

# 衬砌压力隧洞的弹塑性分析\*

张黎明<sup>1</sup>, 王在泉<sup>1</sup>, 尹莹<sup>1</sup>, 孙林娜<sup>2</sup>

(1. 青岛理工大学 理学院, 青岛 266033; 2. 浙江大学 建筑工程学院, 杭州 310027)

**摘要:**基于岩体应变非线性软化本构模型, 考虑中间主应力的影响, 对衬砌圆形压力隧洞在等压荷载下进行弹塑性分析, 对弹塑性边界位置在衬砌范围内和围岩范围内分别进行了讨论, 指出根据弹塑性边界位置的不同应采用不同的计算公式, 并得到了由隧洞开挖卸荷引起的、围岩开始屈服时的极限压力以及内压力作用下分别使衬砌、围岩开始屈服时的极限压力。

**关键词:**压力隧洞; 衬砌; 弹塑性分析

**中图分类号:**U451+.4 **文献标识码:**A **文章编号:**1006-7329(2006)02-0059-03

## Elasto-plastic Analysis of Pressure Circular Tunnel with Liner

ZHANG Li-ming<sup>1</sup>, WANG Zai-quan<sup>1</sup>, YIN Ying<sup>1</sup>, SUN Lin-na<sup>2</sup>

(1. College of Science, Qingdao Technological University, Qingdao 266033, P. R. China; 2. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China)

**Abstract:** According to the strain nonlinear softening constitutive model having inflexion point after peak stress of practical rock and considering intermediate principal stress, the plastic zone of circular cavern with liner under the condition of uniform pressure is analyzed. The elasto-plastic boundaries both for the lining and surrounding rock are discussed. The stress distribution law is different due to the different position of elastic-plastic boundary. Based on this, different stress formulas are gained. The critical pressure caused by excavation of cavern leading to the yield zone and that caused by inner pressure leading to the yield of the liner and surrounding rock is introduced.

**Keywords:** pressure tunnel; liner; elasto-plastic analysis

压力隧洞是地下工程中常见的建筑物之一, 常设计为圆形, 并设置衬砌。对圆形洞室围岩的弹塑性分析, 目前多引用库仑屈服条件和 Kastner 公式。由于理想弹塑性体的后继屈服段恒等于岩体峰值强度, 使得 Kastner 解中围岩自承能力要高于实际围岩的自承能力。为此, 一些学者做了成功的改进。文献[1]用弹性软化-残余塑性三线性应力应变模型给出了柱形圆孔扩张时的应力场, 文献[2]根据隧洞施工期和运行期不同的受力情况, 导出塑性区不同的芬纳公式, 文献[3~5]采用统一强度理论对隧洞进行了研究, 文献[6]在符合真实岩体应力-应变关系下对圆形洞室进行弹塑性分析。各种改进大都是对无支护圆形洞室而言, 或者将支护的作用用一个支护力代替, 基于岩体应变非线性软化特征, 并引入中间主应力, 对具有衬砌圆形洞室进行弹塑性分析。

### 1 无支护圆形洞室围岩的弹塑性分析

一圆形洞室如图 1 所示。洞室半径为  $a$ , 内压力为  $p_0$ , 地应力为  $p_0$ , 侧压系数为 1,  $R$  为塑性区半径, 不计体力, 洞室无限长, 可作平面应变问题处理。

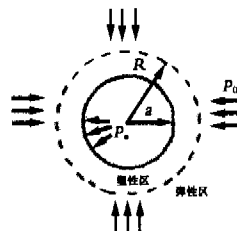


图 1 无支护圆形洞室分析模型

#### 1.1 弹性区的应力和位移

围岩弹性区的应力可直接引用平面应变轴对称结果, 即:

\* 收稿日期: 2005-11-20

作者简介: 张黎明(1972-), 男, 山东威海市人, 博士生, 主要从事岩石力学试验研究。

$$\sigma_r^e = p_0 \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - p_p \frac{R^2}{r^2} \quad (1)$$

$$\sigma_\theta^e = p_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - p_p \frac{R^2}{r^2} \quad (2)$$

式中:  $r$  为半径,  $p_p$  为弹塑性交界面处的径向应力。

根据轴对称问题几何方程, 设洞室围岩塑性区体积应变为零, 利用弹塑性交界面 ( $r=R$ ) 处等效应变  $\varepsilon_i = \varepsilon_e$ , 及  $\varepsilon_i = 0$  得塑性区等效应变<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2} \\ &= \varepsilon_e \frac{R^2}{r^2} \end{aligned} \quad (3)$$

在平面应变  $\varepsilon_z = 0$  和塑性区体积应变  $\varepsilon_m = 0$  的条件下,  $\sigma_i^e, \sigma_\theta^e, \sigma_r^e$  之间的关系为:

$$\sigma_i^e = \frac{1}{2} (\sigma_\theta^e + \sigma_r^e) \quad (4)$$

由此可得塑性区内等效应力<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_\theta^e - \sigma_r^e)^2 + (\sigma_r^e - \sigma_\theta^e)^2 + (\sigma_i^e - \sigma_\theta^e)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta^e - \sigma_r^e) \end{aligned} \quad (5)$$

## 1.2 塑性区的本构关系

围岩塑性区岩体单轴压缩的本构关系取为:

$$\sigma_1 = E_0 \varepsilon_1 \exp(-\varepsilon_1/\varepsilon_c) \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_c \quad (6)$$

式中:  $E_0$  为应力应变曲线的初始弹性模量。文献[6]指出, 上述岩体单轴压缩曲线能很好的反映岩体应变软化特性, 在简单加载情况下<sup>[7]</sup>, 根据全量理论将单轴压缩的本构关系(6)推广, 得到岩体在复杂应力状态下等效应力  $\sigma_i$  和等效应变  $\varepsilon_i$  之间的关系式:

$$\sigma_i = E_0 \varepsilon_i \exp(-\varepsilon_i/\varepsilon_c) = \sigma_c (R^2/r^2) \exp(-R^2/r^2) \quad (7)$$

式(7)是同时围岩三向应力  $\sigma_\theta, \sigma_r, \sigma_i$  与三向应变  $\varepsilon_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_i$  之间的关系。

轴对称问题平衡方程为:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (8)$$

利用(5)、(7)和(8), 并根据  $r=a$  时,  $(\sigma_r)_{r=a} = p_a$  得:

$$\sigma_r = p_a + \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \left[ \exp\left(-\frac{R^2}{r^2}\right) - \exp\left(-\frac{R^2}{a^2}\right) \right] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= p_a + \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \left[ 2 \left( \frac{R^2}{r^2} \right) \exp\left(-\frac{R^2}{r^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. \exp\left(-\frac{R^2}{r^2}\right) - \exp\left(-\frac{R^2}{a^2}\right) \right] \end{aligned}$$

在隧洞的施工期, 洞室围岩的侧压被卸除, 若令  $R$

$= a, p_a = 0$ , 利用上式即可求出由洞室开挖导致地应力卸荷引起的、使围岩开始屈服时的极限压力, 称为第一临界压力  $p_{cl}$ 。

$$p_{cl} = \frac{2\sigma_c}{\sqrt{3}} \exp(-1) \quad (10)$$

屈服区半径  $R$  可以根据弹塑性界面上弹性区的径向应力和屈服区的径向应力相等条件  $(\sigma_\theta^e)_{r=R} + (\sigma_r^e)_{r=R} = (\sigma_\theta)_{r=R} + (\sigma_r)_{r=R} = 2p_0$  确定。

$$R = a \sqrt{-\ln \left[ \frac{2}{e} - \frac{\sqrt{3}}{\sigma_c} (p_0 - p_a) \right]} \quad (11)$$

令  $p_a = 0$ , 按上式即可解出无支护围岩的塑性区半径  $R$ 。令  $\sigma_c = 30 \text{ MPa}, p_0 = 15 \text{ MPa}, a = 4.0 \text{ m}$ , 令  $p_a = 0$ , 做出等效应力  $\sigma_i$  与塑性半径  $r$  的关系曲线如图2所示。

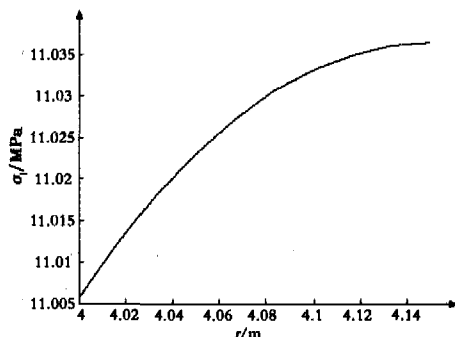


图2 等效应力  $\sigma_i$  与塑性半径  $r$  的关系曲线

## 2 有支护圆形洞室的弹塑性分析

若上述洞室采用半径为  $b$  的衬砌支护, 衬砌作为一个整体考虑, 且认为衬砌的本构关系也符合本构方程(7)。那么弹塑性边界可能出现在衬砌范围内, 也可能在围岩范围内, 下面对这两中情况分别讨论。

### 2.1 塑性区在衬砌范围内的弹塑性分析

设塑性区范围没有超越衬砌的范围, 即弹塑性边界在衬砌范围内(图3)。塑性区内的应力满足平衡方程(8)和本构方程(7), 利用  $r=a$  时,  $(\sigma_r)_{r=a} = p_a$  和

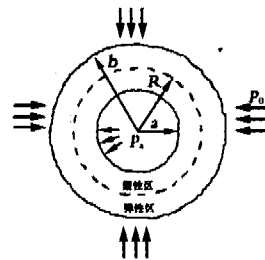


图3 塑性区在衬砌范围内分析模型

$(\sigma_r)_{r=R} = p_p, p_p$  为弹塑性交界面上的法向接触压力。由此求得:

$$\sigma_{r1} = p_a + \frac{\sigma_{cl}}{\sqrt{3}} \left[ \exp\left(-\frac{R^2}{r^2}\right) - \exp\left(-\frac{R^2}{a^2}\right) \right]$$

$$\sigma_{\theta 1} = p_a + \frac{\sigma_{c1}}{\sqrt{3}} \left[ 2 \left( \frac{R^2}{r^2} \right) \exp \left( -\frac{R^2}{r^2} \right) + \exp \left( -\frac{R^2}{r^2} \right) - \exp \left( -\frac{R^2}{a^2} \right) \right] \quad (12)$$

$\sigma_{c1}$ 为衬砌的抗压强度。对于  $r \geq R$  的弹性区,其弹性应力为<sup>[7,8]</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}^e &= \frac{A_1}{r^2} + 2B_1 & \sigma_{\theta 1}^e &= -\frac{A_1}{r^2} + 2B_1 \\ \sigma_{r2}^e &= \frac{A_2}{r^2} + 2B_2 & \sigma_{\theta 2}^e &= -\frac{A_2}{r^2} + 2B_2 \end{aligned} \quad (13)$$

其中:  $2B_1 = -\frac{1-n}{Db^2} p_p + \frac{2(1-\mu_2)}{DR^2} P_0$      $2B_2 = P_0$

$$A_1 = -\frac{2(1-\mu_2)}{D} p_0 + \frac{2(1-\mu_1)n+1}{D} p_p$$

$$A_2 = -\frac{(1-2\mu_2+n)R^2 + [n+2(\mu_2-n\mu_1)-1]b^2}{DR^2} p_0$$

$$+ \frac{2n(1-\mu_1)}{D} p_p$$

$$n = \frac{E_2(1+\mu_1)}{E_1(1+\mu_2)} \quad D = \frac{(1-2\mu_1)n+1}{R^2} - \frac{1-n}{R^2} \quad (14)$$

$$R = a \left( -\ln \frac{\sqrt{3}p_a(Db^2+1-n) - 2\sqrt{3}p_0b^2(1-\mu_2)/R^2 + \sigma_{c1}\exp(-1)(2Db^2+1-n)}{\sigma_{c1}(Db^2+1-n)} \right)^{1/2} \quad (16)$$

按上式解出  $R$ , 再根据 (15) 得  $p_p$ , 代入 (13) 和 (12) 可得弹性区和屈服区应力。

### 2.2 塑性区在围岩范围内的弹塑性分析

在隧洞的运行期,塑性区的范围可能已经超越了衬砌的范围,即弹塑性边界在围岩范围内(图4),此时衬砌已经完全屈服。塑性区内的应力满足平衡方程

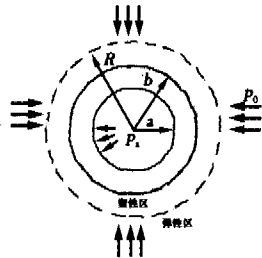


图4 塑性区在围岩范围内分析模型

(8) 和本构方程 (7), 利用  $r = a$  时,  $(\sigma_{r1})_{r=a} = p_a$  和  $(\sigma_{r2})_{r=R} = p_p, p_p$  为弹塑性交界面上的法向接触压力。类似 3.1 节的推导:

$$\frac{R}{b} = \left\{ -\ln \left[ \frac{\sqrt{3}(p_a - p_0) + \sigma_{c1} \left[ \exp(-1) - \exp\left(-\frac{b^2}{a^2}\right) \right] + 2\sigma_{c2}\exp(-1)}{\sigma_{c2}} \right] \right\}^{1/2} \quad (19)$$

根据上式可知,要想使弹塑性边界位于岩体内,需满足关系式  $R \geq b$ 。

### 3 算例

一具有衬砌的圆形洞室半径为  $a = 4$  m, 衬砌外半

式中:  $E_1, E_2$  分别为衬砌和围岩的弹性模量,  $\mu_1, \mu_2$  分别为衬砌和围岩的泊松比。

由式 (13) 知  $\sigma_{r1}^e + \sigma_{\theta 1}^e = 4B_1$ , 该式在弹塑性交界处亦成立, 将  $(\sigma_{r1}^e)_{r=R} + (\sigma_{\theta 1}^e)_{r=R} = (\sigma_{\theta 1})_{r=R} + (\sigma_{r1})_{r=R}$  代入本构方程 (7) 得:

$$p_p = \frac{\frac{2(1-\mu_2)}{DR^2} p_0 - p_a}{(1-n)/Db^2} - \frac{\frac{\sigma_{c1}}{\sqrt{3}} \left[ 2\exp(-1) - \exp\left(-\frac{R^2}{a^2}\right) \right]}{(1-n)/Db^2} \quad (15)$$

令  $R = a$ , 利用上式即可求出由地应力卸荷引起的、使衬砌开始屈服时的弹性极限压力  $p_{c2}$ , 称为第二临界压力。公式中的屈服区半径  $R$  可以根据弹塑性界面上弹性区的径向应力和屈服区的径向应力相等确定, 即  $(\sigma_{r1})_{r=R} = (\sigma_{r1}^e)_{r=R} = p_p$ , 由公式 (12)、(13) 和式 (14) 得:

$$\sigma_{r1} = p_a + \frac{\sigma_{c1}}{\sqrt{3}} \left[ \exp\left(-\frac{b^2}{r^2}\right) - \exp\left(-\frac{b^2}{a^2}\right) \right]$$

$$\sigma_{r2} = p_p + \frac{\sigma_{c2}}{\sqrt{3}} \left[ \exp\left(-\frac{R^2}{r^2}\right) - \exp\left(-\frac{R^2}{a^2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 2} &= p_p + \frac{\sigma_{c2}}{\sqrt{3}} \left[ 2 \left( \frac{R^2}{r^2} \right) \exp\left(-\frac{R^2}{r^2}\right) + \exp\left(-\frac{R^2}{r^2}\right) - \exp\left(-\frac{R^2}{a^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$\sigma_{c2}$ 为围岩的抗压强度。由弹塑性交界处 ( $r = R$ ) 的应力连续条件,  $(\sigma_{\theta 2}^e)_{r=R} + (\sigma_{r2}^e)_{r=R} = (\sigma_{\theta 2})_{r=R} + (\sigma_{r2})_{r=R} = 2p_0$  得:

$$p_p = p_0 - \frac{\sigma_{c2}}{\sqrt{3}} \left[ 2\exp(-1) - \exp\left(-\frac{R^2}{a^2}\right) \right] \quad (18)$$

在衬砌和围岩交界面 ( $r = b$ ) 处, 应满足  $(\sigma_{r1})_{r=b} = (\sigma_{r2})_{r=b}$ , 由此得到:

$\sigma_{c2}$   
径  $b = 4.5$  m, 围岩、衬砌的抗压强度分别为 30 MPa、40 MPa, 弹模分别为 1 GPa、5 GPa, 泊松比都为 0.25, 内压力  $p_a = 7$  MPa, 地应力  $p_0 = 15$  MPa, 侧压系数为 1。洞室无限长, 按照平面应变问题处理。

(下转第 73 页)

泥配制的混凝土等效养护龄期为  $530\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$ ,  $600\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$  对应相对强度为 1.001。P. O42.5R 与 P. O32.5R 的等效养护龄期及  $600\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$  左右时的相对强度亦存在相似规律。由此说明,水泥强度等级对混凝土同条件养护等效养护龄期影响不大。

表8 几种水泥混凝土实测及预测等效养护龄期

水泥种类	P. O42.5	P. O42.5R	P. O32.5	P. O32.5R
拟合公式 $f = aM^b$ 预测等效养护龄期/ $^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$	506	410	530	450
$600 \pm 20\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$ 时实测 $f$ 均值	1.028	1.048	1.001	1.040
$600\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$ 时拟合公式 $f = aM^b$ 预测 $f$ 值	1.031	1.057	1.024	1.044

P. O42.5 水泥配制的混凝土等效养护效龄期为  $506\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$ , 而 P. O42.5R 却只有  $410\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$ ; 同样, P. O32.5 水泥配制的混凝土对应的等效养护龄期也比 P. O32.5R 水泥配制的混凝土大  $80\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$ 。这说明早强水泥混凝土的等效养护龄期比对应的非早强水泥混凝土的等效养护龄期短。

#### 4 结论

1) 凝结时间对混凝土的等效养护龄期存在较大的影响。用糖钙作缓凝剂调节混凝土的凝结时间时,

混凝土等效养护龄期延长。特别是在掺量达 0.4% 时,即使在成熟度为  $1000\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$  的情况下其相对强度也不到 0.8。

2) 同品种较高强度等级水泥配制的混凝土同条件养护等效养护龄期稍短。其它条件一定时,同等级早强水泥配制的混凝土之等效养护龄期较非早强水泥混凝土短,成熟度相差约  $70\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{d}$ 。

#### 参考文献:

- [1] 孙振平,张冠伦. 蔗糖化钙对水泥混凝土性能的影响及机理[J]. 工业建筑,1998,28(7):69-71.
- [2] 黄刚. 缓凝剂和早期养护对混凝土性能的影响[D]. 重庆:重庆大学,2001.
- [3] 杨长辉,蒲心诚. 论碱矿渣水泥及混凝土的缓凝问题及缓凝方法[J]. 重庆建筑大学学报,1996,18(3):67-72.
- [4] 叶建雄. 矿物掺合料对混凝土氯离子渗透扩散性的研究[J]. 重庆建筑大学学报,2005,27(3):89-92.
- [5] 杨智能,严巍. 混凝土凝结时间的相关性研究. 建筑技术开发,2001,28(3):31-32.
- [6] 黄书荣,蔡海渝. 混凝土缓凝剂最优掺量的研究[J]. 混凝土,1995,(3):31-34.

(上接第 61 页)

当洞室开挖完成后,内压力为  $p_a = 0$ , 由式(11)求得塑性区半径  $R = 4.15\text{ m}$ , 此时弹塑性边界落在衬砌范围之内。这一阶段的屈服是由于施工期洞室开挖,地应力释放造成的。若令  $R = a$ , 由式(10)求出围岩开始屈服时的极限压力  $p_{c1} = 14.87\text{ MPa}$ 。在隧洞运行期,衬砌受到内压力  $p_a$  的作用(如水压力), 令  $R = a$ , 由式(15)求得衬砌开始屈服时的极限压力  $p_{c2} = 5.32\text{ MPa}$ , 当内压力增加到  $10.2\text{ MPa}$  时, 由公式由式(18)知,此时弹塑性边界落在衬砌和围岩交界处。当内压力继续增大时,塑性区将向围岩内部转移。

#### 4 结论

基于真实岩体应变非线性软化本构模型,对衬砌圆形压力隧洞在等压荷载下进行弹塑性分析,说明不同应力工况下,圆形洞室衬砌和围岩的应力状态不同。通过对弹塑性边界在衬砌范围内和围岩范围内的分析,指出根据弹塑性边界位置的不同应采用不同的计算公式,并得出由地下工程开挖卸荷引起的、围岩开始

屈服时的极限压力以及内压力作用下分别使衬砌、围岩开始屈服时的极限压力。

#### 参考文献:

- [1] 蒋明镜,沈珠江. 关于考虑剪胀的线性软化柱形孔扩张问题[J]. 岩石力学与工程学报,1997,16(6):550-557.
- [2] 任青文,邱颖. 关于芬纳公式的修正[J]. 河海大学学报,2001,29(6):109-111.
- [3] 宋俐,张永强,俞茂宏. 压力隧洞弹塑性分析的统一解[J]. 工程力学,1998,15(4):57-61.
- [4] 范文,俞茂宏,孙萍等. 洞室形变压力弹塑性分析的统一解[J]. 长安大学学报,2003,23(3):1-4.
- [5] 李同录. 考虑材料软化的洞室围岩弹塑性分析的统一解[J]. 长安大学学报,2004,24(3):48-51.
- [6] 潘岳,王志强. 应变非线性软化的圆形洞室围岩荷载-位移关系研究[J]. 岩土力学,2004,25(10):1515-1521.
- [7] 郑雨天. 岩石力学时弹塑性理论[M]. 北京:煤炭工业出版社,1988.
- [8] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京:人民教育出版社,1982.