

# 无侧移单元闭合框架 $P-\delta$ 效应的研究\*

刘毅, 李战平, 朱占友, 白绍良

(重庆大学, 土木工程学院, 重庆 400045)

**摘要:**为了判断无侧移单元封闭框架柱在考虑轴力  $p-\delta$  效应下柱端弯矩的变化规律,提出了综合梁柱约束类型及节点二阶附加转角的判断法则;并经过典型算例结果的检验与证实。当节点转动是由梁端引起时,若考虑  $p-\delta$  效应后节点转角增大,则意味着由于柱对梁端的约束作用减弱,柱端弯矩与梁端弯矩将变小;反之,则梁端受到柱端的约束效应增强,那么柱端弯矩与梁端弯矩将增大。当节点转动是由柱端转动引起时,由于作为柱端转动约束构件的梁抗弯刚度保持某一常量,如果考虑  $p-\delta$  效应后,节点附加转动增大了原节点转角,那么梁端弯矩就会增大,从而使与之相连接的柱端弯矩也相应增加;反之,若节点附加转角减小了节点转角,则梁端约束弯矩减小,而减小与之连接的柱端弯矩。

**关键词:**无侧移单元封闭框架;  $p-\delta$  效应; 二阶附加转角

**中图分类号:**TU375.4 **文献标识码:**A **文章编号:**1006-7329(2006)06-0051-04

## Analysis of $p-\delta$ Effect for Non-sway Cell-closed Frame

LIU Yi, LI Zhan-ping, ZHU Zhan-you, BAI Shao-liang

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

**Abstract:** To figure out the law of the variety of the moment at the end of a column in a non-sway cell-closed frame when the second order  $p-\delta$  effect is under consideration, a rule based on the type of restrain relationship of the beam and the column plus the second order additional rotation of the joint was presented, which was illustrated and verified by the results of typical examples. When the rotation of node is caused by the girder and the rotation is added after  $p-\delta$  effect is considered, thus, the constraint to the beam is weakened, and the moment of girder and column decreases and vice versa. When the rotation of node is caused by column and the rotation is added after  $p-\delta$  effect is considered, since the EI of the beam is invariability, thus the moment of girder and column increases and vice versa.

**Keywords:** non-sway cell-closed frame;  $p-\delta$  effect; second order additional rotation

在无侧移框架中,二阶效应通常只以  $p-\delta$  效应的形式出现,也就是以轴力在已产生了杆件挠曲变形的框架结构中所引起的附加内力和附加变形的形式出现;而不存在竖向力在产生了侧移的结构中引起附加内力和附加侧移,即不存在  $P-\Delta$  效应。因此,无侧移框架中的二阶效应基本规律通常可用图2所示外部静定支承的只承受梁上竖向对称荷载作用的单元封闭框架作为模型进行研究,因为其中可以通过上、下横梁分别作用的荷载大小和方向来调整柱上、下端(也就是相应梁端)一阶端弯矩(即未考虑二阶效应的端弯矩)的大小和比例,并通过梁、柱截面尺寸和梁、柱轴线长度调整上、下节点处的梁、柱线刚度比和柱的长细比。

在无侧移框架的  $p-\delta$  效应规律中,柱端和梁端一阶弯矩受  $p-\delta$  效应影响后的变化规律是整个研究问题中的关键<sup>[1-3]</sup>。虽然到目前为止已通过数值分析<sup>[4]</sup>认识到,当柱受同号弯矩作用,即处于单曲率状态时,  $p-\delta$  效应会同时减小柱两端的一阶弯矩(图1a);当柱受反号端弯矩作用,即进入双曲率状态后,只要距一阶弯矩的完全反对称尚有一定距离,较大柱端弯矩  $M_2$  的绝对值就会继续被  $p-\delta$  效应减小,但较小一阶端弯矩  $M_1$  的绝对值则会被效应  $p-\delta$  增大(图1b);而当柱中一阶弯矩分布已接近反对称状态后,  $M_1$  和  $M_2$  的绝对值又都会被  $p-\delta$  效应所减小(图1c)。但由于上述柱端弯矩变化规律(当然也包括与之平衡的梁端弯矩

\* 收稿日期:2006-05-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(59678035)

作者简介:刘毅(1971-),男,重庆人,博士生,主要从事钢筋混凝土结构研究。

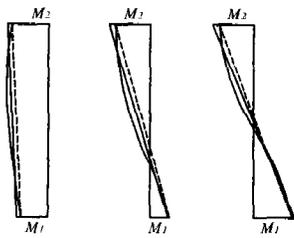


图1 不同  $M_2/M_1$  比值下  $p-\delta$  效应导致的柱端一阶弯矩的变化规律

变化规律)受柱上、下端弯矩比及柱长细比等多种因素影响,至今为止对其变化规律的研究仍仅停留在给出一般趋势性预测的阶段<sup>[5,6]</sup>,尚未见有从定性角度对这一变化规律作理论说明的研究成果发表。

### 1 在单元闭合框架节点处梁、柱端相互约束关系的分类

首先如图2b所示,在静定支承的单元闭合框架的上、下横梁上各作用两个集中力  $P_1$  和  $P_2$  (以向下为正),其作用位置为距梁轴线左端  $0.25L$  和  $0.75L$  处 ( $L$  为梁轴线长度)。下面的考察涉及  $P_2/P_1$  从  $+1.0$  变到  $-1.0$  的各种情况。为了暴露在  $P_2/P_1$  为不同取值情况下受  $P-\delta$  效应影响后柱端一阶弯矩的变化规律,先考察在  $P-\delta$  效应下封闭单元框架下部节点处的梁、柱端相互约束关系随  $P_2/P_1$  的变化规律;其中,始终令  $P_1$  的数值和作用方向保持不变,通过调整比值  $P_2/P_1$  来改变  $P_2$  的大小及作用方向。

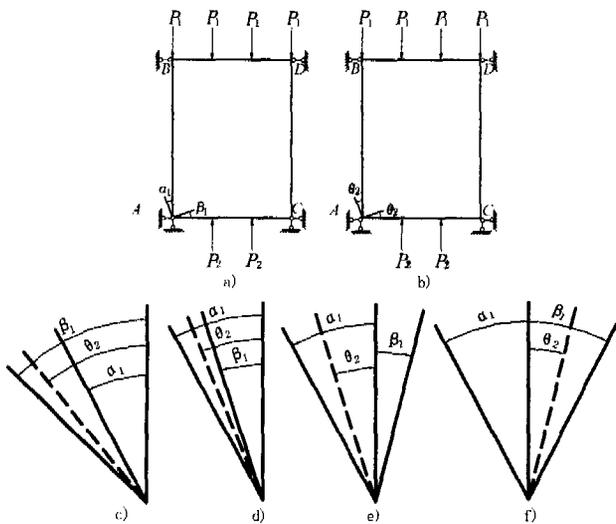


图2 单元闭合框架在考虑  $P-\delta$  效应影响后的下部节点转角  $\theta_2$  与该节点约束释放后梁、柱端自由转角  $\beta_1, \alpha_1$  之间的关系

为了分析下部节点处在比值  $P_2/P_1$  变化过程中梁、柱端的相互约束关系,在图2a中先将单元闭合框架的梁、柱假定为在下节点处铰接,并假定此时作为简支梁的下部横梁在  $P_2$  作用下的无约束梁端自由转角

为  $\beta_1$  (转角以顺时针为正),而柱下端(无约束端)在上部横梁上的  $P_1$  作用下且考虑了  $p-\delta$  效应影响后的自由转角为  $\alpha_1$ 。在  $P_2/P_1$  从  $-1.0$  连续变化到  $1.0$  的过程中,下部简支横梁自由端的转角  $\beta_1$  是从某一最大负值连续变化到某一最大正值;其中,梁、柱端转角均以顺时针为正。又因上横梁的  $P_1$  为定值,柱下端考虑  $p-\delta$  效应后的转角  $\alpha_1$  应始终为一个负的常数。于是在  $P_2/P_1$  的变化过程中,图2b所示梁、柱端自由转角  $\beta_1$  和  $\alpha_1$  与图2a所示单元闭合框架下部节点实际转角  $\theta_2$  之间就可能形成以下三种数量关系:

1) 当  $P_2/P_1$  为负值,且绝对值较大时,由于柱下端自由转角  $\alpha_1$  是由上部节点在  $P_1$  作用下的协调转角引起的柱挠曲变形所形成的远端转角,故  $\alpha_1$  的绝对值必然小于上部梁端自由转角  $\beta_1$  的绝对值;这时,  $\alpha_1, \beta_1$  和  $\theta_2$  之间的关系如图2c所示。由于此时梁端逆时针自由转角  $\beta_1$  大于柱端逆时针自由转角  $\alpha_1$ ,当实现刚接时,只要梁端转角超过  $\alpha_1$  后,其转动就将受到柱端的制约,故梁端最终转角  $\theta_2$  将小于  $\beta_1$ ,而柱端受到梁端转动的强迫带动,其最终转角  $\theta_2$  大于  $\alpha_1$ 。此时推动柱端转角  $\theta_2$  大于其自由转角  $\alpha_1$  的是梁一方,即柱端约束了梁端的转动,我们把这种情况称为“情况A”。

2) 当  $P_2/P_1$  处于负的绝对值较小到正值较小的状态时,梁端的自由转角  $\beta_1$  将相应减小,并可能仍处于逆时针转动状态,但小于柱端自由转角  $\alpha_1$ ,或变为顺时针转动,但转角依然不大。这时,最后形成的节点转角  $\theta_2$  始终为负值,且其绝对值小于  $\alpha_1$ ,见图2d、图2e。可以看出,这时节点的转动  $\theta_2$  更多地是由柱端转动所推动,而受到梁端的制约,也就是梁端约束了柱端的转动。我们称这种情况为“情况B”。

3) 当  $P_2/P_1$  接近其最大正值  $1.0$  时,如图2f所示,梁端的较大顺时针自由转动将把柱端的逆时针转动向顺时针方向扳动,并形成节点的最终顺时针转角  $\theta_2$ ,因此是柱端约束了梁端。我们把这种情况成为“情况C”。

从图2c、d、e、f中可以看出,以上三种情况可以归纳为:当  $\theta_2 < \alpha_1$  时,属于情况A;当  $\alpha_1 < \theta_2 < 0$  时,属于情况B;当  $\theta_2 > 0$  时,属于情况C。

对于单元闭合框架的上部节点也可以采用类似的方法来探讨该处梁、柱的相互约束关系。例如,我们同样可以首先释放上部两个节点的弯矩约束,即设上部横梁与左、右柱为铰接,由于  $P_2$  的绝对值总不会大于  $P_1$ ,因而这时柱上端的自由转角  $\alpha_u$  总比梁自由转角  $\beta_u$  小。当两者均沿顺时针方向转动时,形成与图2c类似的情况(但与图2c中各转角的符号相反);而当柱自由端为逆时针转动时,则形成与图2f类似的情况

(同样,各转角符号与图 2f 相反)。因此,可以判定,上部节点与下部节点的区别是,由于  $|P_1|$  不小于  $|P_2|$ , 所以其最终转动都是主要由梁端转动所促成的,即均属于柱端约束梁端的情况。

## 2 无侧移单元闭合框架的二阶效应规律

在上述情形 A 和 C,即节点转动是由梁端引起、柱约束梁的情形中,考察图 2 所示的单元封闭框架的梁柱下部节点,当考虑柱中轴力在柱中产生  $P-\delta$  效应后,若其二阶转角  $\theta_2$  与一阶转角  $\theta_1$  同向,且绝对值比一阶转角大,即二阶附加转角与一阶转角方向一致时,随着节点转角的增大,柱端对梁端的进一步自由转动的约束作用减小,即柱子对梁端的约束作用减弱,梁端转动由于所受约束减弱,故其弯矩将变小,而柱端弯矩与梁端弯矩相等,因而其弯矩也将变小;反之,当考虑柱中  $P-\delta$  效应后,若其二阶附加转角方向与一阶转角方向相反,即节点转角在一阶转角基础上减小,则梁端受到柱端的约束效应增强,梁端自由转动受到的阻挠作用更大,其端弯矩会相应增大,因而柱端弯矩也将增大。而在情形 B 中,即节点转动是由柱端转动引起的,梁作为柱端转动的约束构件,由于不考虑梁中存在的轴力在梁中引起的二阶效应、即梁的抗弯刚度保持

某一常量,因此在作单元框架的二阶分析后,如果节点附加转动与一阶转动方向一致,增大节点转角,梁端转角的增大会相应增大梁端弯矩,从而使与之相连接的柱端弯矩也相应增加;反之,在这种情形下,若节点附加转角与一阶转角方向相反,减小节点转角的大小,则梁端约束弯矩减小,而减小与之连接的柱端弯矩。

## 3 算例验证分析

为了更清晰地展示上述单元封闭框架二阶效应规律,也为了考察在情形 A、B 和 C 下,梁柱节点转角考虑二阶效应前后变化的一般规律,本文设计了图 2 所示的钢筋混凝土单元封闭框架,为了使二阶效应更明显,取柱的高度为 8 000 mm,截面为 400 mm  $\times$  400 mm;而梁跨取为 6 000 mm,截面 250 mm  $\times$  500 mm;将上梁跨中 0.25  $L$  及 0.75  $L$  处作用的集中荷载  $P_1$  取为 1 000 kN,下梁跨中荷载  $P_2$  在 -1000 kN 及 1 000 kN 之间变化,利用 SAP2000 分别求得其柱下端弹性一阶弯矩  $M_1$  及转角  $\theta_1$  和弹性二阶弯矩  $M_2$  及转角  $\theta_2$ ,以及利用图 2 中下梁与柱铰接模型,如图 3 所示,用 SAP2000 作弹性二阶分析求得柱下端转角  $\alpha$  及有关数据及分析列于表 1 中。

表 1 单元封闭框架算例的有关数据

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
序号	$P_2$	$\theta_1$	$M_1$	$\theta_2$	$M_2$	$\alpha$	情形	$\theta_2/\theta_1$	$M_2/M_1$	
1	-1 000	-0.038 332	507.43	-0.041 514	438.86	-0.019 730	$\theta_2 < \alpha$	A	1.083 012	0.864 868
2	-900	-0.035 322	438.95	-0.038 316	374.43	-0.019 730	$\theta_2 < \alpha$	A	1.084 763	0.853 013
3	-800	-0.032 312	370.47	-0.035 118	310.01	-0.019 730	$\theta_2 < \alpha$	A	1.086 841	0.836 802
4	-700	-0.029 302	301.99	-0.031 920	245.58	-0.019 730	$\theta_2 < \alpha$	A	1.089 345	0.813 206
5	-600	-0.026 292	233.51	-0.028 722	181.15	-0.019 730	$\theta_2 < \alpha$	A	1.092 424	0.775 77
6	-500	-0.023 282	165.03	-0.025 524	116.72	-0.019 730	$\theta_2 < \alpha$	A	1.096 298	0.707 265
7	-400	-0.020 272	96.54	-0.022 326	52.3	-0.019 730	$\theta_2 < \alpha$	A	1.101 322	0.541 744
8	-319.61	-0.017 853	41.49	-0.019 755	0.5	-0.019 730	$\theta_2 < \alpha$	A	1.106 537	0.012 051
9	-300	-0.017 262	28.06	-0.019 128	-12.13	-0.019 730	$\alpha < \theta_2 < 0$	B	1.108 099	-0.432 29
10	-200	-0.014 252	-40.42	-0.015 930	-76.56	-0.019 730	$\alpha < \theta_2 < 0$	B	1.117 738	1.894 112
11	-100	-0.011 243	-108.9	-0.012 732	-140.99	-0.019 730	$\alpha < \theta_2 < 0$	B	1.132 438	1.294 674
12	0	-0.008 233	-177.38	-0.009 340	-205.41	-0.019 730	$\alpha < \theta_2 < 0$	B	1.134 459	1.158 022
13	100	-0.005 223	-245.86	-0.006 336	-269.84	-0.019 730	$\alpha < \theta_2 < 0$	B	1.213 096	1.097 535
14	200	-0.002 213	-314.34	-0.003 137	-334.27	-0.019 730	$\alpha < \theta_2 < 0$	B	1.417 533	1.063 403
15	250	-0.000 708	-348.58	-0.001 538	-366.48	-0.019 730	$\alpha < \theta_2 < 0$	B	2.172 316	1.051 351
16	290	0.000 496	-375.98	-0.000 259	-392.25	-0.019 730	$\alpha < \theta_2 < 0$	B	-0.522 18	1.043 274
17	300	0.000 797	-382.82	0.000 061	-398.69	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	0.076 035	1.041 456
18	400	0.003 807	-451.31	0.003 259	-463.12	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	0.856 055	1.026 168
19	500	0.006 817	-519.79	0.006 457	-527.55	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	0.947 191	1.014 929
20	600	0.009 827	-588.28	0.009 655	-591.98	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	0.982 497	1.006 29
21	650	0.011 332	-622.51	0.011 254	-624.19	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	0.993 117	1.002 699
22	675	0.012 084	-639.63	0.012 053	-640.3	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	0.997 435	1.001 047
23	688	0.012 476	-648.53	0.012 469	-648.67	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	0.999 439	1.000 216
24	700	0.012 837	-656.75	0.012 853	-656.4	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	1.001 246	0.999 467
25	800	0.015 847	-725.23	0.016 051	-720.83	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	1.012 873	0.993 933
26	900	0.018 857	-793.71	0.019 249	-785.26	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	1.020 788	0.989 354
27	1 000	0.021 867	-862.19	0.022 447	-849.68	-0.019 730	$\theta_2 > 0$	C	1.026 524	0.985 49

表中的第8列是根据计算出来的 $\alpha$ 、 $\theta_2$ 的值,给出了它们的大小及正负关系,并在第9列判别出节点梁、柱间相互约束类型。而在第10列给出 $\theta_2/\theta_1$ 的值,也就是考察梁柱节点的二阶转角与一阶转角相比是增加了还是减小了。这样,在约束情况属于A和C(即柱约束梁)时,如果 $\theta_2/\theta_1$ 大于1,根据前面提出的规律,柱端二阶弯矩应比一阶弯矩减小,第11列中的 $M_2/M_1$ 应小于1;而当 $\theta_2/\theta_1$ 小于1时, $M_2/M_1$ 应大于1,柱端弯矩增加;观察表内第11列的真实计算值可以发现,这一规律的符合情况是非常令人满意的。而在情形B中,即梁约束柱的类型中,随着下部梁上作用的荷载向上作用的 $P_2$ 逐渐减少至0,再反向向下作用的过程中, $\theta_1$ 绝对值一直在减少,而 $\theta_2$ 一直在 $\theta_1$ 的基础上往逆时针方向转动,直到 $P_2$ 为290 kN时, $\theta_1$ 为正值,而 $\theta_2$ 为负值,随着转角增大,柱端二阶弯矩也应是比一阶弯矩大,而第10列的 $M_2/M_1$ 也正大于1( $P_2 = -300$  kN时, $M_2$ 是在 $M_1$ 的基础上反方向增大,故两者比值为负值)。这个典型的例子也有力地证实了本文提出的柱端弯矩和节点转角在考虑 $p-\delta$ 效应后的变化规律。图3所示的坐标系中,以节点转角为横坐标 $x$ ,通过技术处理,在坐标系中分别绘出了节点一阶转角 $\theta_1$ 、二阶转角 $\theta_2$ 以及柱端一阶弯矩 $M_1$ 、柱端二阶弯矩 $M_2$ 四个系列。从图中可以更清晰直观地反映出柱端弯矩和节点转角的变化趋势。

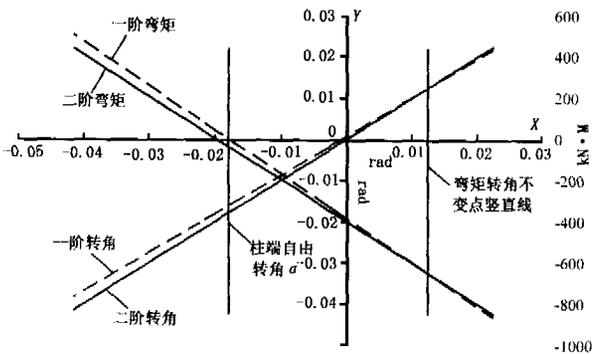


图3 节点二阶转角、一阶转角、二阶弯矩及一阶弯矩之间的关系

在图3所示的坐标平面中,横坐标上柱端自由转角 $\alpha$ 以及节点转角零点( $x=0$ )的两条竖直线将整个坐标平面划分为三部分,在直线 $x=\alpha$ 以左,属于情形A,柱约束梁,随着节点二阶转角比一阶转角加大,可以清楚地看出,柱端二阶弯矩比一阶弯矩减小;而在 $x=\alpha$ 与纵坐标轴之间,属于梁约束柱的B情形,随着二阶转角比一阶转角的加大,二阶弯矩比一阶弯矩增大,

当然这里指的都是绝对值;在纵坐标以右,属于柱约束梁的情形C,可以看出,在初始阶段,二阶转角还是在一阶转角的基础上逆时针回转了一点,造成二阶转角比一阶转角小,二阶弯矩绝对值比一阶弯矩绝对值大;而在后期,随着向下作用的 $P_2$ 逐渐增大,二阶转角大于一阶转角,相应柱端二阶弯矩绝对值比一阶弯矩绝对值小;而在这其过程中必有一个临界点,即节点转角在考虑二阶效应后没有变化,弯矩也没有变化;图中给出了过一、二阶转角线交点(或一、二阶弯矩交点)的竖直线,称其为弯矩转角不变点竖直线。

#### 4 结论

从前面的理论上的分析以及算例分析结果的验证,都可以证实本文提出的无侧移单元封闭框架二阶效应规律是成立的,这个规律可以简单概括为:

情形A:如图2c),当 $\theta_2 < \alpha$ 时,节点转动是由梁引起,柱约束了梁的自由转动。若节点二阶附加转角方向与一阶转角方向相同,则梁、柱端弯矩减小,反之则增大;

情形B:如图2d和图2e,当 $\alpha < \theta_2 < 0$ 时,节点转动由柱引起,梁约束了柱的自由转动。若节点二阶附加转角方向与一阶转角方向相同,则梁、柱端弯矩增大,反之则减小。

情形C:如图2f),当 $\theta_2 > 0$ 时,节点转动由梁引起,柱约束了梁的自由转动。若节点二阶附加转角方向与一阶转角方向相同,则梁、柱端弯矩减小,反之则增大。

#### 参考文献:

- [1] 李新荣,秦文钺,白绍良. 两端不等偏心距钢筋混凝土柱二阶效应试验研究[J]. 重庆建筑大学学报,2000,22(S0):41-46.
- [2] 李新荣. 不等偏心距钢筋混凝土铰接柱二阶效应计算方法的试验研究[D]. 重庆:重庆建筑工程学院,1984.
- [3] 余文军. 无侧移框架柱的二阶效应及设计方法研究[D]. 重庆:重庆建筑工程学院,1992.
- [4] 刘少勇. 钢筋混凝土单元封闭框架二阶效应分析[J]. 重庆:重庆建筑工程学院,1988.
- [5] 高晓莉. 钢筋混凝土框架柱二阶效应使用设计方法研究[D]. 重庆:重庆建筑大学,1996.
- [6] 王志军. 钢筋混凝土铰支柱和框架柱二阶效应及稳定问题研究[D]. 重庆:重庆建筑大学,1996.