

基于弹性地基梁法的隧道衬砌裂缝间距和宽度的计算*

荣耀¹, 许锡宾², 蔡晓鸿¹

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 重庆交通大学 西南水运工程科学研究所, 400074 重庆)

摘要:基于弹性地基梁建立了隧道衬砌的控制微分方程,根据圣维南原理推出裂缝间距相应中心角应满足的卓越方程,由此求出了隧道衬砌在荷载作用下产生的裂缝间距,进而确定相同裂缝间距和不同裂缝间距情况下的裂缝宽度。

关键词:弹性地基梁; 隧道衬砌; 裂缝间距; 裂缝宽度

中图分类号:TU47 **文献标识码:**A **文章编号:**1006-7329(2006)05-0023-04

Calculation of Crack Space and Crack Width of Tunnel Lining Based on Elastic Foundation Curved Beam Model

RONG Yao¹, XU Xi-bing², CAI Xiao-hong¹

(1. Civil Engineering School, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: Based on the elastic foundation beam, the control differential equation of tunnel lining is worked out, according to the theory of Saint-Venant, the predominance equation about the center angle to the crack space is established, then the crack space of tunnel lining under the loads can be worked out and according to the crack space, the crack width can be calculated.

Keywords: elastic foundation beam; tunnel lining; crack space; crack width

我国建成了为数众多的隧道,其中相当部分是按限裂要求设计的,积累了相当丰富的工程实践经验,促进了限裂设计理论和方法的发展^[1-5]。目前,隧洞衬砌限裂设计中所采用的分工基本上仍然是普通钢筋混凝土结构的裂缝参数计算公式,其计算结果是裂缝“密而细”。但是,室内试验与原型观测均表明,隧洞衬砌出现裂缝的规律与一般钢筋混凝土结构差异显著,大相径庭。如水工隧洞裂缝宽度远较采用《水工混凝土结构设计规范》(SL/T191-96)大,但裂缝条数却比计算值少,裂缝呈“稀而宽”的特征。究其原因与隧洞结构特点和衬砌开裂后应力状态变化有关,当衬砌在洞段围岩某薄弱处出现裂缝后,裂缝处的拉应力立即消除,近处围岩、衬砌的应力重新调整^[1]。

基于弹性地基梁对隧道衬砌的裂缝间距和宽度进行了解析分析,建立了衬砌按弹性地基曲梁的控制微分方程,由此确定隧道衬砌在外荷载下的裂缝宽度和间距。

1 衬砌按弹性地基曲梁计算的控制微分方程

图1为开裂隧道衬砌的计算简图,衬砌厚度为 h

$= r_1 - r_0$, 断面面积为 F , 惯性矩为 I , 于是中心半径 $r_i = \frac{1}{2}(r_1 + r_0)$ 。

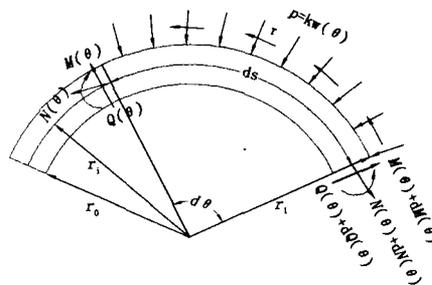


图1 混凝土衬砌弹性地基曲梁计算简图

截取微分单元 $r_i d\theta$, 其中径向位移为 $\omega(\theta)$, K 为岩体抗力系数; 衬砌与围岩间的剪应力为 τ ; 起始断面的内力为弯矩 $M(\theta)$, 剪力为 $Q(\theta)$, 轴力为 $N(\theta)$ 。上述各力均以图示方向为正。

列出微段的静力平衡方程,略去二阶微量后有:

$$dQ(\theta) + N(\theta)d\theta + K\omega(\theta)r_i d\theta \quad (1)$$

$$dN(\theta) - Q(\theta)d(\theta) - \tau r_i(\theta) = 0 \quad (2)$$

$$dM(\theta) + \tau r_i^2 d\theta - r_i dN(\theta) = 0 \quad (3)$$

* 收稿日期:2006-05-15

作者简介:荣耀(1979-),男,江西南昌人,博士生,主要从事地下结构研究。

简化成:

$$\frac{dQ(\theta)}{d\theta} + N(\theta) + K\omega(\theta)r_1 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} = Q(\theta) + \tau r_1 \quad (5)$$

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} = r_i Q(\theta) + \tau r_1 (r_i - r_1) \quad (6)$$

由上式得:

$$Q(\theta) = \frac{dM(\theta)}{r_i d\theta} - \frac{\tau r_1 (r_i - r_1)}{r_i} \quad (7)$$

将上式代入式(4),(5)得

$$\frac{d^2 M(\theta)}{r_i d\theta^2} + N(\theta) + K\omega(\theta)r_1 = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN(\theta)}{d\theta} &= \frac{dM(\theta)}{r_i d\theta} - \frac{\tau r_1 (r_i - r_1)}{r_i} + \tau r_1 \\ &= \frac{dM(\theta)}{r_i d\theta} + \frac{\tau r_1^2}{r_i} \end{aligned} \quad (9)$$

又由结构力学知,径向位移 $\omega(\theta)$ 与截面内力有如下关系式:

$$\frac{d^2 \omega(\theta)}{d\theta^2} + \omega(\theta) = \frac{M(\theta)r_i^2}{E_c I} + \frac{N(\theta)r_i}{E_c F} \quad (10)$$

将式(9)从0到 θ 积分得:

$$\int_0^\theta \frac{dN(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_0^\theta \frac{dM(\theta)}{r_i d\theta} d\theta + \int_0^\theta \frac{\tau r_1^2}{r_i} d\theta \quad (11)$$

$$\text{即: } N(\theta) - N(0) = \frac{1}{r_i} [M(\theta) - M(0)] + \frac{\tau r_1^2}{r_i} \theta \quad (12)$$

上式又可改写成:

$$N(\theta) = \frac{M(\theta)}{r_i} - \left[\frac{M(0)}{r_i} - N(0) \right] + \frac{\tau r_1^2}{r_i} \theta \quad (13)$$

对式(10)求二阶导数得:

$$\frac{d^4 \omega(\theta)}{d\theta^4} + \frac{d^2 \omega(\theta)}{d\theta^2} = \frac{r_i^2}{E_c I} \frac{d^2 M(\theta)}{d\theta^2} + \frac{r_i}{E_c F} \frac{d^2 N(\theta)}{d\theta^2} \quad (14)$$

由式(8),(13)可得:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M(\theta)}{r_i d\theta^2} + \frac{M(\theta)}{r_i} - \left[\frac{M(0)}{r_i} - N(0) \right] + \\ \frac{\tau r_1^2}{r_i} \theta + K\omega(\theta)r_1 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

也即:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M(\theta)}{d\theta^2} = -M(\theta) + [M(0) - N(0)r_i] - \\ \tau r_1^2 \theta - K\omega(\theta)r_1 r_i \end{aligned} \quad (16)$$

据式(4),(5)可得:

$$\frac{dQ(\theta)}{d\theta} = -N(\theta) - K\omega(\theta)r_1 \quad (17)$$

$$\frac{d^2 N(\theta)}{d\theta^2} = \frac{dQ(\theta)}{d\theta} = -N(\theta) - K\omega(\theta)r_1 \quad (18)$$

将式(16)、(18)代入(10),整理得:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \omega(\theta)}{d\theta^4} + \frac{d^2 \omega(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{d^2 \omega(\theta)}{d\theta^2} - \omega(\theta) + \\ \frac{r_i^2}{E_c I} (M_0 - N_0 r_i - \tau r_1^2 \theta) - \\ K\omega(\theta)r_1 r_i \left(\frac{r_i^2}{E_c I} + \frac{1}{E_c F} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

可以改写为:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \omega(\theta)}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 \omega(\theta)}{d\theta^2} + m^2 \omega(\theta) \\ = \frac{r_i^2}{E_c I} (M_0 - N_0 r_i - \tau r_1^2 \theta) \end{aligned} \quad (20)$$

式中: $m^2 = 1 + Kr_1 r_i \left(\frac{r_i^2}{E_c I} + \frac{1}{E_c F} \right)$, $M_0 = M(0)$,

$N_0 = N(0)$

式(20)即为径向位移应满足的控制微分方程。

2 衬砌按弹性地基曲梁计算的内力及应力计算

微分方程式(20)的解由特解与基本解组成,即:

$$\omega(\theta) = \omega_0(\theta) + \omega_1(\theta) \quad (21)$$

利用微分方程算子解法可得式(21)的特解:

$$\omega_0(\theta) = \frac{r_i^2}{m^2 E_c I} (M_0 - N_0 r_i - \tau r_1^2 \theta) \quad (22)$$

基本解 $\omega_1(\theta)$ 由下列特征方程确定:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + m^2 = 0 \quad (23)$$

求解得:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \\ \lambda_{3,4} = -\alpha \pm i\beta \end{cases}$$

式中: $\alpha = \sqrt{\frac{m-1}{2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{m+1}{2}}$

于是控制微分方程(20)的通解为:

$$\begin{aligned} \omega(\theta) = e^{-\alpha\theta} (C_1 \cos\beta\theta + C_2 \sin\beta\theta) + \\ e^{\alpha\theta} (C_3 \cos\beta\theta + C_4 \sin\beta\theta) + \\ \frac{r_i^2}{m^2 E_c I} (M_0 - N_0 r_i - \tau r_1^2 \theta) \end{aligned} \quad (24)$$

式中: C_1, C_2, C_3, C_4 为积分常数。

又由式(10)、(12)、(7)可得:

$$\begin{aligned} M(\theta) = \frac{1}{\frac{r_i^2}{E_c I} + \frac{1}{E_c F}} \\ \left[\frac{d^2 \omega(\theta)}{d\theta^2} + \omega(\theta) + \frac{M_0 - N_0 r_i - \tau r_1^2 \theta}{E_c F} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$N(\theta) = \frac{M(\theta)}{r_i} - \left[\frac{M(0)}{r_i} - N(0) \right] + \frac{\tau r_1^2}{r_i} \theta \quad (26)$$

$$Q(\theta) = \frac{dM(\theta)}{r_i d\theta} - \frac{\tau r_1 (r_i - r_1)}{r_i} \quad (27)$$

由式(24)、(25)、(26)、(27),有:

$$\begin{aligned} M(\theta) &= a_M e^{-\alpha\theta} (C_1 \sin\beta\theta - C_2 \cos\beta\theta) - \\ &\quad a_M e^{\alpha\theta} (C_3 \sin\beta\theta - C_4 \cos\beta\theta) + \\ &\quad (1 + b_M) (M_0 - N_0 r_i - \tau r_1^2 \theta) \\ N(\theta) &= \frac{a_M}{r_i} e^{-\alpha\theta} (C_1 \sin\beta\theta - C_2 \cos\beta\theta) - \\ &\quad \frac{a_M}{r_i} e^{\alpha\theta} (C_3 \sin\beta\theta - C_4 \cos\beta\theta) + \\ &\quad b_M (M_0 - N_0 r_i - \tau r_1^2 \theta) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= \frac{a_M}{r_i} e^{-\alpha\theta} \left[\begin{aligned} &(-\alpha C_1 + \beta C_2) \sin\beta\theta \\ &+ (\alpha C_2 + \beta C_1) \cos\beta\theta \end{aligned} \right] - \\ &\quad \frac{a_M}{r_i} e^{\alpha\theta} \left[\begin{aligned} &(\alpha C_3 + \beta C_4) \sin\beta\theta \\ &+ (-\alpha C_4 + \beta C_3) \cos\beta\theta \end{aligned} \right] + \\ &\quad \frac{b_M \tau r_1^2}{r_i} - \tau r_1 \end{aligned} \quad (30)$$

式中: $a_M = \frac{1}{\frac{r_i^2}{E_c I} + \frac{1}{E_c F}} \sqrt{m^2 - 1}$

$$b_M = \frac{1}{\frac{r_i^2}{E_c I} + \frac{1}{E_c F}} \frac{r_i^2 (1 - m^2)}{m^2 E_c I}$$

混凝土衬砌内缘的切向应力 $\sigma_{\theta i}$ 为:

$$\sigma_{\theta i} = \frac{N(\theta)}{F} + \frac{(r_i - r_0)}{I} M(\theta) \quad (31)$$

将式(28)、(29)代入式(31),整理得:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta i} &= A e^{-\alpha\theta} (C_1 \sin\beta\theta - C_2 \cos\beta\theta) - \\ &\quad A e^{\alpha\theta} (C_3 \sin\beta\theta - C_4 \cos\beta\theta) + \\ &\quad B (M_0 - N_0 r_i - \tau r_1^2 \theta) \end{aligned} \quad (32)$$

式中: $A = \frac{a_M}{r_i F} + \frac{r_i - r_0}{I}$, $B = \frac{b_M}{F} + \frac{(1 + b_M)(r_i - r_0)}{I}$

3 裂缝间距计算

衬砌在在临界围岩压力和外水压力作用下,未开裂断面内力由结构荷载法可以计算得到,设为 N_{0I} , M_{0I} 。

衬砌开裂后,裂缝断面的作用力有钢筋拉力,裂缝断面处的作用力设为 N_0, M_0 。则混凝土开裂前后裂缝断面的内力改变值为:

$$N_{0II} = N_0 - N_{0I} \quad (33)$$

$$M_{0II} = M_0 - M_{0I} \quad (34)$$

在临界开裂压力作用下,最不利断面内缘应力为:

$$\sigma_{I\theta} = [\sigma_{\theta h}] \quad (35)$$

在混凝土衬砌产生第2条裂缝前,其内缘应力:

$$\sigma_{II\theta} = \sigma_{I\theta} + \Delta\sigma_{I\theta} \quad (36)$$

若 $\sigma_{II\theta} < [\sigma_{\theta h}]$,则混凝土衬砌不会产生新裂缝;当 $\sigma_{II\theta} = [\sigma_{\theta h}]$,则混凝土将在该断面产生第2条裂缝。

据圣维南(Saint-Venant)原理,距裂缝愈远,裂缝处内力的影响越小。因此,定有 $C_3 = C_4 = 0$,于是,式(32)可写成:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta II} &= A e^{-\alpha\theta} (C_1 \sin\beta\theta - C_2 \cos\beta\theta) + \\ &\quad B (M_{0II} - N_{0II} r_i - \tau r_1^2 \theta) \end{aligned} \quad (37)$$

其中积分常数 C_1, C_2 由边界条件:

$$\sigma_{II\theta} |_{\theta=0} = \frac{N_{0II}}{F} + \frac{M_{0II} (r_i - r_0)}{I}, Q(\theta) |_{\theta=0} = 0$$

得: $C_1 = - \left(\frac{b_M \tau r_1^2}{r_i} - \tau r_1 \right) \frac{r_i}{a_M \beta} - \frac{\alpha C_2}{\beta}$

$$C_2 = \frac{1}{A} \left[B (M_{0II} - N_{0II} r_i) - \frac{N_{0II}}{F} - \frac{M_{0II} (r_i - r_0)}{I} \right]$$

令式(37)等于零: $\sigma_{\theta II} = 0$

便可得出裂缝间距 L_{cr} 相应中心角应满足的卓越方程式:

$$\begin{aligned} A e^{-\alpha\theta} (C_1 \sin\beta\theta - C_2 \cos\beta\theta) + \\ B (M_{0II} - N_{0II} r_i - \tau r_1^2 \theta) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

与 L_{cr} 相应的中心角 θ_c 求出后,则

$$L_{cr} = r_i \theta_c \quad (39)$$

4 裂缝宽度计算

两条裂缝间的曲梁段长度为 L_{cr} ,在外荷载作用下,利用结构的对称性,取坐标极轴通过曲梁中点 O' ,于是任意断面至点 O' 的弧长为:

$$s' = r_0 \theta' \quad (40)$$

类似于式(4)、(5)的推导,极轴断面与裂缝断面的内力关系式:

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} - r_i \frac{dN(\theta')}{d\theta} + \tau r_1^2 = 0 \quad (41)$$

θ' 对从 0 到 $\frac{\theta_c}{2}$ 积分得:

$$r_i N'_0 - r_i N_0 = M'_0 - M_0 + \tau r_1^2 \frac{\theta_c}{2} \quad (42)$$

也即: $M_0 - r_i N_0 - \tau r_1^2 \frac{\theta_c}{2} = M'_0 - r_i N'_0$ (43)

式中: $M'_0 = M(\frac{\theta_c}{2}), N'_0 = N(\frac{\theta_c}{2}), \omega(\theta') = \omega(-\theta')$

于是式(32)中的积分常数应满足:

$$C_1 = C_3 = \frac{1}{2} C'_1, C_2 = C_4 = \frac{1}{2} C'_2$$

从而式(28), (29), (30)可分别写成:

$$\omega(\theta') = C'_1 \cos\beta\theta' \operatorname{ch}\alpha\theta' - C'_2 \sin\beta\theta' \operatorname{sh}\alpha\theta' + \frac{r_i^2}{m^2 E_c I} (M'_0 - N'_0 r_i - \tau r_1^2 \theta') \quad (44)$$

$$M(\theta') = -a_M C'_1 \sin\beta\theta' \operatorname{ch}\alpha\theta' - a_M C'_2 \cos\beta\theta' \operatorname{sh}\alpha\theta' + (1 + b_M) (M'_0 - N'_0 r_i - \tau r_1^2 \theta') \quad (45)$$

$$N(\theta') = -\frac{a_M}{r_i} C'_1 \sin\beta\theta' \operatorname{ch}\alpha\theta' - \frac{a_M}{r_i} C'_2 \cos\beta\theta' \operatorname{sh}\alpha\theta' + b_M (M'_0 - N'_0 r_i - \tau r_1^2 \theta') \quad (46)$$

$$Q(\theta') = -\frac{a_M}{r_i} \left[(-\alpha C_1 + \beta C_2) \sin\beta\theta' \operatorname{ch}\alpha\theta' \right] + \frac{b_M \tau r_1^2}{r_i} - \tau r_1 \quad (47)$$

$$\sigma_{\theta} = -AC'_1 \sin\beta\theta' \operatorname{sh}\alpha\theta' - AC'_2 \cos\beta\theta' \operatorname{ch}\alpha\theta' + B(M'_0 - N'_0 r_i - \tau r_1^2 \theta') \quad (48)$$

以上各式的积分常数 C'_1, C'_2 由边界条件确定:

$$Q(\theta') \big|_{\theta'=\frac{\theta_c}{2}} = 0$$

$$\sigma_{\theta(\theta')} \big|_{\theta'=\frac{\theta_c}{2}} = \frac{N_0}{F} + \frac{(r_i - r_0) M_0}{I}$$

也即:

$$-\frac{a_M}{r_i} \left[-\alpha C'_1 + \beta C'_2 \right] \sin\beta\theta' \operatorname{ch}\alpha\theta' + \frac{b_M \tau r_1^2}{r_i} - \tau r_1 - AC'_1 \sin\beta\theta' \operatorname{sh}\alpha\theta' - AC'_2 \cos\beta\theta' \operatorname{ch}\alpha\theta' + B(M'_0 - N'_0 r_i - \tau r_1^2 \theta') = \frac{N_0}{F} + \frac{(r_i - r_0) M_0}{I}$$

根据弹性力学极坐标系下衬砌内缘几何方程:

$$\varepsilon_{\theta(\theta')} = \frac{\omega(\theta')}{r_0} + \frac{du(\theta')}{r_0 d\theta'} \quad (49)$$

式中: $u(\theta')$ 为切向变位。

考虑到应力与应变间的物理方程:

$$\varepsilon_{\theta(\theta')} = \frac{\sigma_{\theta(\theta')}}{E_c} \quad (50)$$

由式(49), (50)可得求解衬砌内缘切向变位微分方程:

$$\frac{du(\theta')}{d\theta'} = r_0 \frac{\sigma_{\theta(\theta')}}{E_c} - \omega(\theta') \quad (51)$$

积分上式可得:

$$u\left(\frac{\theta_c}{2}\right) = (A_1 C'_1 + A_2 C'_2) \sin\beta \frac{\theta_c}{2} \operatorname{ch}\alpha \frac{\theta_c}{2} +$$

$$(-A_2 C'_1 + A_1 C'_2) \cos\beta \frac{\theta_c}{2} \operatorname{ch}\alpha \frac{\theta_c}{2} + B_1 \left(M'_0 \frac{\theta_c}{2} - N'_0 r_i \frac{\theta_c}{2} - \tau r_1^2 \frac{\theta_c^2}{8} \right) \quad (52)$$

$$\text{式中: } A_1 = -\frac{Ar_0\alpha}{mE_c} - \frac{\beta}{m}, A_2 = -\frac{Ar_0\beta}{mE_c} - \frac{\alpha}{m}, B_1 = \frac{Br_0}{E_c} - \frac{r_i^2}{m^2 E_c I}$$

据弹性地基梁对称可知, 须校核在外压力作用下曲梁中点的内缘应力是否超过了混凝土的容许抗拉强度。若超过, 则在曲线中点又将产生一条新裂缝, 此时, 裂缝间距便变为 $L_c/2$, 可据其进行衬砌混凝土裂缝宽度计算。进一步分析有如下结论:

1) 若裂缝等间距分布, 则裂缝宽度为:

$$b = 2 \left| u\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \right| \quad (53)$$

2) 若裂缝间距不等, 则须分别求出各段弹性曲梁端点的切向变位 u_1 及 u_2 , 其绝对值相加便得所求裂缝宽度, 即:

$$b = |u_1| + |u_2| \quad (54)$$

5 结论

基于弹性地基梁建立了隧道衬砌的控制微分方程, 根据圣维南(Saint-Venant)原理推出裂缝间距相应中心角应满足的卓越方程, 由此求出了隧道衬砌在荷载作用下产生的裂缝间距, 进而确定相同裂缝间距和不同裂缝间距情况下的裂缝宽度。

参考文献:

- [1] 蔡晓鸿, 蔡勇平. 水工压力隧洞结构应力计算[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2004.
- [2] 薄春平, 夏才初, 李永盛. 隧道的温度应力及由其引起的裂缝开展规律的研究[J]. 中国公路学报, 2000, 13(2): 76-79.
- [3] 梁政. 埋地管道对称水平弯头的弹性地基曲梁解[J]. 西南石油学院学报, 1989, 11(3): 65-74.
- [4] 江正荣, 朱国梁. 简明施工计算手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989.
- [5] 王铁梦. 工程结构裂缝控制[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.