

# 岩土损伤复合体理论的应力应变合成模式研究

刘元雪<sup>1</sup>, 周建廷<sup>2</sup>, 李忠友<sup>1</sup>

(1. 后勤工程学院 建筑工程系, 重庆 400041; 2. 重庆交通大学 科技处, 重庆 400074)

**摘要:**近年来岩土损伤本构模型取得了长足的进步,但岩土材料损伤复合体理论的一个基本问题——复合体两个组分的应力、应变合成模式上存在争议。从损伤力学的基础——连续介质力学的基本概念出发,对岩土损伤复合体理论应力应变合成的合理模式进行了深入研究。得出了一般损伤情况下的岩土损伤复合体理论的应力应变合成公式,给出了各向同性损伤情况下的简化公式,认为对于岩土损伤复合体理论不能直接采用并联、串联或简单的混合类型复合模式。

**关键词:** 岩石; 土; 损伤; 复合体理论; 应力; 应变

中图分类号: TU45 文献标志码: A 文章编号: 1006-7329(2008)04-0064-04

## Synthesis Mode of Stress and Strain for Complexus Theory of Geomaterials Damage

LIU Yuan-xue<sup>1</sup>, ZHOU Jian-ting<sup>2</sup>, LI Zhong-you<sup>1</sup>

(1. Department of Architecture and Civil Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing 400041, P. R. China; 2. Department of Science and Technology, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China)

**Abstract:** Although the constitutive model for geomaterial damage has developed significantly, there is still dispute regarding the synthesis mode of stress and strain for the complexus theory of geomaterials damage. The synthesis mode of stress and strain for the complexus theory of geomaterials damage was studied in depth in light of the basic concepts of continuum mechanics. A general synthesis mode of stress and strain for the complexus theory of geomaterials damage is put forward. A simplified formula of the synthesis mode of stress and strain for the complexus theory of geomaterials damage in isotropic damage has been obtained. It is concluded that a parallel, series or simple mixed assumption can not be applied directly to the synthesis mode of stress and strain for the complexus theory of geomaterials damage.

**Key words:** rock, soil; damage; complexus theory; stress; strain

损伤力学<sup>[1-3]</sup>是一门较新的力学学科,全称是连续损伤力学(Continuum Damage Mechanics)。损伤力学与断裂力学、疲劳分析理论全都属于破坏力学,是研究物质不可逆的破坏过程的科学。狭义上,可认为损伤力学是利用宏观理论分析与解决在宏观裂纹出现以前微观缺陷、微裂纹、微空穴的发生与发展过程的科学。从更为广泛的意义上看,损伤力学可以被认为是理性连续介质力学在处理耗散系统方面的一个分支。物质是多种多样的,损伤也就形形色色,由于各种物理与化学的原因,如受载、承受高温、受到腐蚀,而造成的

各种物理或化学的变化,如结构改变、相变化、成分变化都属于损伤的内容。象粘性流动、塑性流动及蠕变现象等,都是土体损伤的外在表现。这样从理论上概括和统一了各种不可逆过程的力学理论,如塑性理论、流变理论、断裂理论等等。

岩体作为一种大地介质通常包含着断层、断裂带、节理、软弱夹层与层面等,因此它是一种各向异性的非线性、非连续的力学介质。从损伤力学的角度来看,岩体属于一种具有初始损伤的介质<sup>[4]</sup>。1976年 Dougill 最早把损伤力学应用于岩石和混凝土材料,随后损伤

\* 收稿日期: 2008-02-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(50309017)与重庆市科委资助

作者简介: 刘元雪(1969-),男,教授,博士,主要从事岩土本构关系与数值分析的教學与研究工。 (E-mail)lyuanxue@vip.sina.com

理论在岩石混凝土材料中得到了广泛的应用。根据广义损伤概念,象土体的塑性流动,结构性粘土受力后的结构破坏,硬土、密砂加载过程中出现的软化现象,黄土的湿陷等等都属于损伤力学的研究范畴。然而损伤力学在土力学中的应用却开展得很晚。1988年,沈珠江<sup>[5]</sup>将现实的土体看作由理想的原状土和完全损伤土的组合,把土体在受力、浸水或变温下的变形过程看作由原状土向损伤土的演化过程。从损伤力学出发,结合几个具体问题提出了土体强度和本构关系的可能表达式。1993年,他提出了一个可以考虑粘土结构破坏过程的损伤力学模型<sup>[6]</sup>。1994年,他根据土体的变形特性可以用原状土和损伤土各占一定比例的复合体描述,提出了土体的损伤力学的双弹簧模型,并对软粘土、砂土和黄土建议了相应的模型<sup>[7]</sup>。

近年来,岩土损伤模型取得了长足的进步<sup>[8-15]</sup>,但还有一些基本问题值得考虑:对于岩土材料损伤问题目前的主流认为应该采用复合体理论,即与传统材料不同,损伤后的岩土体虽然力学性质有所劣化,但仍然具有一定的承载能力,但复合体的两个组分的应力、应变合成模式上存在争议,目前有并联、串联与混合模式,需要解决的问题是合理的复合体两组分的应力、应变合成模式应该是怎样的呢?本研究将从损伤力学的基础——连续介质力学出发,对这一问题进行深入的研究。

## 1 岩土损伤复合体的应力、应变合成模式分析

岩土损伤复合体理论认为:对于岩土材料与传统材料不同,损伤后的岩土体虽然力学性质有所劣化,但仍然具有一定的承载能力,但复合体的两个组分的应力、应变合成模式上与假设有关。即原状岩土与损伤部分遵从不同的本构关系:

$$d\sigma_n = [D_n]d\epsilon_n \text{ 或 } d\epsilon_n = [C_n]d\sigma_n \quad (1)$$

$$d\sigma_d = [D_d]d\epsilon_d \text{ 或 } d\epsilon_d = [C_d]d\sigma_d \quad (2)$$

式中:下标  $n, d$  分别标记天然岩石的完好部分与损伤部分的有关物理量。

而总应力  $\sigma$ 、总应变  $\epsilon$  与两组分的应力( $\sigma_n, \sigma_d$ )、应变( $\epsilon_n, \epsilon_d$ )的关系与假设有关。

### 1.1 并联类型合成模式

复合体并联类型的应力-应变合成模式<sup>[8-10]</sup>都隐含一基本假设,即原状岩土体与损伤岩土体的应变是一致的,两体并联。数学描述为:

$$\epsilon = \epsilon_n = \epsilon_d \quad (3)$$

$$\sigma = (1 - \omega)\sigma_n + \omega\sigma_d \quad (4)$$

式中  $\omega$  为损伤变量。

对(4)式进行求导,得到本构关系为:

$$d\sigma = d[(1 - \omega)\sigma_n + \omega\sigma_d] \\ = (1 - \omega)d\sigma_n + \omega d\sigma_d + d\omega(\sigma_d - \sigma_n) \quad (5)$$

认为损伤变量与应变有关,令  $\omega = \omega(\epsilon)$

$$d\omega = \omega' d\epsilon \quad (6)$$

$$d\sigma = (1 - \omega)[D_n]d\epsilon_n + \omega[D_d]d\epsilon_d + \omega' d\epsilon(\sigma_d - \sigma_n) \\ = (1 - \omega)[D_n]d\epsilon + \omega[D_d]d\epsilon + \omega' d\epsilon(\sigma_d - \sigma_n) \\ = [(1 - \omega)[D_n] + \omega[D_d] + \omega'(\sigma_d - \sigma_n)]d\epsilon$$

$$\text{令 } [D_1] = (1 - \omega)[D_n] + \omega[D_d] + \omega'(\sigma_d - \sigma_n) \quad (7)$$

$$d\sigma = [D_1]d\epsilon \quad (8-1)$$

$$d\epsilon = [C_1]d\sigma = [D_1]^{-1}d\sigma \quad (8-2)$$

式中 $[D_1]$ 和 $[C_1]$ 表示并联型复合模式的刚度矩阵和柔度矩阵。

### 1.2 串联类型合成模式

复合体串联类型的应力-应变合成模式<sup>[11,12]</sup>隐含的基本假设为:原状岩土体与损伤岩土体的应力是一致的,两体串联。数学描述为:

$$\sigma = \sigma_n = \sigma_d \quad (9)$$

$$\epsilon = (1 - \omega)\epsilon_n + \omega\epsilon_d \quad (10)$$

对(10)式进行求导,得到本构关系为:

$$d\epsilon = d[(1 - \omega)\epsilon_n + \omega\epsilon_d] \\ = (1 - \omega)d\epsilon_n + \omega d\epsilon_d + d\omega(\epsilon_d - \epsilon_n) \quad (11)$$

认为损伤变量与应力有关,令  $\omega = \omega(\sigma)$

$$d\omega = \omega' d\sigma \quad (12)$$

$$d\epsilon = (1 - \omega)[C_n]d\sigma_n + \omega[C_d]d\sigma_d + \omega' d\sigma(\epsilon_d - \epsilon_n) \\ = (1 - \omega)[C_n]d\sigma + \omega[C_d]d\sigma + \omega' d\sigma(\epsilon_d - \epsilon_n) \\ = [(1 - \omega)[C_n] + \omega[C_d] + \omega'(\epsilon_d - \epsilon_n)]d\sigma$$

$$\text{令 } [C_2] = (1 - \omega)[C_n] + \omega[C_d] + \omega'(\epsilon_d - \epsilon_n) \quad (13)$$

$$d\epsilon = [C_2]d\sigma = [D_2]^{-1}d\sigma \quad (14)$$

式中 $[D_2]$ 和 $[C_2]$ 分别表示串联型复合模式的刚度矩阵和绕度矩阵。

### 1.3 混合类型合成模式

复合体混合类型的应力-应变合成模式<sup>[8,13]</sup>隐含的基本假设为原状岩土体与损伤岩土体不是简单的串联或并联,具体的应力应变关系与假设有关,如采用均匀化理论的<sup>[14-15]</sup>:

$$\bar{\sigma} = (1 - \omega)\bar{\sigma}_n + \omega\bar{\sigma}_d \quad (15)$$

$$\bar{\epsilon} = (1 - \omega)\bar{\epsilon}_n + \omega\bar{\epsilon}_d \quad (16)$$

或从应变能等效假设推出的<sup>[8]</sup>:

$$\bar{\sigma} = (1 - \omega)\sigma_n\epsilon_n + \omega\sigma_d\epsilon_d \quad (17)$$

因为混合类型合成模式与假设有关,没有统一的关系式,故不一一给出他们对应的本构关系。

## 2 岩土损伤复合体理论应力-应变合成的合理模式

损伤力学是以连续介质力学、不可逆过程热力学

为基础,研究固体材料及其工程构件在一定荷载与环境条件下,材料损伤随变形发展最后导致破坏的过程的规律。也就是说它还是在连续介质力学范畴内来研究问题。那么我们就可以从连续介质力学的一些基本概念出发来研究岩土损伤复合体理论应力—应变合成的合理模式问题。

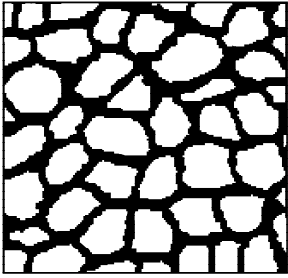


图 1 岩土损伤体微元示意图

### 2.1 岩土损伤体的物质微元定义

连续介质力学的深入发展,要求建立作为其分析基础的概念更清晰的模型。连续介质力学属于微象理论,它不采用物质的宏观行为由粒子理论推出的本质论的观点,而采用连续介质的假说,使得与连续场论有关的数学分析都可以无困难地进行。由于这种方法远较本质论简单实用,且由于它所依据的是宏观试验,而所得的结论仍用于宏观世界,因此又是合理的,这使得它的应用极为广泛。但是由于连续介质的概念是一种数学上的抽象,因此当将它用到真实的物理世界时必须十分谨慎,应当注意将连续介质的观点与粒子论的观点很好地协调起来。解决这一“实际粒子离散”和“模型介质连续”概念上困难的办法是宏观无限小和微观无限大模型。这一模型认为在连续介质中所使用的微元体不是一个点,它应包含大量的粒子,以便从物理的观点来看,它使温度、熵、质量等具有确定的物理内涵,另一方面它又足够小,以致从场的分析的观点来看,它在无穷小的尺寸范围内均匀性的假设对场论中数学分析引起的误差可以忽略不计。

具体到岩土损伤体的物质微元(如图 1 所示)的定义需要一定的尺度。在宏观上,基于连续介质力学方法,研究固体材料中一个微小代表体元。它在宏观上是物质点,比工程结构的尺度要小得多,但又不是微结构。由于质量、应变、应力、温度以及损伤等参量,从本质上讲,并非均匀连续的,因而所取代表体元要包含足够多的微结构,以考察体元里各物理量的平均行为和响应。下面将基于这一微元假设来探求岩土损伤体的应力、应变。

### 2.2 岩土损伤体的应力

连续介质力学的一点应力定义为:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{dP}{dS}$$

不失一般性,以  $x$  方向的正应变为例,令原状岩土

体与损伤部分所占的面积、应力分别为:  $dS_n$ 、 $dS_d$ 、 $dP_{x_n}$ 、 $dP_{x_d}$ ,则  $x$  方向的正应力为:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{dP_x}{dS} \\ &= \frac{dP_{x_n} + dP_{x_d}}{dS_n + dS_d} \\ &= \frac{dS_n}{dS_n + dS_d} \frac{dP_{x_n}}{dS_n} + \frac{dS_d}{dS_n + dS_d} \frac{dP_{x_d}}{dS_d} \\ &= (1 - \frac{dS_d}{dS_n + dS_d}) d\sigma_{x_n} + \frac{dS_d}{dS_n + dS_d} d\sigma_{x_d} \\ \sigma_x &= (1 - \omega_{\sigma_x}) d\sigma_{x_n} + \omega_{\sigma_x} d\sigma_{x_d} \end{aligned} \quad (18)$$

公式中  $\omega_{\sigma_x}$  可看成损伤变量,定义如下:

$$\omega_{\sigma_x} = \frac{dS_d}{dS_n + dS_d} \quad (19)$$

### 2.3 岩土损伤体的应变

连续介质力学的一点应变定义为:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \epsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

不失一般性,以  $x$  方向的正应变为例,令原状岩土体与损伤部分所占的长度、变形分别为:  $dx_n$ 、 $dx_d$ 、 $du_n$ 、 $du_d$ ,则  $x$  方向的正应变为:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{du}{dx} \\ &= \frac{du_n + du_d}{dx_n + dx_d} \\ &= \frac{dx_n}{dx_n + dx_d} \frac{du_n}{dx_n} + \frac{dx_d}{dx_n + dx_d} \frac{du_d}{dx_d} \\ &= (1 - \frac{dx_d}{dx_n + dx_d}) d\epsilon_{x_n} + \frac{dx_d}{dx_n + dx_d} d\epsilon_{x_d} \\ \epsilon_x &= (1 - \omega_{\epsilon_x}) d\epsilon_{x_n} + \omega_{\epsilon_x} d\epsilon_{x_d} \end{aligned} \quad (20)$$

公式中  $\omega_{\epsilon_x}$  可看成损伤变量,定义如下:

$$\omega_{\epsilon_x} = \frac{dx_d}{dx_n + dx_d} \quad (21)$$

### 2.4 讨论

上两小节给出了具体的两个岩土损伤体的应力、应变表述公式,最一般情况下,岩土体的损伤为各向异性的,这时不能保证  $\omega_{\sigma_i} = \omega_{\sigma_j}$ ,  $\omega_{\epsilon_i} = \omega_{\epsilon_j}$ , 则:

$$\sigma = (I - [\omega_\sigma]) \sigma_n + [\omega_\sigma] \sigma_d \quad (22)$$

$$\epsilon = (I - [\omega_\epsilon]) \epsilon_n + [\omega_\epsilon] \epsilon_d \quad (23)$$

式中  $[\omega_\sigma]$ 、 $[\omega_\epsilon]$  为四阶损伤张量。

当损伤为各向同性时(事实上当前的岩土损伤模型基本上采用损伤各向同性假设<sup>[5-15]</sup>的),损伤张量就可以用标量来表示,而且存在:

$$[\omega_\sigma] = [\omega_\epsilon] = \omega I$$

这样式(21)、(22)变为:

$$\sigma = (1 - \omega) \sigma_n + \omega \sigma_d \quad (24)$$

$$\epsilon = (1 - \omega)\epsilon_n + \omega\epsilon_d \quad (25)$$

显然,即使是在各向同性损伤条件下也不能保证:

$$\sigma = \sigma_n = \sigma_d$$

$$\epsilon = \epsilon_n = \epsilon_d$$

因此,对于岩土损伤体的应力应变合成一般公式应采用式(22)、(23)。当采用各向同性损伤假设时只能采用式(24)、(25)。不能简化为式(3)、(4)或式(9)、(10)。

#### 4 结 论

本研究从损伤力学的基础——连续介质力学的基本概念出发,对岩土损伤复合体理论应力—应变合成的合理模式进行了深入研究。一般损伤情况下的岩土损伤复合体理论的应力—应变合成公式应为:

$$\sigma = (I - [\omega_\sigma])\sigma_n + [\omega_\sigma]\sigma_d$$

$$\epsilon = (I - [\omega_\epsilon])\epsilon_n + [\omega_\epsilon]\epsilon_d$$

当损伤为各向同性时,岩土损伤复合体理论的应力—应变合成公式可简化为:

$$\sigma = (1 - \omega)\sigma_n + \omega\sigma_d$$

$$\epsilon = (1 - \omega)\epsilon_n + \omega\epsilon_d$$

#### 参考文献:

- [1] 吴鸿遥. 损伤力学[M]. 北京:国防工业出版社,1990. WU Hong-yao. Damage mechanics [M]. Beijing: National Defence Industry Press. 1990.
- [2] J. L. Chaboche. 连续介质损伤力学 I. 一般概念[J]. 力学进展,1989,19(1):130-137. J L CHABOCHE. Continuum damage mechanics I. Universal concept[J]. Advances in Mechanics, 1989, 19 (1): 130-137.
- [3] J. L. Chaboche. 连续介质损伤力学 II. 损伤扩展, 裂纹萌生和扩展[J]. 力学进展,1989,19(2): 257-266. J L CHABOCHE. Continuum damage mechanics II. Development of damage, Initiation and Development of Crack[J]. Advances in Mechanics, 1989, 19(2):257-266
- [4] 袁建新. 岩体损伤问题[J]. 岩土力学,1993,14(1):1-31. YUAN Jian-xin. Rock damage problems[J]. Rock and Soil Mechanics, 1993, 14(1): 1-31
- [5] 沈珠江,章为民. 损伤力学在土力学中的应用. 见:第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集[C]. 北京:中国建筑工业出版社,1988:595-610. SHEN Zhu-jiang, ZHANG Wei-min. Application of damage mechanics in the soil mechanics. Proceeding of the 3th conference on the numerical analysis and analytic method of soil mechanics [C]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1988: 595-610.
- [6] 沈珠江. 结构性粘土的弹塑性损伤模型[J]. 岩土工程学报, 1993,15(3):21-28. SHEN Zhu-jiang. An Elasto-plastic damage model for

cemented clay [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering. 1993, 15(3): 21-28.

- [7] 沈珠江. 土体变形特性的损伤力学模拟. 见:郑颖人主编. 第五届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集[C]. 武汉:武汉测绘大学出版社,1994:1-8. SHEN Zhu-jiang. Damage mechanics simulation on the deformed character of soil. Proceeding of the 5th conference on the numerical analysis and analytic method of soil mechanics [C]. Wuhan, Wuhan Mapping University Press. 1994: 1-8
- [8] 沈珠江,陈铁林. 岩土破损力学-结构类型与荷载分担[J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(13): 2137-2142. SHEN Zhu-jiang, CHEN Tie-lin. Breakage mechanics of geomaterial — structure types and load sharing [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004,23(13): 2137-2142.
- [9] 沈珠江,胡再强. 黄土的二元介质模型[J],水利学报,2003(7):1-6. SHEN Zhu-jiang, HU Zai-qiang. Binary medium model for loess[J]. Shuili Xuebao, 2003(7):1-6.
- [10] 沈珠江. 结构性粘土的非线性损伤力学模型[J]. 水利水运科学研究,1993(3): 247-255. SHEN Zhu-jiang. A nonlinear damage model for structured clay [J]. Journal of Nanjing Hydraulic Research Institute, 1993(3): 247-255.
- [11] 周成,沈珠江,陈生水,陈铁林. 结构性土的次塑性扰动状态模型[J]. 岩土工程学报,2004,26(4):435-439. ZHOU Cheng, SHEN Zhu-jiang, CHENG Zhu-jiang, CHENG Tie-lin. A hypoplasticity disturbed state model for structured soil [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(4):435-439.
- [12] 胡再强,沈珠江,谢定义. 结构性黄土的本构模型[J]. 岩石力学与工程学报,2005,24(4): 565-569. HU Zai-qing, SHEN Zhu-jiang, XIN Ding-yi. Constitutive model of structural loess [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24 (4): 565-569.
- [13] 沈珠江. 岩土破损力学:理想脆弹塑性模型[J]. 岩土工程学报,2003,25(3): 253-257. SHEN Zhu-jiang. Breakage mechanics for geological materials: an ideal brittle-elasto-plastic model [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25 (3): 253-257.
- [14] Anthoine A. Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory[J]. Int J Solids and Structures, 1995, 32(2): 137-163.
- [15] Wang J. G, Leung C. F. A simplified homogenization method for composite soils [J]. Computers and Geotechnics, 2002: 384-397.

(编辑 胡 玲)