美式看跌期权定价的差分格式*

李玉立， 金朝嵩
（重庆大学 数理学院，重庆 400044）

摘要：提供一种基于有限差分格式的数值方法为美式看跌期权定价。首先通过剖分将期权价格所满足的偏微分方程转化为一系列差分方程，再用迭代法求解这些差分方程。本文包括了内含的有限差分法和外推的有限差分法，并对这两种方法的优缺点进行了比较。最后给出数值算例，通过对此算例做的一系列数值实验，验证了算法的有效性，并得到了一些在期权交易的实际操作中有用的结果。

关键词：美式看跌期权；有限差分法
中图分类号：F830.9 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-7329(2004)04-0110-05

The Differential Scheme of Pricing for American Put Options

LI Yu-li, JIN Chao-song
(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, P.R.China)

Abstract: Based on the differential scheme, presents a numerical method of pricing for American put options. Firstly, the partial differential equation satisfied by the option price is transformed into a series of differential equations. Then, these differential equations are solved by the iterative method. The numerical method includes the implicit finite difference method and the explicit finite difference method and these two methods are compared. Finally, a numerical example is given and the validity of the algorithm is checked by a series of experiments. Some useful results are obtained for its application in the option markets.

Keywords: American put options; finite difference method

期权是当今世界金融市场交易的主要金融产品之一。对于欧式期权，可以直接代入定价公式为其定价。美式看涨期权也只有到期执行才划算，所以它相当于欧式看涨期权，可以直接代入定价公式定价。美式看跌期权却可以提前执行[4]，因此不能直接使用定价公式而只能用数值方法来为其定价。如今，如何为美式看跌期权定价，已成为金融工程学中一个受到普遍关注的问题。本文提供一种很有效的基于有限差分格式的数值方法为美式看跌期权定价，并通过数值实验得到了一些在期权交易的实际操作中有用的结果。

1 定价模型

本文采用期权定价的 Black-Scholes 模型[1]，期权价格 f 满足的微分方程是：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{1}$$

其中，r 为无风险利率，σ 为股价波动率，S 为标的股票价格。

对于欧式看跌期权 $p(S,t)$，定解条件是

$$f(0,t) = X, f(S_{\max},t) = 0, f(S,T) = \max(X - S_T, 0)$$

其中，X 为期权的执行价格，S_T 为标的股票的到期日价格。设 $S_{\max}$ 为可以达到的足够高的股票价格。

上列定解问题的解是

* 收稿日期：2004-01-10
作者简介：李玉立（1981-），女，重庆人，硕士生，主要从事数值方法及金融工程方面的研究。

$$p(S,t) = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

其中,$d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{X}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$,$d_2 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{X}\right) + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$,$N(x)$为标准正态分布函数。

对于美式看跌期权,由于可以提前执行,不能沿用上列公式,只能用数值方法求解。本文提出一种基于差分格式的数值方法。

2　差分方程的推导及定价数值方法

把从现在(即 0 时刻)到期权到期日(即 T 时刻)股票价格分成有限个等间隔的不同的小时间段。

假设 $\Delta t = T/N$,总共有 $N+1$ 个时间段:

$$0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \cdots,\ T$$

同时等间隔剖分股票价格段。定义 $\Delta S = S_{\max}/M$,考虑 $M+1$ 个股票价格:

$$0,\ \Delta S,\ 2\Delta S,\ \cdots,\ S_{\max}$$

上述离散过程如图 1 所示。该图构造了一个共有$(M+1)(N+1)$个点的坐标方格。坐标上的点(i,j)对应时刻 $i\Delta t$ 和股票价格$j\Delta S$。用变量 f_{ij}代表(i,j)点的期权价值。

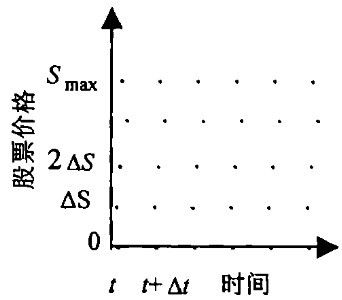

图 1　有限差分方法的坐标方格

2.1　内含的有限差分法

对于坐标方格内部的点(i,j),取

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{ij} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \text{ 和 } \frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{ij}}{\Delta t} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{ij}}{\Delta S^2} \tag{3}$$

把(2)、(3)式代入微分方程(1)中,注意到 $S = j\Delta S$,就可得到:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{ij}}{\Delta t} + rj\Delta S\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{ij}}{\Delta S^2} = rf_{ij}$$

其中 $j = 1,2,\cdots,M-1$,$i = 0,1,N-1$。各项经过合并,则有:

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{ij} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \tag{4}$$

其中　$a_j = \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$,　$b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t$,　$c_j = -\frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$

据看跌期权的边界条件,T 时刻的价值为 $\max[X - S_T, 0]$,因此:

$$f_{N,j} = \max[X - j\Delta S, 0] \qquad j = 0,1,\cdots,M \tag{5}$$

当股票价格为零时,看跌期权的价值是 X。因此:

$$f_{i0} = X \qquad i = 0,1,\cdots,N \tag{6}$$

当股票价格趋于无穷时,看跌期权的价值趋于零。因此我们用近似值:

$$f_{iM} = 0 \qquad i = 0,1,\cdots,N \tag{7}$$

(5)、(6)和(7)式定义了图 1 的坐标方格中三个边界(即 $S=0$,$S=S_{\max}$和 $t=T$)的看跌期权值。还需用(4)式来求出坐标方格左边界的f值。首先求解与 $T-\Delta t$ 时刻相对应的点。利用(4)式和 $i = N-1$ 可以给出 $M-1$ 个同时成立的公式:

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{Nj} \tag{8}$$

其中 $j = 1,2,\cdots,M-1$。这些方程中的右边值已由(5)式给出。此外,由(6)和(7)式,得:

$$f_{N-1,0} = X \tag{9}$$

$$f_{N-1,M} = 0 \tag{10}$$

因此,可以求解(8)式中 $M-1$ 个方程[2],求出 $M-1$ 个未知数:$f_{N-1,1}, f_{N-1,2}, \cdots, f_{N-1,M-1}$。这一步完成之后,把每个 $f_{N-1,j}$ 的值与 $X-j\Delta S$ 进行比较。如果 $f_{N-1,j}<X-j\Delta S$,最好在 $T-\Delta t$ 时刻执行期权,这样就使 $f_{N-1,j}$ 取为 $X-j\Delta S$。与 $T-2\Delta t$ 对应的结点也按同样方式处理,并以此类推。最后就会得到 $f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{0,M-1}$。从这些值中,根据股票的当前价格,就可确定相应的期权价格。

2.2 外推的有限差分法

如果能够假设在坐标方格上 (i,j) 点的 $\partial f/\partial S$ 值和 $\partial^2 f/\partial S^2$ 值与 $(i+1,j)$ 点的值相同,方法就可以简化。于是 $\partial f/\partial S$ 和 $\partial^2 f/\partial S^2$ 变成:

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{ij}}{\Delta S^2}$$

而(7)式变成了:

$$f_{ij} = a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} \tag{11}$$

式中:$a_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$, $b_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}(1-\sigma^2 j^2 \Delta t)$, $c_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$

这样就产生了所谓的外推的有限差分法(explicit finite difference method)。

2.3 内含法和外推法的比较

内含的有限差分方法的优点在于它很有效,当 ΔS 和 Δt 趋于零时它总是收敛于微分方程的解。缺点在于为了从 $f_{i+1,j}$ 的值计算出 $f_{i,j}$ 的值必须同时求解 $M-1$ 个方程,这使得计算相当复杂。

外推的有限差分方法的优点在于它的计算相当简单,只需简单的代人公式计算。缺点在于为了保证收敛性,必须进行特定的事先假设。而且,如果随意改变时间步长或股价步长,可能导致方法失效。

以下数值实验结果说明,用数值方法为期权定价时,内含的有限差分法优于外推的有限差分法。

3 数值实验及结果

考虑一个不付红利股票的5个月期美式看跌期权,股票价格为50美元,执行价格为50美元,无风险利率为每年10%,波动率为每年40%。用符号表示 $S=50, X=50, r=0.10, =0.40, T=0.4167$。

分别用内含的有限差分法和外推的有限差分法对本例进行数值计算。取 $M=20, N=10, \Delta S=5, \Delta t=0.041\ 67$,并设 $S_{max}=100$,编制程序进行计算,得出的结果如表1及表2所示。

表1 内含的有限差分法的计算结果

股票价格(美元)	距到期日的时间(月)										
	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
95	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
90	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
85	0.09	0.07	0.05	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
80	0.16	0.12	0.09	0.07	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00
75	0.27	0.22	0.17	0.13	0.09	0.06	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00
70	0.47	0.39	0.32	0.25	0.18	0.13	0.08	0.04	0.02	0.00	0.00
65	0.82	0.71	0.60	0.49	0.38	0.28	0.19	0.11	0.05	0.02	0.00
60	1.42	1.27	1.11	0.95	0.78	0.62	0.45	0.30	0.16	0.05	0.00
55	2.43	2.24	2.05	1.83	1.61	1.36	1.09	0.81	0.51	0.22	0.00
50	4.07	3.88	3.67	3.45	3.19	2.91	2.57	2.17	1.66	0.99	0.00
45	6.58	6.44	6.29	6.13	5.96	5.77	5.57	5.36	5.17	5.02	5.00
40	10.15	10.10	10.05	10.01	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
35	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00
30	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
25	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00
20	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00
15	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00
10	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00
5	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00
0	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00

表 2　外推的有限差分方法的计算结果

股票价格(美元)	距到期日的时间(月)										
	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
95	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
90	-0.11	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
85	0.28	-0.05	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
80	-0.13	0.20	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
75	0.46	0.06	0.20	0.04	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
70	0.32	0.46	0.23	0.25	0.10	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
65	0.91	0.68	0.63	0.44	0.37	0.21	0.14	0.00	0.00	0.00	0.00
60	1.48	1.37	1.17	1.02	0.81	0.65	0.42	0.27	0.00	0.00	0.00
55	2.59	2.39	2.21	1.99	1.77	1.50	1.24	0.90	0.59	0.00	0.00
50	4.26	4.08	3.89	3.68	3.44	3.18	2.87	2.53	2.07	1.56	0.00
45	6.76	6.61	6.47	6.31	6.15	5.96	5.75	5.50	5.24	5.00	5.00
40	10.28	10.20	10.13	10.06	10.01	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
35	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00
30	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
25	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00
20	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00
15	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00
10	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00
5	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00
0	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00

从列表可知，本算例按内含法算得的期权价格是每股 4.07 美元，按外推法算得的期权价格是每股 4.26 美元。对于现在股价为其他数值的同类期权，也可从表中查到其价格。

为了考察本算法的有效性，以及离散步长和参数的最佳取法，对上述算例做以下的数值实验。

1) 将内含法和外推法算出的欧式期权价格和 $B-S$ 公式算出的欧式期权价格作比较。取 $M=20$，$\Delta S=5$，改变时间步长，计算结果如表 3。

取 $N=10$，$t=0.041\ 67$，改变股价步长，计算结果如表 4。

表 3　改变时间步长时有限差分法与 $B-S$ 公式的定价比较

N	Δt	$B-S$ 公式算的欧式期权价格	内含法算出的欧式期权价格	内含法结果的相对误差	外推法算出的欧式期权价格	外推法结果的相对误差
150	0.002 78(1 d)	4.08	3.98	0.025	0.10	0.975
75	0.005 56(2 d)	4.08	3.97	0.027	0.21	0.949
50	0.008 33(3 d)	4.08	3.97	0.027	0.31	0.924
30	0.013 89(5 d)	4.08	3.96	0.029	0.52	0.873
15	0.027 78(10 d)	4.08	3.93	0.037	1.04	0.745
10	0.041 67(15 d)	4.08	3.91	0.042	1.56	0.618
6	0.069 44(20 d)	4.08	3.87	0.051	2.59	0.365
5	0.083 33(30 d)	4.08	3.84	0.059	3.10	0.240

表 4　改变股价步长时有限差分法与 $B-S$ 公式的定价比较

N	ΔS	$B-S$ 公式算的欧式期权价格	内含法算出的欧式期权价格	内含法结果的相对误差	外推法算出的欧式期权价格	外推法结果的相对误差
100	1	4.08	4.01	0.017	8.20	1.010
50	2	4.08	4.00	0.020	4.05	0.007
40	2.5	4.08	3.99	0.022	3.22	0.211
25	4	4.08	4.85	0.189	2.80	0.314
20	5	4.08	3.91	0.042	1.56	0.618
10	10	4.08	3.55	0.130	0.73	0.821
8	12.5	4.08	3.27	0.199	0.56	0.863
5	20	4.08	9.79	1.400	9.97	1.444

从表 3 可以看出，N 取 150 时，内含法计算结果与 $B-S$ 公式解最为接近，相对误差是 0.025，而外

推法失效。

从表4可以看出,M 取100时,内含法计算结果与公式解最为接近,相对误差是0.017。当 M 取50时,外推法计算结果与公式解最为接近,相对误差是0.007。

综上知,本文提供的算法是有效的。而且,内含法比外推法更有效。进一步的数值试验结果表明(限于篇幅,不再列出数值结果):上述算例中 ΔS 取2美元,Δt 取5天为最佳。

2) 取 $r=0.1, M=20, \Delta S=5, N=10, \Delta t=0.04167, X=50$,波动率 σ 从0.2到0.5改变,每次差0.02,计算结果如表5。

以上数据表明:波动率 σ 的估计对期权价格具有很大的影响。分别观察 $\sigma=0.2, \sigma=0.3, \sigma=0.4$ 和 $\sigma=0.5$ 时,由 $B-S$ 定价公式算出的欧式期权价格,分别为1.63,2.84,4.08,5.31,可以看出,虽然 σ 的取值只相差0.1,但算出的期权价格却是1~2元的差距,可见波动率的估计对期权价格的影响相当大,所以不能随意估计波动率。下面介绍一种简单而有效的从历史数据估计波动率的公式。

表5 σ 改变时期权价格的变化

σ	内含法算出的美式期权价格	内含法算出的欧式期权价格	$B-S$ 公式算出的欧式期权价格	控制变量法估计值[1]	外推法算出的美式期权价格
0.20	1.55	1.36	1.63	1.82	1.66
0.22	1.81	1.62	1.87	2.06	1.93
0.24	2.06	1.89	2.11	2.29	2.18
0.26	2.30	2.15	2.36	2.51	2.43
0.28	2.56	2.40	2.60	2.75	2.69
0.30	2.81	2.66	2.84	3.00	2.96
0.32	3.07	2.91	3.09	3.25	3.23
0.34	3.32	3.16	3.34	3.50	3.49
0.36	3.57	3.41	3.58	3.74	3.75
0.38	3.82	3.66	3.83	3.99	4.00
0.40	4.07	3.91	4.08	4.23	4.26
0.42	4.31	4.16	4.32	4.48	4.50
0.44	4.56	4.41	4.57	4.72	4.71
0.46	4.81	4.66	4.82	4.97	4.76
0.48	5.06	4.90	5.06	5.22	4.22
0.50	5.31	5.15	5.31	5.47	1.65

定义 $n+1$ 为观察次数,S_i 为在第Ⅰ个时间间隔末的股票价格,τ 为以年为单位表示的时间间隔的长度。

再令 $u_i=\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)(i=1,2,\cdots,n)$,$u_i$ 的标准差 s 的通常估计值为:

$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$ 或 $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2-\frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n}u_i)^2}$(其中 $\bar{u}$ 为 u_i 的均值),则波动率可估计为:

$$\sigma=\frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

5 结束语

本文为美式看跌期权定价提供了一种很有效的数值方法,可以用于期权交易的实际操作,具有相当高的应用价值。

参考文献:

[1] 〔美〕约翰.赫尔.张陶伟.期权、期货和其它衍生产品(第三版)〔M〕.北京:华夏出版社,2000.

[2] 丁丽娟.数值计算方法〔M〕.北京:北京理工大学出版社,1997.

[3] 吴志刚,金朝嵩.标的股价服从混合过程的期权定价公式及有限元算法〔J〕.经济数学,2002,19(2):28-31.

[4] 姚建平.离散式美式期权的最优套期交易时刻的选择〔J〕.重庆建筑大学学报,2003,25(2):99-101.