

# MATLAB的真空平板玻璃支撑柱应力数值分析

缪宏<sup>1,2</sup>, 左敦稳<sup>1</sup>, 张瑞宏<sup>2</sup>, 王长涛<sup>2</sup>, 孔德军<sup>3</sup>

(1. 南京航空航天大学机电学院, 南京 210016; 2. 扬州大学机械工程学院, 扬州 225009;  
3. 江苏工业学院机械与能源工程学院, 常州 213016)

**摘要:**采用节点法及单、重三角级数法对真空平板玻璃支撑柱应力场进行了分析, 并对其进行了数值求解, 通过优化支撑柱的分布, 得到了真空平板玻璃在大气压强下的最大和最小应力点。通过用 Matlab 编程计算出真空玻璃板支撑柱的最大应力分布, 为精确分析真空玻璃板支撑柱应力及其挠度提供了数值依据。试验结果表明, 最大应力发生在每个支撑的支撑端面, 且以 4 角第 2 个支撑处应力最大, 第 2 排的支撑柱次之, 其理论计算与软件分析基本一致。

**关键词:**真空平板玻璃; 支撑柱应力; 有限元分析

**中图分类号:**S625 **文献标志码:**A **文章编号:**1006-7329(2008)06-0056-05

## A Matlab-Based Numerical Simulation Analysis of Shore Stress in Vacuum Plate Glass

MIAO Hong<sup>1, 2</sup>, ZUO Dun-wen<sup>1</sup>, ZHANG Rui-hong<sup>2</sup>, WANG Chang-tao<sup>2</sup>, KONG De-jun<sup>3</sup>

(1. Electrical and Mechanical College, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P. R. China; 2. School of Mechanical Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225009, P. R. China; 3. Department of Mechanical Engineering, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, P. R. China)

**Abstract:** A numerical simulation method, the node method, and single, multi-triangle progression were used to analyze the shore stress field of vacuum plate glass. By optimizing the shore distribution, the points of greatest and least stress in vacuum plate glass were determined. The distributions of greatest stress in vacuum plate glass were calculated using MATLAB®. These calculations can provide numerical foundations for accurately analyzing the shore stress and flexibility of vacuum plate glass. The result shows that the greatest stress exists in the end surface of every shore, and the maximal stress is in the second shore at four-square sides, then follows the shore of next row. The theoretical calculations correspond to the software analysis results.

**Key words:** vacuum plate glass; shore stress; finite element analysis

真空平板玻璃是将两片玻璃板洗净, 在一片玻璃板上以 10~25 mm 的间隔放置高度为 0.1~0.5 mm, 直径为 0.3~1.0 mm 的圆柱状支撑物或宽度为 0.4~0.6 mm 的线状或格子状支撑物。然后再放上另一片玻璃板。将两片玻璃板的四周涂上焊接玻璃, 在 450 °C 中加热 15~60 min, 在去除玻璃故上附着的水分及有机物的同时由焊接玻璃将两片玻璃板的四周封边, 形成一个整体<sup>[1]</sup>。由于真空玻璃制造技术的高难度,

对真空平板玻璃系统的理论研究尚未见报道。本文以实验室制样的真空玻璃为基础, 对真空平板玻璃应力状态进行分析及对理论模型进行了试验验证。利用 Matlab 人机互换的特点, 通过输入真空玻璃板的参数值和大气压值, 可以迅速得出真空玻璃板的最大应力及应力表现图, 为精确分析真空玻璃板内应力及挠度提供了数据依据。

\* 收稿日期: 2008-06-01

基金项目: 国家自然科学基金(50772095)

作者简介: 缪宏(1981-), 男, 南京航空航天大学博士生, 主要从事机械设计等方面的研究。(E-mail) mh0514@163.com

张瑞宏(联系人), 男, 教授, 博士生导师。(E-mail) zhang-rh@163.com

欢迎访问重庆大学期刊网 <http://jks.cqu.edu.cn>

### 1 数学模型的建立

在真空平板玻璃的支撑应力中,支承玻璃所受的载荷主要考虑均布载荷  $q$ (大气压作用),其支承条件为由多个支撑柱支撑,涂在玻璃板四周的焊接玻璃,胶缝仅起到保证水密性、气密性的作用,不考虑传力作用,所以计算单元可取一块玻璃  $a \times b$ ,这属于弹性薄板的横向弯曲问题,如图 1(a)所示。根据板壳理论,考虑对称性因素,可以简化为 4 点支承,则得到 4 点支承的矩形薄板的计算模型,如图 1(b)所示。

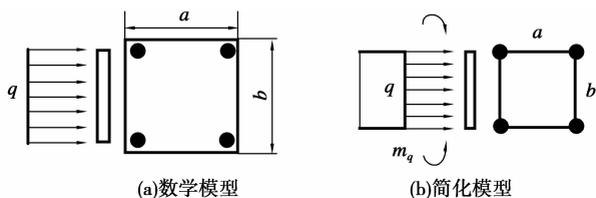


图 1 真空平板玻璃应力计算模型

### 2 计算方法

#### 2.1 真空平板玻璃支撑应力分析

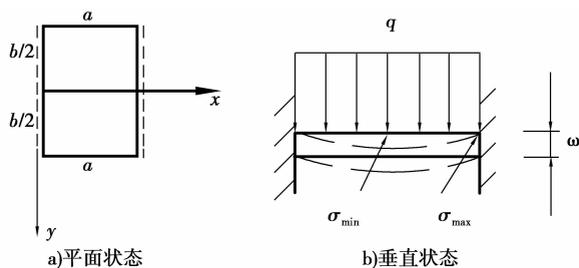


图 2 大气压  $q$  的单独作用

图 2 为考虑大气压在单独作业的受力模型,其应力  $\sigma_{\max} = \beta_1 \frac{qb^2}{t^2}$  (1)

式中  $\sigma_{\max}$  为边界中点处的应力;  $\beta_1$  为参数,  $q$  为大气压强;  $b$  为边长,  $t$  为玻璃厚度。

中点最大挠度

$$\omega = \frac{4q}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)}{mn(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$
 (10)

由式(8)、(9)算出弯矩,代入式(10)即可求出玻璃板面各个点的应力值。

$$\sigma_x = \frac{24qa^2b^2}{\pi^4 t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m^2b^2 + \mu^2a^2n^2)(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn(b^2m^2 + a^2n^2)^2}$$
 (11)

$$\omega = -\alpha \frac{qb^4}{Et^3}$$
 (2)

式中  $\omega$  为中点挠度;  $\alpha$  为系数;  $E$  为玻璃弹性模量。

表 1 矩形板作用均布载荷时系数

$a/b$	$\beta_1$	$\beta_1$	$\alpha$
1.0	0.307 8	0.138 6	0.013 8
1.2	0.383 4	0.179 4	0.018 8
1.4	0.435 6	0.209 4	0.022 6
1.6	0.468 0	0.228 6	0.025 1
1.8	0.487 2	0.240 6	0.026 7
2.0	0.497 4	0.247 2	0.027 7
$\infty$	0.500 0	0.250 0	0.028 4

2.2 按四边简支模型分析真空平板玻璃玻璃板应力  
在 4 边简支的矩形真空玻璃薄板上,图 1 边界条件为:

$$(\omega)_{x=0} = 0, (\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2})_{x=0} = 0$$
 (3)

$$(\omega)_{x=a} = 0, (\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2})_{x=a} = 0$$
 (4)

$$(\omega)_{y=0} = 0, (\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2})_{y=0} = 0$$
 (5)

$$(\omega)_{y=b} = 0, (\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2})_{y=b} = 0$$
 (6)

把挠度  $\omega$  表达式取为如下的三角级数

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$
 (7)

式中  $m$  和  $n$  为正整数。

式(7)代入式(3)~(6),全部边界条件均能满足。

利用曲面微分方程,求出系数  $A_{mn}$ 。

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 abD (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^2} = \frac{4q(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)}{mn\pi^6 D (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^2}$$
 (8)

式中  $D$  为玻璃板的弯曲刚度,  $D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$ 。

将  $A_{mn}$  代入式(8),即可得出挠度  $\omega$  的表达式:

$$\sigma_y = \frac{24qa^2b^2}{\pi^4t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\mu^2m^2b^2 + a^2n^2)(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn(b^2m^2 + a^2n^2)^2} \quad (12)$$

### 2.3 支撑计算模型

真空平板玻璃在外表面的大气压作用下,将产生一定的应力和变形,为了建立可以进行理论计算的力学模型,可以做如下简化:以任一支柱为中心,在与相邻支柱等距处为边界,取出一个正方形单元。由于单元的边长与玻璃厚度之比为 7~8 倍,可按薄板计算。利用其对称性可知,在边界处转角为零,由于表面的大气压力与支柱的支撑反力大致相等,单元的边界内力剪力亦为零,但有弯矩,故将边界处看作夹支(固定端)处理<sup>[2-3]</sup>,力学模型图如图 3(a)所示。单元上受力状态中图 3(b)所示。图 3(b)是考虑支反力的单独作用情况,支柱半径为  $r$ ,由于  $r < 0.5t$ ,则由当量接触半径  $r'$ 代替  $r$  进行计算,其计算方法如下:

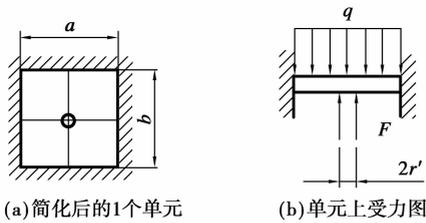


图 3 支撑柱计算模型

$$r' = \sqrt{1.6r + t^2} - 0.675t \quad (13)$$

$$\sigma_{\min} = -\beta_1 \frac{F}{t^2} \quad (14)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3F}{2\pi t^2} \left[ (1 + \mu) \ln \frac{2a}{r'} + \beta_2 \right] \quad (15)$$

中点最大挠度 
$$w = \alpha \frac{Fa^2}{Et^3} \quad (16)$$

式中  $F$  为单元总大气压作用下,  $F=qab$ ;  $q$  为大气压强;  $a$  为单元边长;  $b$  为单元边长;  $r$  为支柱半径;  $r'$  为当量接触半径;  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\alpha$  参数见表 2;  $w$  为中心最大挠度。

表 2 矩形板中部作用圆形区域载荷时系数

$a/b$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\alpha$
1.0	0.754 2	-0.238	0.061 1
1.2	0.894 0	-0.078	0.070 6
1.4	0.962 4	0.011	0.075 4
1.6	0.990 6	0.053	0.077 7
1.8	1.000	0.068	0.078 6
2.0	1.004	0.067	0.078 8
$\infty$	1.008	0.067	0.079 1

### 3 数值算例

根据上述计算方法,利用 Matlab 进行编程,可得出四边简支的真空玻璃板内力及挠度。基于 Matlab 平台对式(10)~(16)编程计算,可以实现人机交互的作用。通过输入真空玻璃板的参数值和大气压值,可以迅速得出真空平板玻璃板的  $X$  方向的最大应力及  $X$  方向应力表现图、 $Y$  方向的最大应力及  $Y$  方向应力表现图、最大挠度及挠度曲面表现图,为精确分析真空玻璃板的内力及挠度提供了数据依据。

试样选用钠钙玻璃(退火状态),按 LOF(利拜-奥文斯-福特)标准<sup>[4-5]</sup>,可查得:材料的弹性模量  $E=10.50 \times 1061=72.45$  MPa;泊松比  $\mu=0.22$ ;抗拉强度  $\sigma_t=40$  MPa,抗压强度  $\sigma_{by}=880$  MPa。(抗拉、抗压强度均按下限选用)。玻璃厚度  $t=4$  mm,支柱间距(单元边长)  $a=b=30$  mm,支柱半径  $r=0.4$  mm,两板间隔 0.3 mm。支柱为不锈钢,  $E=200$  GPa,高  $l=0.3$  mm。载荷  $q=0.1$  MPa,  $F=qb^2=90$  N。

在  $q$  作用下,表面的  $\sigma_{1\max} = \beta_1 \frac{qb^2}{t^2} = 1.73$  MPa。

在中心处,表面的  $\sigma_{1\min} = \beta_2 \frac{qb^2}{t^2} = -0.780$  MPa。支柱作用力  $F$  的作用下,当量接触半径  $r' = \sqrt{1.6r + t^2} - 0.675t = 1.332$  mm,  $\sigma_{2\min} = -\beta_1 \frac{F}{t^2} = -4.24$  MPa,

$\sigma_{2\max} = \frac{3F}{2\pi t^2} \left[ (1 + \mu) \ln \frac{2a}{r'} + \beta_2 \right] = 11.8$  MPa。将应

力叠加,得到在支柱作用处的外表面上,最大应力为:  $\sigma_{\max} = \sigma_{2\max} - \sigma_{1\min} = 11.057$  MPa,在两个支柱连线的中点(横向或竖向,下同)的外表面处,最小应力为  $\sigma_{\min} = \sigma_{1\max} + \sigma_{2\min} = -2.51$  MPa。在  $q$  作用下,玻璃挠度  $w_1 = \alpha \frac{qa^4}{Et^3} = -2.411 \times 10^{-4}$  mm。

在支柱反力  $F$  的作用下,玻璃挠度  $w_2 = \alpha \frac{Fa^2}{Et^3} = 1.067 \times 10^{-3}$  mm。实际上,以支柱处的位移为零,则在两支柱连线的中点处的表面,相对于支柱处的向下位移为  $w_1 + w_2 = 0.826$  mm。支柱的应力  $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2} = 179$  MPa,支柱的轴向变形  $\Delta = \frac{Fl}{EA} = \frac{Fl}{\pi Er^2} = 2.686 \times 10^{-4}$  mm。

若采用玻璃支柱,其压缩变形  $\Delta_1 = \frac{Fl}{EA} = \frac{Fl}{\pi Er^2} =$

$7.414 \times 10^{-4}$  mm。

支柱作为压杆,柔度  $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l t}{2r} = 1.5 \ll \lambda_p$ ,

式中  $\mu$  为压杆状态相当系数。

由于支撑柱两端与玻璃无相对位移,故按两端铰支处理,故稳定性不需考虑。取  $\mu=1$  时, $\lambda_p$  为临界柔度,普通碳素钢  $\lambda_p=100$ 。上述分析是采用弹性力学的理论计算,该方法由铁木辛柯等给出。由于将结构进行简化,特别是将上述 1 个正方形单元的边界处理成夹支,并认为在 1 个等高上,但实际上变形后边界并不等高,而是边界中点(横向或竖向 2 个支柱连线的中点)最高,4 角(斜向两支柱连线的中点)最低。

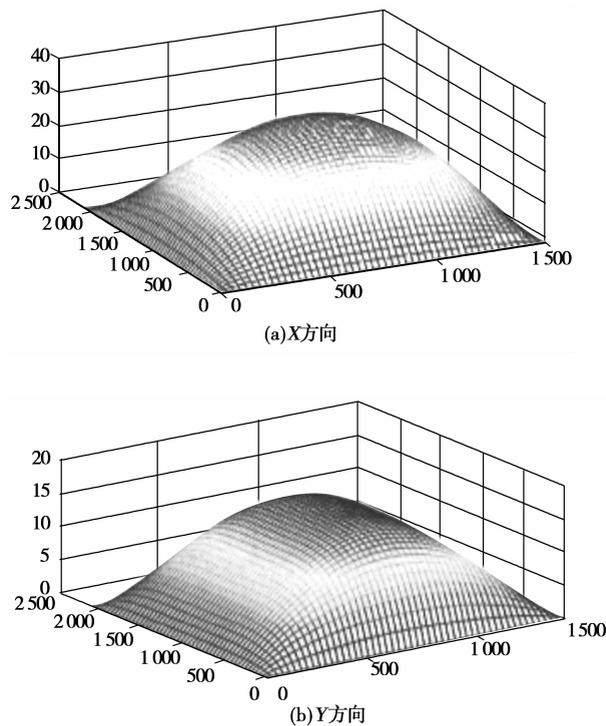


图 4 真空平板玻璃正方形单元应力

利用 Matlab 进行编程,真空平板玻璃正方形单元内力及挠度图形如图 4 所示。由此可见,真空平板玻璃正方形单元在大气压作用  $F$ ,其 X 方向应力  $\sigma_x$  分布为类半球型,最大应力值位于玻璃板的中心,向四周平滑衰减,边缘处应力为零。真空平板玻璃板正方形单元在大气压作用下,其 Y 方向应力  $\sigma_y$  分布为类半椭圆型,最大应力值位于玻璃板的中心,向 X 方向平滑衰减,沿 Y 方向中部出现等值带图,到两端亦平滑衰减,边缘处应力为零口。

为了验证上述结果,并求出全场应力和应变,采用了有限元数值计算及电测方法进行试验研究。图 5 是

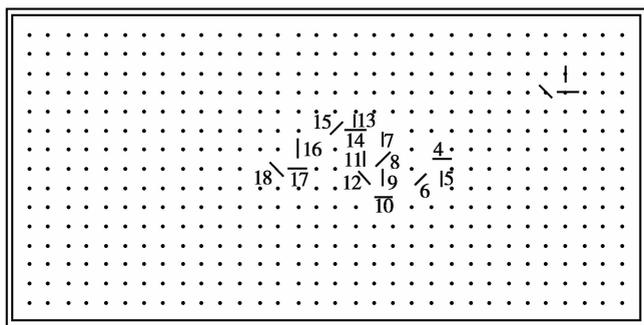


图 5 测点位置示意图

测点位置示意图,图中的横杠均为应变片布置位置。采用电测法,在玻璃表面贴上电阻应变片,然后抽气,进行测试表面的应变变化。在测试中,由于应力的梯度大,应变片丝栅(1 mm×0.5 mm)位置对测试结果影响很大。最大应力位于支柱支撑处,具体测试时,实际压力差为 0.06 MPa,按上面表中数据及公式算得各测点中应力的最大值为 2 号测点,应变增量为  $76\mu\epsilon$ ,

$$\sigma'_{\max} = \frac{E}{1-\nu} \epsilon_{\max} = \frac{72.45 \times 10^9}{1-0.22} \times 76 \times 10^{-6} = 7.059 \text{ MPa}.$$

按比例换算可得抽真空(真空度为 1 MPa)后该测点应力值为  $\sigma_{\max} = \sigma'_{\max}/0.6 = 11.765 \text{ MPa}$

1 号测点(斜向两支柱中点)有最小应力(压应力),应变增量为  $-22\mu\epsilon$ 。

$$\sigma'_{\min} = \frac{E}{1-\nu} \epsilon_{\min} = \frac{72.45 \times 10^9}{1-0.22} \times (-22) \times 10^{-6} = -2.043 \text{ MPa}$$

按比例换算可得抽真空后该测点应力值为  $\sigma_{\min} = \sigma'_{\min}/0.6 = -3.405 \text{ MPa}$ 。

11 号测点位于两支柱(横向)的中点,应变增量为  $-12\mu\epsilon$ ,该处亦按照二向等压应力状态计算

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu} \epsilon' = \frac{72.45 \times 10^9}{1-0.22} \times (-12) \times 10^{-6} = -1.115 \text{ MPa}$$

按比例换算可得抽真空后该测点应力值为  $\sigma = \sigma'/0.6 = -1.858 \text{ MPa}$ 。

用 Ansys 软件对玻璃的应力场和应变场进行分析。根据真空玻璃实验材料特性及其形状尺寸,单元类形选用 Shell63,网格划分后共有节点 37 445 个,单元 37 049 个。图 6(a)为真空平板玻璃这种特殊结构在大气作用下的最大点。图 6(b)为真空平板玻璃这种特殊结构在大气作用下的最小点。

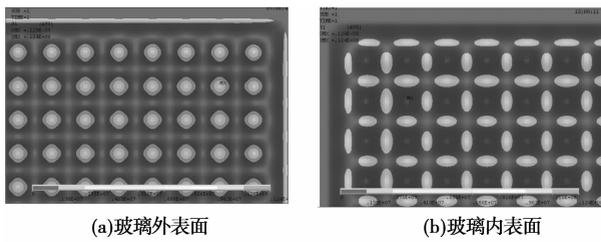


图6 应力 $\sigma_1$ 分布局部放大图

## 5 结 论

1) 真空平板玻璃应力分析有效准确地实现了对真空玻璃实际工作环境进行了模拟分析,这对于覆盖材料测试标准中环境参数的制定提供了重要的依据。

2) 用结点法及单、重三角级数法建立真空玻璃应力分布数学模型,计算出了真空平板玻璃这种特殊结构在大气作用下的最大和最小应力点。

## 参考文献:

[1] 张瑞宏, 高建和, 顾乡, 等. 真空平板玻璃支撑应力实验研究[J]. 真空科学与技术学报, 2006, 26(6): 455-458.  
ZHANG Rui-hong, GAO Jian-he, GU Xiang, et al. Experimental research on the brace stress of the vacuum sheet glass [J]. Journal of Vacuum Science and Technology, 2006, 26(6): 455-458.

[2] COLLINS R E, TURNER G M, FISCHER-CRIPPS A C, et al. Vacuum glazing-A new component for insulating windows [M]. Building and Environment, 1995, 30: 459-492.

[3] JUN FU-ZHAO, PHILIP C E, TREVOR J H, et al. A modified pump-out technique used for fabrication of low

temperature metal sealed vacuum glazing [J]. Solar Energy, 2007, 81: 1072-1077.

- [4] COLLINS R E, SIMKO T M. Current status of the science and technology of vacuum glazing [J]. Solar Energy, 1998, 62: 189-213.
- [5] 张瑞宏, 马承伟, 缪宏, 等. 真空平板玻璃传热理论分析及试验[J]. 农业机械学报, 2006, 37(12): 134-138.  
ZHANG Rui-hong, MA Cheng-wei, MIAO Hong, et al. Theoretical analysis and experimental study on heat transfer in vacuum plate glass [J]. Journal of Agricultural Machinery, 2006, 37(12): 134-138.
- [6] 缪宏, 张瑞宏, 高建和, 等. 真空玻璃传导和对流传热机理研究[J]. 玻璃, 2007, 34(2): 7-12  
MIAO Hong, ZHANG Rui-hong, GAO Jian-he, et al. Study on the mechanism of conductive and convective heat transfer in vacuum glass [J]. Glass, 2007, 34(2): 7-12.
- [7] NG N, COLLINS R E, SO L. Characterization of the thermal insulating properties of vacuum glazing [J]. Materials Science and Engineering B, 2007, 138: 128-134.
- [8] NG N, COLLINS R E, SO L. Thermal conductance measurement on vacuum glazing [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006, 49: 4877-4885.
- [9] 聂忆华, 张起森, 徐阳, 等. 高等级公路沥青路面剪应力分布研究[J]. 重庆建筑大学学报, 2007, 29(5): 85-90.  
NI Yi-hua, ZHANG Qi-sheng, XU Yang, et al. Distribution regularities and influencing factors of shear stress in high grade asphalt pavement layers [J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2007, 29(5): 85-90.

(编辑 王秀玲)