffness matrixes for beam - column element of lightweight steel structure based on tension - compression and torsion warping stability interpolation function are presented as well.

Keywords: torsion - warping stability function; torsion - warping tangent stiffness matrix; geometric nonlinear analysis; beam - column element of lightweight steel structure

考虑位移与应变之间为非线性关系分析称为几何非线性分析,或称为二阶弹性分析,几何非线性问题分析中,结构刚度不仅取决于构件的材料和几何、截面尺寸,而且很大程度上取决于结构荷载作用下构件的初应力分布、结构位移、作用在结构上的荷载条件。工程领域的几何非线性问题主要包括大位移、小应变和大位移、大应变。钢结构工程中几何非线性问题主要是大位移、小应变。在轴力和弯矩共同作用下,结构刚度是随着荷载情况变化而变化的,当构件受到压力时,结构刚度就会变小,造成结构还未达到强度极限承载力时,就会发生失稳,结构不能再继续承受荷载,甚至可能发生倒塌。钢结构几何非线性分析,一直是国内、外力学界和工程界研究的一个热点问题,直到 20 世纪 70 年代末才比较全面地建立了杆系结构非线性分析理论框架^[1],20 世纪 80 年代国外学者对几何非线性问题进行了较广泛的研究,国内学者在这方面也作了大量工作。

由于钢结构构件的柔性特征十分明显,考虑几何非线性的影响必不可少。国家标准《钢结构设计规范》(GB50017-2002)规定对有侧移框架应进行二阶弹性分析^[2]。为了能够更加真实地描述多高层轻型钢结构二阶弹性分析中可能出现的侧扭屈曲变形和翘曲扭转变形,提出了一种新的基于拉压与翘扭稳定插值函数的轻钢梁柱单元空间几何非线性分析方法和刚度矩阵。

* 收稿日期:2003-12-20

作者简介:刘 坚(1964-),男,湖南洞口人,副教授,博士,主要从事钢结构稳定和抗震研究。

1 基本假定

单元的初始状态为等截面直杆,杆截面为双轴对称;材料为弹性、均质、各向同性;大变形小应变;连接为理想的刚接。

2 考虑剪切变形影响的梁柱单元的拉压稳定函数

由图 1 可以得到梁柱单元的二阶微分方程:

$$z''(x) + \gamma_y^2 z(x) = (-M_{y1} + V_{z1}x)/EI_y \tag{1}$$

式中: $\gamma_y = \sqrt{|P|/EI_y}$, EI_y 为 xoy 平面的抗弯刚度。式(1)的位移解(2)为:

$$z(x) = (M_{y1}/P)\cos(\gamma_y x) - [\csc(\gamma_y l)(M_{y1}\cos(\gamma_y l) + M_{y2} + P\Delta_z)/P]\sin(\gamma_y x) + (-M_{y1} + V_{z1}x)/P \tag{2}$$

同理,可以得到 xoz 平面压弯梁柱单元的位移解。对于拉弯梁柱单元,同样,可以得到 xoz 、 xoy 平面的位移解。再考虑压弯(或拉弯)梁柱单元的内力平衡条件,可以得到同时考虑轴力与剪切变形影响的压弯(或拉弯)梁柱单元转角位移方程,从压弯(或拉弯)梁柱构件单元转角位移方程中可以得到压弯梁柱理论稳定函数(3)式:

$$\begin{aligned} \varphi_{k1} &= \alpha_k \cdot \chi_k(\alpha_k) & \varphi_{k2} &= -j\alpha_k^2/(3\varphi_{k1} - 3) & \varphi_{k3} &= (3\varphi_{k2} + \varphi_{k1})/4 \\ \varphi_{k4} &= (3\varphi_{k2} - \varphi_{k1})/2 & \varphi_{k5} &= \varphi_{k1}\varphi_{k2} \end{aligned} \tag{3}$$

式中: $\alpha_k = \gamma_k \cdot l/2$, $\Delta_k = u_{k2} - u_{k1}$, $\gamma_k = \sqrt{|P|/EI_k}$, $\chi_k(\alpha_k) = \begin{cases} \text{ctg}(\alpha_k) & P < 0 \\ \text{cth}(\alpha_k) & P > 0 \end{cases}$, $j = \text{sign}(1, P) = \begin{cases} 1 & \text{当 } P > 0 \\ -1 & \text{当 } P < 0 \end{cases}$, u_{k1} , u_{k2} 和 Δ_k ($k = y, z$) 分别为压弯(或拉弯)构件单元两端在 y, z 方向的横向位移和相对横向位移。

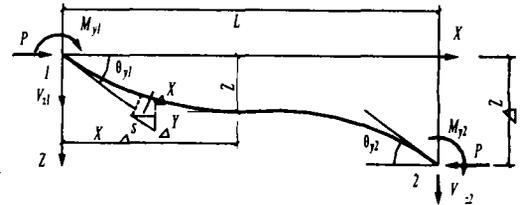


图 1 xoz 平面压弯单元的受力和变形图

3 梁柱单元的扭转翘曲稳定函数

对于约束扭转,在文献[4]提出的‘拉弯比拟模型’的基础上,同样可以得到关于扭转角的二阶微分方程:

$$\theta''(x) - \gamma_x^2 \theta(x) = -(-B_1 + T_1 x)/EI_\omega \tag{4}$$

式中: B_1 、 T_1 分别为空间梁柱单元 1 端的双力矩和扭矩,式(4)的解为

$$\theta(x) = c_1 \text{ch} \gamma_x x + c_2 \text{sh} \gamma_x x + (-B_1 + T_1 x)/EI_\omega \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{x1} &= \alpha_x \cdot \text{cth} \alpha_x & \varphi_{x2} &= \alpha_x^2/(3\varphi_{x1} - 3) & \varphi_{x3} &= (3\varphi_{x2} + \varphi_{x1})/4 \\ \varphi_{x4} &= (3\varphi_{x2} - \varphi_{x1})/2 & \varphi_{x5} &= \varphi_{x1}\varphi_{x2} \end{aligned} \tag{6}$$

式中: $\alpha_x = \gamma_x l/2$, $\gamma_x = \sqrt{GJ/EI_\omega}$ 为翘扭特征系数, J 为截面的抗扭惯性矩, GJ 为截面的自由抗扭刚度, I_ω 为截面的翘曲惯性矩, EI_ω 为截面的翘曲刚度。

4 基于拉压与翘扭稳定插值函数的梁柱单元增量形式虚功方程

如图 2 所示,在修正拉格朗日(Updated Lagrangian)描述方法中,最后已知 C^1 构形的空间轻型梁柱单元的增量虚功方程^[5]为:

$$\begin{aligned} & \int_v E \Delta e_{xx} \delta \Delta e_{xx} d^1 v + \int_v 2G \Delta e_{xy} \delta \Delta e_{xy} d^1 v + \int_v 2G \Delta e_{xz} \delta \Delta e_{xz} d^1 v + \\ & \int_v \sigma_{xx} \delta \Delta \eta_{xx} d^1 v + \int_v 2^1 \tau_{xy} \delta \Delta \eta_{xy} d^1 v + \int_v 2^1 \tau_{xz} \delta \Delta \eta_{xz} d^1 v + {}^1 R = {}^2 R \end{aligned} \tag{7}$$

式中: E 为弹性模量; G 为剪切模量。 ${}^1\sigma_{xx}$ 、 ${}^1\tau_{xy}$ 、 ${}^1\tau_{xz}$ 是在最后已知构形 C^1 的柯西应力; Δe_{xx} 、 Δe_{yy} 、 Δe_{zz} 为格林 - 拉格朗日 (Green - Lagrangian) 应变增量的线性项; $\Delta \eta_{xx}$ 、 $\Delta \eta_{xy}$ 、 $\Delta \eta_{xz}$ 为格林 - 拉格朗日应变增量的非线性项。

$$R = \int_v {}^1\sigma_{xx}\delta\Delta e_{xx}d^1v + \int_v 2{}^1\tau_{xy}\delta\Delta e_{xy}d^1v + \int_v 2{}^1\tau_{xz}\delta\Delta e_{xz}d^1v \quad (8)$$

设 Δu_{cx} 、 Δu_{cy} 、 Δu_{cz} 分别表示距离图 2 所示坐标原点为 x 的截面剪心 C 上的轴向位移和两个横向位移增量, Δu_{sx} 、 Δu_{sy} 、 Δu_{sz} 分别表示距离图示坐标原点为 x 的截面剪心 C 上的轴向位移和两个横向位移增量, $\Delta \theta_x$ 、 $\Delta \theta_y$ 、 $\Delta \theta_z$ 分别表示图 2 所示坐标原点为 x 的截面转动增量。 $\Delta \omega_s$ 为主扇性坐标增量。由于本文主要研究双轴对称截面 (轻型焊接或轧制 H 型钢), 剪切中心 S 与形心 C 是重合的, 以下公式中各量符号下标不再区分剪切中心 S 与形心 C ,

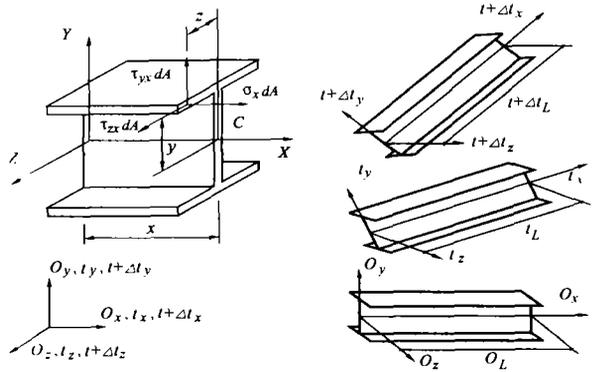


图 2 三维空间梁柱单元的运动、应力和坐标

$$\begin{cases} \Delta u_x = (\Delta u_{xc} - z\Delta u'_{yc} - y\Delta u'_{zc} - \Delta \omega_s)\Delta \theta_x \\ \Delta u_y = \Delta u_{yc} - z\Delta \theta_x \\ \Delta u_z = \Delta u_{zc} + y\Delta \theta_x \end{cases} \quad (9)$$

对弹性体的大位移变形问题, 当采用修正拉格朗日描述时, 应变与变形位移存在以下关系:

$$\begin{aligned} \Delta e_{xx} &= \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} & \Delta e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} \right) & \Delta e_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial z} + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial x} \right) \\ \Delta \eta_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \Delta \eta_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} \frac{\partial \Delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} \frac{\partial \Delta u_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial x} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial y} \right) \\ \Delta \eta_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} \frac{\partial \Delta u_x}{\partial z} + \frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} \frac{\partial \Delta u_y}{\partial z} + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial x} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

参照文献[6]相类似的方法, 由式(9)、式(10)和式(7), 同时考虑 C^1 构形应力与杆端力之间的关系及截面的几何特性的特点, 可以得到基于拉压与翘扭稳定插值函数轻型钢结构空间梁柱单元增量形式虚功方程:

$$\begin{aligned} & \frac{l}{2} \int_0^l EA \delta(\Delta u'_x{}^2) dx + \frac{l}{2} \int_0^l EI_y \delta(\Delta u''_y{}^2) dx + \frac{l}{2} \int_0^l EI_z \delta(\Delta u''_z{}^2) dx + \frac{l}{2} \int_0^l EI_\omega \delta(\Delta \theta'_x{}^2) dx + \\ & \frac{l}{2} \int_0^l EJ \delta(\Delta \theta'_x{}^2) dx + \int_0^l \frac{F_x}{2} \delta(\Delta u'_y{}^2 + \Delta u'_z{}^2) dx - \int_0^l \{ {}^1F_y \delta(\Delta u'_x \Delta u'_y) + {}^1F_z \delta(\Delta u'_x \Delta u'_z) \} dx - \\ & \int_0^l \{ {}^1F_y \delta(\Delta u'_y \Delta \theta'_x) + {}^1M_x \delta(\Delta u'_y \Delta \theta'_x) \} dx + \int_0^l \{ {}^1F_z \delta(\Delta u'_z \Delta \theta'_x) - {}^1M_x \delta(\Delta u'_z \Delta \theta'_x) \} dx + \\ & \int_0^l \frac{\bar{K}}{2} \delta(\Delta \theta'_x{}^2) dx - \int_0^l ({}^1M_x/2) \{ \delta(\Delta u'_y \Delta u'_z) - \delta(\Delta u'_z \Delta u'_y) \} dx = \delta \{ \bar{\Delta u}^e \}^T (\{ {}^2\bar{F}^e \} - \{ {}^1\bar{F}^e \}) \quad (11) \end{aligned}$$

式(11)中前五项为二阶弹性分析的线性项, 第五项之后为几何非线性项, 包含了轴向变形、双向弯曲变形和翘曲扭转变形等因素, 式中, \bar{K} 为弯格耳 (Wagner) 系数:

$$\bar{K} = \frac{{}^1F_x(I_y + I_z)}{A} \quad (12)$$

当考虑梁柱单元杆端翘曲变形时, 轻钢梁柱单元两端各有七个自由度, 前六个自由度的含义与一般

空间梁柱单元相同,第七个自由度是用来描述薄壁杆端截面翘曲,此时,如果用 $\{\bar{F}^e\}$ 表示局部坐标下梁稳定插值函数梁柱单元 1、2 端的杆端力,如图 3 所示,相应的杆端位移用 $\{\bar{u}^e\}$ 表示,如图 4 所示,则梁柱单元 1、2 端的杆端力和杆端位移分别为:

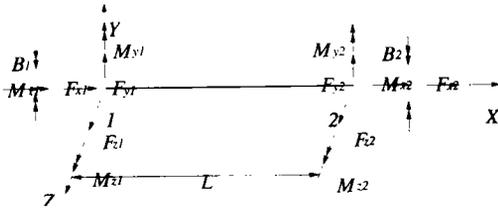


图 3 七自由度三维空间梁柱单元杆端力

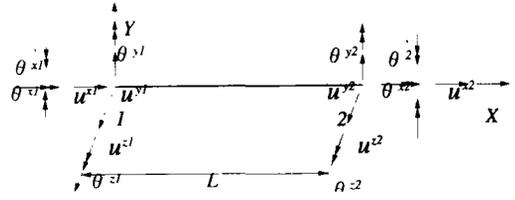


图 4 三维空间梁柱单元杆端变形

$$\{\bar{F}^e\} = \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad M_{z1} \quad B_1 \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad M_{z2} \quad B_2\}^T \quad (13)$$

$$\{\bar{u}^e\} = \{u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{z1} \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad \theta'_{x1} \quad u_{x2} \quad u_{y2} \quad u_{z2} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2} \quad \theta'_{x2}\}^T \quad (14)$$

5 空间三维梁柱单元的拉压和翘曲扭转稳定插值函数

在基于位移的有限元几何非线性分析方法中,一般采用三次多项式作为三次函数梁柱单元的位移场,为了能更加精确地抓住多高层轻型钢结构二阶弹性分析中可能出现的侧扭屈曲变形和翘曲扭转变形,根据以上得到的梁柱单元横向位移解与翘曲扭转位移解作为稳定插值函数梁柱单元的位移场。梁柱单元跨内的轴向位移采用一次线性插值函数,而横向位移使用考虑剪切变形影响的拉压稳定插值函数,采用翘曲扭转稳定插值函数来反映翘曲扭转变形状态,则梁柱单元跨内任一截面形心处的位移由单元杆端位移得出。因此,轴向位移、横向位移和翘曲扭转位移的插值函数向量为:

$$\{N_u\} = \begin{Bmatrix} c_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{z3} & 0 & 0 & 0 & c_{z4} & 0 & 0 & c_{z5} & 0 & 0 & 0 & c_{z6} & 0 \\ 0 & 0 & c_{y3} & 0 & -c_{y4} & 0 & 0 & 0 & c_{y5} & 0 & -c_{y6} & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\{N_\theta\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{x3} \quad 0 \quad 0 \quad c_{x4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{x5} \quad 0 \quad 0 \quad c_{x6}\}$$

$$c_{x1} = 1 - \xi \quad c_{x2} = \xi \quad c_{x3} = 1 - \xi \quad c_{x5} = \xi, \quad \xi = x/l \quad (16)$$

5.1 考虑剪切变形影响的拉压稳定插值函数

由横向位移场,可得到拉压稳定插值函数为:

$$\begin{cases} c_{k3} = a_{k1}\chi_{1k}(\xi) + jb_{k1}\chi_{2k}(\xi) - jb_{k1}(\gamma_k l)\xi + a_{k1} + je_{k1} \\ c_{k4} = a_{k2}\chi_{1k}(\xi) + [(a_{k1} + je_{k1})/\gamma_k]\chi_{2k}(\xi) - jb_{k2}(\gamma_k l)\xi - a_{k2} \\ c_{k5} = a_{k1}\chi_{1k}(\xi) - jb_{k1}x_{2k}(\xi) + jb_{k1}(\gamma_k l)\xi - a_{k1} \\ c_{k6} = a_{k3}x_{1k}(\xi) + (a_{k1})\chi_{2k}(\xi) - b_{k1}(\gamma_k l/\gamma_k)\xi - a_{k3} \end{cases} \quad (17)$$

式中: $k = y, z; \xi = x/l$ 。

$$a_{k1} = [1 - \chi_{1k}(1)]/d_{k1}$$

$$b_{k1} = \chi_{2k}(1)/d_{k1}$$

$$d_{k1} = 2 - 2\chi_{1k}(1) - j\gamma_k l\chi_{2k}(1)$$

$$e_{k1} = \gamma_k l\chi_{2k}(1)/d_{k1}$$

$$a_{k2} = [\chi_{2k}(1) - \gamma_k l\chi_{1k}(1)]/(\gamma_k d_{k1})$$

$$b_{k2} = [1 - \chi_{1k}(1)]/(\gamma_k d_{k1})$$

$$a_{k3} = [\gamma_k l - \chi_{1k}(1)]/(\gamma_k d_{k1})$$

$$\chi_{1k}(\xi) = \begin{cases} \cos(\gamma_k l\xi) & \text{当 } P < 0 \\ \cosh(\gamma_k l\xi) & \text{当 } P > 0 \end{cases}$$

$$\chi_{2k}(\xi) = \begin{cases} \sin(\gamma_k l\xi) & \text{当 } P < 0 \\ \sinh(\gamma_k l\xi) & \text{当 } P > 0 \end{cases}$$

$$\chi_{1k}(1) = \begin{cases} \cos(\gamma_k l) & \text{当 } P < 0 \\ \cosh(\gamma_k l) & \text{当 } P > 0 \end{cases}$$

$$\chi_{2k}(1) = \begin{cases} \sin(\gamma_k l) & \text{当 } P < 0 \\ \sinh(\gamma_k l) & \text{当 } P > 0 \end{cases}$$

5.2 翘曲扭转稳定插值函数

根据扭转翘曲位移场,可得出与式(17)相类似的扭转翘曲稳定插值函数 c_{x4}, c_{x6} , 仅需对式(17)作如

下修改:

$$\zeta = 1, k = x, d_{x1} = 2 - \cosh(\gamma_x l) + \gamma_x l \sinh(\gamma_x l), j = 1, \gamma_x = \sqrt{GJ/EI_\omega}$$

6 基于稳定插值函数的梁柱单元二阶弹性分析的刚度矩阵

梁柱单元两端之间截面上的 C^1 构形内力通过 C^1 构形的杆端力表示为:

$$\begin{aligned} {}^1F_x &= {}^1F_{x1} & {}^1F_y &= -\frac{{}^1M_{x1} + {}^1M_{x2}}{l} & {}^1F_z &= -\frac{{}^1M_{y1} + {}^1M_{y2}}{l} \\ {}^1M_x &= {}^1M_{x1} & {}^1M_y &= -{}^1M_{y1}(1-\xi) + {}^1M_{y2}\xi & {}^1M_z &= -{}^1M_{z1}(1-\xi) + {}^1M_{z2}\xi \end{aligned} \quad (18)$$

把式(15)~式(16)以及式(18)代入式(11),可得到轻钢空间梁柱单元二阶弹性分析的切线刚度矩阵:

$$\begin{aligned} [\bar{k}_{ST}^e] &= EA[k_{u_x u_x}^{110}] + EI_x[k_{u_y u_y}^{220}] + EI_y[k_{u_z u_z}^{220}] + EI_\omega[k_{\theta_x \theta_x}^{220}] + GJ[k_{\theta_y \theta_y}^{110}] + \bar{K}[k_{\theta_x \theta_x}^{110}] + \\ & {}^1F_{x2}([k_{u_y u_y}^{110}] + [k_{u_x u_x}^{110}]) + {}^1F_y([k_{u_z u_z}^{110}] + [k_{u_x u_x}^{110}]) - {}^1F_z([k_{u_x u_x}^{110}] + [k_{u_x u_x}^{110}]) - \\ & \frac{{}^1M_{x2}}{2}([k_{u_y u_y}^{120}] + [k_{u_y u_y}^{210}] - [k_{u_y u_y}^{210}] - [k_{u_y u_y}^{120}]) + {}^1M_{y1}([k_{u_y \theta_x}^{110}] + [k_{\theta_x u_y}^{110}]) - \\ & \frac{{}^1M_{y1} + {}^1M_{y2}}{l}([k_{u_y \theta_x}^{110}] + [k_{\theta_x u_y}^{110}] + [k_{u_y \theta_x}^{111}] + [k_{\theta_x u_y}^{111}]) + {}^1M_{z1}([k_{u_x \theta_x}^{110}] + [k_{\theta_x u_x}^{110}]) - \\ & \frac{{}^1M_{z1} + {}^1M_{z2}}{l}([k_{u_x \theta_x}^{110}] + [k_{\theta_x u_x}^{110}] + [k_{u_x \theta_x}^{111}] + [k_{\theta_x u_x}^{111}]) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{其中: } [k_{gh}^{st}] = \int_0^l \frac{d^s [N_g]^T}{dx^s} \frac{d^t [N_h]}{dx^t} x^v dx \quad (20)$$

式中:下标 g 和 h 代表 u_x, u_y, u_z, θ_x 和 θ'_x , 上标 S 和 t 代表插值函数 $[N]$ 向量的微分阶数, v 是 x 的幂函数的次数。式(19)中前五项为二阶弹性分析的线性刚度矩阵项 $[\bar{k}_e^e]$, 第五项之后为几何非线性刚度矩阵项 $[\bar{k}_g^e]$ 。

由式(19)与(20),可以推导出基于拉压和翘扭稳定插值函数轻钢空间梁柱单元二阶弹性分析的切线刚度矩阵显式表达式,限于篇幅,仅给出推导后的基于拉压和翘扭稳定插值函数的轻钢空间三维梁柱单元几何非线性刚度矩阵:

$$[\bar{k}_g^e] = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{z1} & 0 & d & e & \beta_{z2} & 0 & -a & -\beta_{z1} & 0 & i & -e & \beta_{z2} & 0 & 0 \\ \beta_{y1} & c & -\beta_{y2} & e & 0 & -b & 0 & -\beta_{y1} & h & -\beta_{y2} & -e & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{\omega 1} \bar{K} & f & g & \alpha_{\omega 2} \bar{K} & 0 & -d & -c & \alpha_{\omega 3} \bar{K} & -f & -g & \alpha_{\omega 4} \bar{K} & 0 & 0 & 0 \\ & & \beta_{y3} & 0 & 0 & 0 & -e & \beta_{y2} & -f & -\beta_{y4} & -j & 0 & 0 & 0 \\ & & & \beta_{z3} & 0 & 0 & -\beta_{z2} & -e & -g & j & -\beta_{z4} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \alpha_{\omega 5} \bar{K} & 0 & 0 & 0 & \alpha_{\omega 6} \bar{K} & 0 & 0 & \alpha_{\omega 7} \bar{K} & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \beta_{z1} & 0 & -i & e & -\beta_{z2} & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & & & \beta_{y1} & -h & \beta_{y2} & e & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \alpha_{\omega 8} \bar{K} & f & g & \alpha_{\omega 9} \bar{K} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \beta_{y3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \beta_{z3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & \alpha_{\omega 10} \bar{K} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

式中: \bar{K} 为弯格系数, $\beta_{km}(n_1, n_2) = {}^1F_{z2}\bar{\beta}(n_1, n_2)$, $k = y, z$; $m = 1, 4$; 新翘曲扭转刚度系数为 \bar{a}_{wi} ($i = 1 \sim 10$), 限于篇幅, 这里不一一列出。式(21)中的其它刚度系数 $a, b, c, e, f, g, h, i, j$ 如下:

$$a = \frac{{}^hM_{z1} + {}^1M_{z2}}{l^2}, b = -\frac{{}^hM_{y1} + {}^1M_{y2}}{l^2}, c = \frac{{}^hM_{z1}}{l}, d = \frac{{}^hM_{y1}}{l}$$

$$e = \frac{{}^hM_{z2}\gamma_y l \sin(\gamma_y l) - (\gamma_y l)^2}{- \varphi_c}, f = -\frac{({}^1M_{z1} + {}^1M_{z2}) [2\cos(\gamma_z l) + \gamma_z l \sin(\gamma_z l) - 2]}{l [\cos(\gamma_z l) - 1] \gamma_z^2 l}$$

$$g = -\frac{({}^1M_{y1} + {}^1M_{y2}) [2\cos(\gamma_y l) + \gamma_y l \sin(\gamma_y l) - 2]}{l [\cos(\gamma_y l) - 1] \gamma_y^2 l}, h = \frac{{}^hM_{z2}}{l}, i = \frac{{}^hM_{y2}}{l}$$

$$j = -\frac{{}^hM_{z2} 2\cos(\gamma_y l) + (\gamma_y l)^2 - 2}{2 - \varphi_c}, \varphi_c = 2 - \cos(\gamma_k l) - \gamma_k l \sin(\gamma_k l)$$

7 结论

推导了拉压稳定函数, 首次提出了翘曲扭转稳定函数的概念和计算公式, 并推导了由精确翘曲扭转稳定函数表达的翘扭稳定插值函数, 然后, 根据连续介质力学的有限变形原理, 使用修正拉格朗日列式, 得到基于拉压与翘扭稳定插值函数有限元形式的轻钢空间梁柱单元二阶弹性分析的切线刚度矩阵, 其中, 首次推导了基于扭转翘曲稳定插值函数开口轻型薄壁梁柱单元的翘曲扭转切线刚度矩阵, 同时推导了基于拉压与翘扭稳定插值函数轻钢空间梁柱单元几何非线性刚度矩阵。

参考文献:

- [1] Bathe K.J., Bolourchi S. . Large displacement analysis of 3D beam structure[J]. Int. J. Num. Mech. Engrg. 1970, 14:961 - 986.
- [2] GB 50017 - 2002, 钢结构设计规范[S].
- [3] 何君毅. 工程结构非线性问题的数值解法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.
- [4] 李开禧. 弹性薄壁杆件翘曲理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1990.
- [5] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社,
- [6] Yang Y. B. , Mcguire W. Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis[J]. Journal of structural engineering. ASCE, 1986, 112 (4):853 - 877.