

# 局部单双层网壳的初步优化

肖建春, 刘家坤, 苟卡西, 韩志刚, 马克俭

(贵州大学空间结构研究中心, 贵州 贵阳 550003)

**摘要:**局部单、双层网壳结构的设计涉及截面、形状和拓扑优化。为满足初步设计对计算效率的要求,采用均匀设计法来实现结构的多级别优化。实验设计使用现有的网壳结构设计软件,对计算结果进行回归分析,得到指标(用钢量、变形、基频和最小非线性屈曲荷载)与变量(网壳矢高、单层部分范围和单层部分杆件设计应力比)之间的近似函数关系。求解简单的规划问题,得到变量之间的最优水平组合。一个点支承六边形局部单、双层网壳的比较设计说明了方法的效率和可靠性。

**关键词:**结构优化;参数分析;实验设计;局部单、双层网壳

中图分类号:TU12;TU394 文献标志码:A 文章编号:1006-7329(2008)04-0058-07

## Preliminary Optimization of Partial Single-layer Reticulated Shells Based on Uniform Design

XIAO Jian-chun, LIU Jia-kun, GOU Ka-xi, HAN Zhi-gang, MA Ke-jian

(Research Center of Space Structures, Guizhou University, Guiyang 550003, P. R. China)

**Abstract:** Size, shape and topology optimizations are involved in the structural design of partial single-layer reticulated shells. To meet the requirements of computation efficiency during preliminary design, a uniform design method was adopted to achieve multi-level optimization. Only existing software packages for reticulated shells were used in the experiment design. By regressing the computing data, approximate functional relations between the indexes (steel weight, deflections, basic frequency, and minimal nonlinear buckling load) and variables (rise of the shell, single-layer area, and design stress ratio for single-layer members) were obtained. The best combination of the variables was acquired by solving a simple programming problem. Comparative design of a multipoint-supported hexagonal reticulated shell verified the efficiency and reliability of this approach.

**Key words:** structural optimization; parametric analysis; uniform design; partial single-layer reticulated shells

局部单、双层网壳是基于等强度壳而提出的:网壳在等强度壳体的较薄区域被设置成单层,在较厚区域采用上、下弦层曲率相等的双层,在单、双层交接处建立刚度渐变区。其结构构造具有规律性,室内视觉良好,且经济性较高,在工程中已有应用<sup>[1]</sup>。

局部单、双层网壳的研究集中在结构组成与受力性能分析,特别是稳定和极限承载力方面<sup>[1-5]</sup>。这类结构的设计涉及截面、形状和拓扑优化。截面优化最简单,方法很完善。形状优化方法在文[6]中作了详细评述。多数方法在优化之前要根据经验确定部分几何参数<sup>[6-8]</sup>。拓扑优化寻求合理的布局。就局部单、双层网

壳而言,主要寻求单层的布置区域。

已提出多种方法来解决多级别优化问题<sup>[9-14]</sup>,其中文[13,14]给出方法的基础是实验设计。利用计算机做计算实验,根据实验设计理论对计算结果进行分析,得到设计变量之间的最优水平组合。实验设计方法相对简单,容易被设计人员接受。文[13]依据正交实验法编制计算程序来求解平面桁架的优化问题。算例最大节点数22个,使用一个 $L_{54}(2^1 \times 3^{25})$ 和两个 $L_{81}(3^{40})$ 正交表,一次迭代的计算次数约200次。文[14]采用0.618法和穷举法确定柱面网壳的最优网格尺寸和厚度。

\* 收稿日期:2008-01-18

基金项目:贵州省优秀科技教育人才省长专项资金项目(黔省专合字 200625)

作者简介:肖建春(1967-),男,贵州大学教授,博士,主要从事钢结构与空间结构研究。(E-mail)ca.jcxiao@gzu.edu.cn

马克俭(1933-),男,中国工程院院士,博士生导师。(Tel)0851-4730276,(E-mail)makejian2002@163.com

欢迎访问重庆大学期刊网 <http://qks.cqu.edu.cn>

在初步设计阶段,确定结构基本参数的简单易行方法尤为重要。为满足这一要求,根据结构组成特点采用计算实验次数较少的均匀设计法来实现局部单、双层网壳的多级别优化的近似解。

## 1 分析处理及过程

本实验设计目的之一是通过有限次的实验来找到最优水平组合。实验设计对参数的量级、量纲没有要求,且可以考虑参数之间的交互作用。实验设计法中的均匀设计法由我国学者方开泰和王选教授最先提出<sup>[15]</sup>,具有实验次数少、可考虑的参数及水平多、实验点分布均匀等优点。对实验结果进行回归分析可以揭示出实验指标与各参数之间的内在关系,并得到近似最优解。该方法适合于多参数、多水平的实验设计。

设有  $s$  个参数,各有  $q$  个水平,如果做全面试验共有  $q^s$  种水平组合,这些组合构成  $s$  维欧氏空间的  $q^s$  个点。取自然数  $a_1, a_2, \dots, a_s$ ,使得

$$(a_i, q) = 1, \quad i = 1, \dots, s \quad (1)$$

均匀设计的布点为:

$$P_n(k) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_s) \pmod{q}; k = 1, \dots, q \quad (2)$$

采用均匀设计法来进行结构的参数分析并实现近似优化,以减少计算工作量,提高分析效率。计算实验用网壳设计软件来实现,并用结构通用软件进行复核,回归分析用 Microsoft Excel 来完成,近似优化的条件极值问题用 Matlab 软件实现。在计算实验过程中需要多次建立计算模型,网壳设计软件利用网壳的网格构成规律,通过修改初始参数、更改坐标、增加或删除杆件等方法来实现,加快计算实验的速度。分析处理如下:

1) 布局优化考虑单层部分的布置范围。几何外形优化考虑矢高、网格尺寸和双层部分的网壳厚度。

2) 优化考虑的是在满足强度、刚度、振动和稳定等要求时工程造价最低的问题。现有网壳设计软件只能进行构件的满应力优化设计,计算结果满足构件的强度和稳定要求,但不一定满足结构的变形、自振频率和最小非线性屈曲荷载等要求。为了简单,在进行参数分析时仅考虑造价、变形、基频和最小非线性屈曲荷载等指标;在确定最优水平组合时采用工程造价最低作为计算准则,刚度和稳定按约束条件考虑,基频仅作设

计参考。指标分析的参照结构为网壳设计软件在完成满应力优化后的模型。

3) 认为支承结构不变且满足所有计算模型的设计要求,工程造价指标以网壳用钢量  $G$  近似替代。

4) 双层网壳的设计主要由强度控制,单层网壳的设计主要由稳定控制。对于局部单、双层网壳而言,单层部分的布置范围和构件材料设计应力折减系数对指标影响明显。在确定参照结构时单层部分杆件采用相同的杆件材料设计应力折减系数,双层不折减。

5) 为使计算结果具有规律性,在材料库中杆件、节点的极差小且尽可能均匀。

6) 参数之间的交互作用在回归分析中考虑。

主要步骤有:

1) 确定单层部分的可能布置区域。

2) 确定实验参数,如矢高  $h$ 、网格尺寸  $D$ 、双层网壳厚度  $t$ 、单层网壳材料的设计应力折减系数  $\rho$  和单层部分的布置范围  $R$  等。

3) 确定参数的变化范围。

4) 确定各参数的水平数及水平,制定参数水平表。

5) 选择适当的均匀设计表,制订计算实验方案。

6) 进行计算实验。

7) 对数据进行回归分析,得到各实验指标与参数之间的函数关系。

8) 进行以用钢量为优化准则的条件极值分析,找出满足规范要求的各参数之间的最理想水平组合,实现近似优化。

该方法运用计算机软件包做计算实验,是一种实验设计方法,不需要迭代计算。

## 2 单层部分的可能布置区域

单层部分在网壳中的可能布置区域可以根据对应壳体或单层网壳的应力分布图来确定。使用自编软件包 PLAScad 可以方便地确定单层网壳的应力分布图。图 1 是两种形式的点支承单层网壳在竖向均布荷载作用下的应力图。图中的应力大小用实线粗细表示,应力较小范围用虚线框围起。虚线框即为单层部分可能布置区域的外圈形状。

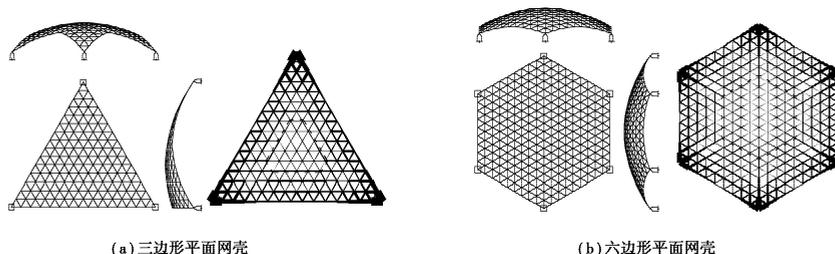


图 1 单层部分的可能布置区域

### 3 其他步骤的实施及算例

为详细说明其余步骤,下面以某工程为例进行讨论。

#### 3.1 工程说明

图2为6点铰支承的正高斯曲率网壳,铰支座离地面10 m,结构平面投影呈正六边形,边长40 m,最大对角线长 $L=80$  m。网壳曲面方程

$$z = -\frac{x^2 + y^2}{a} \quad (3)$$

空间直角坐标系的坐标原点在网壳中央, $z$ 为竖向坐标。 $a$ 为系数,根据建筑要求, $60 \leq a \leq 140$ 。

为简单起见,不考虑 $D$ 和 $t$ 两个变量。网壳采用三向网格,平面投影的一边划分成12格。双层网壳厚度2.5 m。初步设计的荷载标准值:覆盖层荷载 $0.2$  kN/m<sup>2</sup>,活载 $0.5$  kN/m<sup>2</sup>,基本风压 $0.35$  kN/m<sup>2</sup>。不考虑雪载、积水荷载和地震作用。活载、风载分别按竖向和法向均布力考虑。荷载等效作用在节点上。

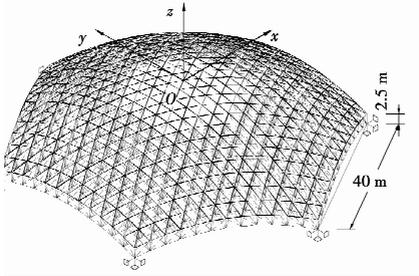


图2 计算模型之一

荷载组合:(1)1.2静;(2)1.2静+1.4活(均布);(3)1.2静+1.4活(半跨);(4)1.2静+1.4风;(5)1.2静+1.4活(均布)+0.8风。

网壳杆件由设计软件自动优化。构件的满应力优化时单层部分按刚接、双层部分按铰接处理。最小非线性屈曲荷载计算根据《网壳结构技术规程 JGJ61—2003》要求进行几何非线性分析。计算工具采用 PLAScad, 复核软件为商用软件包 MSTcad 和 ANSYS。

#### 3.2 实验设计及实验结果

实验选取的参数有单层网壳材料的设计应力折减系数 $\rho$ 、单层部分的布置范围 $R$ 和 $a$ ,其中 $R$ 简单地用单层外圈一边的网格数 $k$ 表示。表1为参数水平表。

表1 参数水平表

| 序号 | 参数     |     |     |
|----|--------|-----|-----|
|    | $\rho$ | $k$ | $a$ |
| 1  | 1.0    | 2   | 60  |
| 2  | 0.8    | 4   | 80  |
| 3  | 0.6    | 6   | 100 |
| 4  | 0.4    | 8   | 120 |
| 5  | 0.2    | 10  | 140 |

选用网站 <http://www.math.hkbu.edu.hk/UniformDesign> 提供的实验次数为15的均匀设计表 $U_{15}(5^3)$ ,其 $CD_2$ 偏差为0.013 149。

计算实验方案及结果见表2。表中 $w_{up,max}$ 、 $w_{down,max}$ 分别为网壳最大向上、向下位移; $\lambda$ 为最小非线性屈曲荷载系数,1.0恒载+1.0活载时 $\lambda=1.0$ ;  $f$ 为基频。

表2 计算实验

| 实验次数 | 参数组合   |       |        | 结果      |                 |                   |           |         |
|------|--------|-------|--------|---------|-----------------|-------------------|-----------|---------|
|      | $\rho$ | $k$   | $a$    | $G/t$   | $w_{up,max}/mm$ | $w_{down,max}/mm$ | $\lambda$ | $f/Hz$  |
| 1    | 1.0(1) | 6(3)  | 140(5) | 132.071 | 7.4             | 51.2              | 2.6546    | 1.6554  |
| 2    | 1.0(1) | 2(1)  | 60(1)  | 184.883 | 2.1             | 23.5              | 17.427 0  | 1.247 3 |
| 3    | 0.6(3) | 4(2)  | 80(2)  | 158.558 | 1.1             | 27.9              | 8.554 6   | 1.530 3 |
| 4    | 0.6(3) | 10(5) | 60(1)  | 97.808  | 3.4             | 23.8              | 7.034 5   | 1.379 8 |
| 5    | 0.8(2) | 4(2)  | 100(3) | 152.118 | 1.3             | 35.7              | 5.991 9   | 1.629 6 |
| 6    | 0.4(4) | 8(4)  | 80(2)  | 121.217 | 0.9             | 25.9              | 9.215 6   | 1.648 0 |
| 7    | 0.2(5) | 6(3)  | 60(1)  | 163.377 | 1.7             | 20.1              | 27.601 0  | 1.298 8 |
| 8    | 0.4(4) | 4(2)  | 120(4) | 152.199 | 0.2             | 37.3              | 9.660 6   | 1.655 3 |
| 9    | 0.8(2) | 8(4)  | 80(2)  | 118.031 | 1.5             | 26.7              | 6.262 4   | 1.658 9 |
| 10   | 0.2(5) | 10(5) | 140(5) | 137.214 | 3.9             | 51.5              | 10.664 0  | 1.636 4 |
| 11   | 0.4(4) | 6(3)  | 120(4) | 138.227 | 0.5             | 37.0              | 7.857 9   | 1.676 3 |
| 12   | 1.0(1) | 10(5) | 100(3) | 83.565  | 5.1             | 45.0              | 3.605 7   | 1.843 1 |
| 13   | 0.8(2) | 8(4)  | 120(4) | 110.336 | 4.8             | 46.3              | 3.525 3   | 1.751 1 |
| 14   | 0.2(5) | 2(1)  | 100(3) | 164.187 | 0.4             | 32.3              | 15.968 0  | 1.594 6 |
| 15   | 0.6(3) | 2(1)  | 140(5) | 158.774 | 4.6             | 48.4              | 4.109 5   | 1.610 5 |

### 3.3 回归与参数分析

利用 Excel 对表 2 计算实验数据进行回归分析,得到近似函数关系式(为方便分析暂时将  $k$  看成实数):

$$\begin{aligned}
G &= 178.626\ 332\ 990\ 8 - 164.507\ 173\ 172\ 6\rho + 12.069\ 609\ 606\ 6k + 1.123\ 286\ 991\ 6a \\
&+ 328.493\ 831\ 876\ 0\rho^2 - 3.182\ 997\ 754\ 4k^2 - 0.020\ 908\ 887\ 6a^2 - 3.883\ 671\ 609\ 1\rho k \\
&+ 0.037\ 964\ 841\ 1ka - 0.405\ 535\ 656\ 2\rho a - 155.326\ 475\ 651\ 3\rho^3 + 0.135\ 277\ 377\ 4k^3 \\
&+ 0.000\ 094\ 904\ 6a^3 \\
w_{up,max} &= 26.109\ 366\ 713\ 9 - 8.935\ 715\ 330\ 5\rho - 2.986\ 635\ 828\ 0k - 0.347\ 869\ 843\ 0a \\
&- 1.009\ 166\ 081\ 0\rho^2 + 0.217\ 201\ 195\ 9k^2 + 0.000\ 971\ 316\ 9a^2 + 0.306\ 382\ 577\ 7\rho k \\
&+ 0.008\ 915\ 340\ 9ka + 0.151\ 765\ 033\ 1\rho a - 2.648\ 992\ 589\ 5\rho^3 - 0.003\ 825\ 071\ 2k^3 \\
&+ 0.000\ 001\ 433\ 7a^3 \\
w_{down,max} &= 50.530\ 011\ 624\ 5 - 23.772\ 496\ 996\ 5\rho - 4.441\ 446\ 837\ 5k - 0.552\ 175\ 506\ 7a \\
&+ 15.132\ 999\ 990\ 5\rho^2 - 0.160\ 353\ 841\ 4k^2 + 0.006\ 114\ 841\ 0a^2 + 0.026\ 374\ 603\ 4ka \\
&+ 0.313\ 442\ 130\ 7\rho a - 15.441\ 921\ 557\ 2\rho^3 + 0.035\ 476\ 338\ 1k^3 - 0.000\ 021\ 150\ 5\ a^3 \\
\lambda &= 119.318\ 988\ 592\ 3 - 93.751\ 841\ 469\ 9\rho - 2.310\ 360\ 045\ 7a + 107.353\ 594\ 471\ 2\rho^2 \\
&+ 0.020\ 600\ 659\ 7a^2 + 0.004\ 123\ 151\ 3ka - 0.025\ 263\ 431\ 7\rho a - 36.510\ 890\ 097\ 5\rho^3 \\
&- 0.008\ 797\ 772\ 4k^3 - 0.000\ 062\ 141\ 2a^3 \\
f &= -1.318\ 280\ 397\ 3 + 0.704\ 216\ 744\ 0\rho - 0.070\ 872\ 642\ 6k + 0.069\ 788\ 201\ 2a \\
&- 1.370\ 578\ 116\ 0\rho^2 + 0.016\ 796\ 836\ 1k^2 - 0.000\ 539\ 357\ 7a^2 + 0.015\ 682\ 281\ 2\rho k \\
&- 0.000\ 088\ 697\ 8ka + 0.755\ 147\ 829\ 2\rho^3 - 0.000\ 921\ 571\ 1k^3 + 0.000\ 001\ 350\ 8a^3
\end{aligned} \tag{4}$$

回归的基本数据见表 3。 $\lambda$  的标准误差超出了结构设计的要求(按规范 JGJ61—2003 规定  $\lambda$  最小控制值 5, 标准误差约为该值的 36.62%)。标准误差产生的主要原因,一是多项式还存在阶次更高的项,需要采用运行次数更多的均匀设计表;二是结构计算(特别是非线性计算)存在误差;三是  $R$  用单层外圈一边的网格数  $k$  表示也影响到计算结果。指标变化幅度太大是标准误差超出结构设计要求的另一个原因(如在这 15 次实验中  $\lambda$  的最大值为最小值的 10.4 倍)。尽管如此,回归公式的全相关系数都很高,说明式(4)还是正确地给出了指标与参数(包括参数的交互作用)之间的关系。

根据式(4)可以画出  $\rho$  分别为 1.0, 0.6, 0.2 时指标与参数  $k, a$  之间的关系图(图 3)。从图中可以看出指标与参数  $k, a$  之间的变化关系。

### 3.4 近似优化与设计检验

对于给定的  $a$ , 参数最优组合问题归结为下列条件极值问题:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize } G \\
&\left\{ \begin{aligned}
&w_{up,max} \leq L/400 = 200 \\
&w_{down,max} \leq L/400 = 200 \\
&\lambda \geq 5 \\
&0.2 \leq \rho \leq 1.0 \\
&60 \leq a \leq 140 \\
&2 \leq k \leq 10 \\
&k \in \text{Integers}
\end{aligned} \right. \tag{5}
\end{aligned}$$

其中约束条件  $w_{up,max}$ 、 $w_{down,max}$  和  $\lambda$  根据规范 JGJ 61—2003 要求确定。利用 Matlab 计算  $k$  分别为 4, 5, 6 的最小值问题,得到供初步设计使用的条件解(表 4)。设计检验的结果也列于该表中。

表 3 回归统计的基本数据

|                  | $G$  | $w_{up,max}$ | $w_{down,max}$ | $\lambda$ | $f$      |
|------------------|--|--------------|----------------|-----------|----------|
| 全相关系数            | 0.998 93   | 0.999 88     | 0.998 04       | 0.986 22  | 0.996 13 |
| 标准误差 $\sigma$    | 3.407  | 0.088        | 1.463          | 1.831     | 0.031    |
| $F$              | 77.690 3   | 687.551 8    | 69.297 3       | 19.742 2  | 35.063 3 |
| Significance $F$ | 0.012 8  | 0.001 5      | 0.002 5        | 0.002 2   | 0.006 9  |
| 参数显著性顺序          | $k^2, \rho^2, \rho, \rho^3, \rho a, k, ka, a, \rho a, ka, k, k^3, k^3, \rho, a, a, a^2, a^3, k^3, k^3, \rho a, \rho k, ka, k^2, \rho, \rho k, k^3, \rho, a^3, a^2, a, a^2, a^3, \rho^2, k^2, \rho^3, \rho^2, \rho, k, a^3, a^2, a, a^2, \rho^3, a^3, \rho^2, \rho^3, k^2, \rho^2, \rho^3, ka, \rho a, k, \rho k, ka$ |              |                |           |          |

表 4 极值问题的解答及设计检验

| $k$ | 极值问题(3)的条件解 |        | 对比情况    |         |                 |       |                   |        |              |          |
|-----|-------------|--------|---------|---------|-----------------|-------|-------------------|--------|--------------|----------|
|     | $a$         | $\rho$ | $G/t$   |         | $w_{up,max}/mm$ |       | $w_{down,max}/mm$ |        | $\lambda/Hz$ |          |
|     |             |        | 式(4)数据  | 设计结果    | 式(4)数据          | 设计结果  | 式(4)数据            | 设计结果   | 式(4)数据       | 设计结果     |
| 4   | 115.583     | 0.605  | 147.791 | 148.632 | 1.489           | 1.310 | 32.866 9          | 39.528 | 40.130       | 5.605 87 |
| 5   | 120.401     | 1.000  | 137.365 | 139.659 | 3.405           | 3.209 | 40.686 8          | 43.529 | 44.551       | 6.7561 8 |
| 6   | 118.959     | 1.000  | 127.392 | 130.201 | 3.621           | 3.571 | 48.598 3          | 43.043 | 44.379       | 6.524 3  |

对比的四个设计指标 (特别是  $G$ 、 $w_{up, max}$  和  $w_{down, max}$ ) 各自的误差很小。  $k=5$  时, 二阶旋转法结果<sup>[16]</sup> :

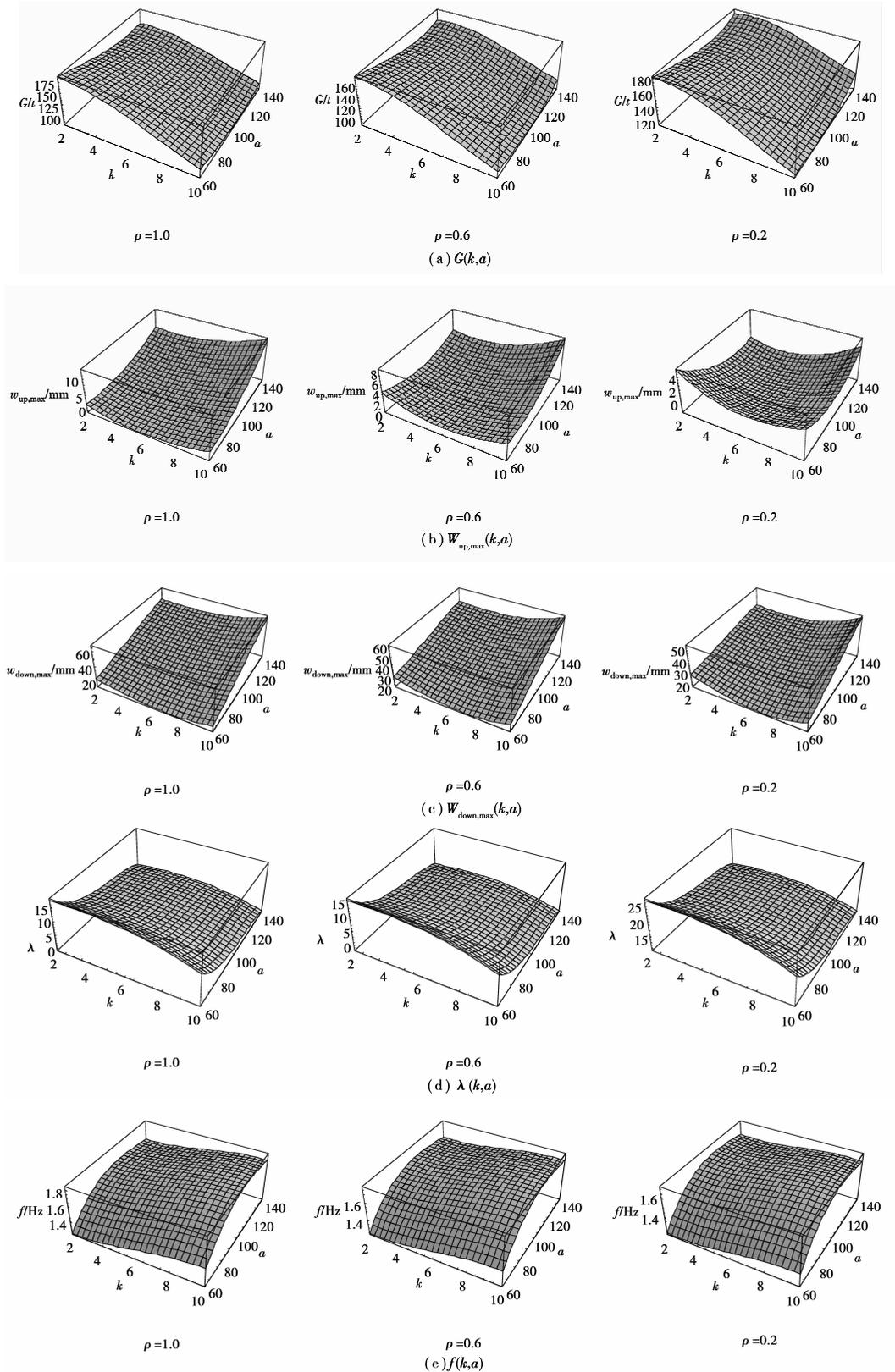


图 3 当  $\rho=1.0, 0.6, 0.2$  时指标与  $k, a$  之间的关系

$$\begin{cases} a = 120.521 \\ \rho = 0.995 \end{cases}$$

(6)

可以看出, 二阶旋转法的结果与表 4 相差很小。进一步说明给出的初步设计参考值可靠。

## 4 结 论

基于等强度理论而形成的局部单、双层网壳结构具有良好的经济性。这类结构的设计参数的确定属多级别优化问题,通常方法实施困难。

提出的采用实验设计的均匀设计法来进行结构的参数分析与近似优化,可以满足结构初步设计的需要。该方法计算次数较少,过程比较简单,容易实施,缺点是每一次计算前需人工干预调整参数。此外计算可以全部使用现有的软件来完成,省去了复杂的计算机程序编制工作。

点支承六边形局部单双层网壳的分析给出了网壳用钢量、结构位移、基频和最小非线性屈曲荷载系数与三个主要设计参数(网壳矢高、单层部分范围和单层部分杆件设计应力比)之间的近似函数关系,找出了满足规范要求的各参数之间的最优水平组合(即初步设计参考值)。以前的任何分析方法不能给出如此详细的数值关系。

## 参考文献:

- [1] 陈务军,董石麟,付功义. 大型局部双层网壳的体系及稳定性研究[J]. 建筑结构学报, 2005, 26(1): 1-10.  
CHEN Wu-jun, DONG Shi-lin, FU Gong-yi. Structural formation and stability performance investigations of large partial double layer reticulated shell structures [J]. Journal of Building Structures, 2005, 26(1): 1-10.
- [2] 付功义,陈务军,董石麟. 大矢跨比球面网壳局部双层形式及稳定性分析[J]. 建筑结构学报, 2002, 23(3): 76-84.  
FU Gong-yi, CHEN Wu-jun, DONG Shi-lin. Formation and buckling performance investigations on partial double-layer reticulated spherical domes of high rise/span ratio [J]. Journal of Building Structures, 2002, 23(3): 76-84.
- [3] CHEN W J, HE Y L, FU G Y, et al. Stability analysis of the partial double-layer forms derived from the complete double-layer reticulated dome[J]. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 2001, 42(137): 117-127.
- [4] 陈务军,董石麟,付功义. 周围双层中部单层球面网壳的稳定性分析[J]. 上海交通大学学报, 2002, 36(3): 436-440.  
CHEN Wu-jun, DONG Shi-lin, FU Gong-yi. Stability analysis for the central-single-layer and peripheral-double-layer reticulated spherical domes [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University. 2002, 36(3): 436-440.
- [5] 韩庆华,刘锡良,陈志华. 周边双层中部单层球面网壳结构的特征值屈曲分析及其极限承载力[J]. 建筑结构学报, 2002, 23(3): 69-74, 83.  
HAN Qing-hua, LIU Xi-liang, CHEN Zhi-hua. Eigen-

buckling analysis and ultimate bearing capacity of the central-single-layer and peripheral-double-layer reticulated dome[J]. Journal of Building Structures, 2002, 23(3): 69-74, 83.

- [6] HAFTKA R T, GRANDHI R V. Structural shape optimization-a survey[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1986, 57: 91-106.
- [7] OHSAKI M, NAKAMURA T, KOHIYAMA M. Shape optimization of a double-layer space truss described by a parametric surface [J]. International Journal of Space Structures, 1997, 12(2): 109-119.
- [8] HAFTKA R T. Improved computational approach for multilevel optimum design [J]. Journal of Structural Mechanics, 1984, 12(2): 245-261.
- [9] LIN C Y, CHOU J N. A two-stage approach for structural topology optimization[J]. Advances in Engineering Software. 1999, 30: 261-271.
- [10] LI G, ZHOU R G, DUAN L, et al. Multiobjective and multilevel optimization for steel frames[J]. Engineering Structures. 1999, 21: 519-529.
- [11] UMESHA PK, VENURAJU M T, HARTMANN D, et al. Optimal design of truss structures using parallel computing[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2005, 29(4): 285-297.
- [12] ERBATUR F, HASANCEBI O, TUTUNCU I, et al. Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms [J]. Computers and Structures. 2000, 75(2): 209-224.
- [13] 杨冬梅,室津义定,西野仁贵. 基于实验设计法的桁架结构几何优化[J]. 力学与实践, 1999, 21(6): 37-40.  
YANG Dong-mei, MUROTUS Y, NISINO H. Truss structural shape optimization based on the experimental design method[J]. Mechanics and Engineering. 1999, 21(6): 37-40.
- [14] 单鲁阳,严慧. 大跨度双层圆柱面网壳结构的优化分析[J]. 建筑结构学报, 1999, 20(6): 47-55.  
SHAN Lu-yang, YAN Hui. Optimal analysis of large span double-layer barrel vaults[J]. Journal of Building Structures, 1999, 20(6): 47-55.
- [15] 方开泰. 均匀设计与均匀设计表[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [16] XIAO J C, LIANG T, LIU Y. Parametric Analysis and Optimization of Partial Double-layer Reticulated Shells Using Uniform Design and Rotational Second Order Design [C]. YAO Z H, YUAN M W, CHEN Y Q. Computational Mechanics: computational methods in engineering and science. Tsinghua University Press & Springer-Verlag, 2006: 1 046-1 053.

(编辑 陈蓉)