

颗粒复合材料微裂纹增韧的数值模拟

琚宏昌, 陈国荣

(河海大学 工程力学系, 江苏 南京 210098)

摘要:将弹性复合材料体中主裂纹尖端划分为 3 个不同的区域, 导出了各个区域的本构模型及饱和区域的范围。在最大饱和区域内, 应用 Monte-Carlo 技术产生均匀分布的微裂纹来表示损伤的各向同性, 并采用轮流迭代数值技术来评估主裂纹和微裂纹相互作用。在稀疏微裂纹的假设前提下, 忽略微裂纹间的相互作用, 主裂纹与每一个微裂纹相互作用的应力强度因子可以叠加。分析了两种荷载源, 一个是在无限远荷载作用下主裂纹和微裂纹的相互作用, 另一个是伴随着微裂纹面上残余应力的释放主裂纹和微裂纹的相互作用。结果表明, 两种荷载源都对主裂纹有屏蔽作用, 且主裂尖后的微裂纹有最大的屏蔽作用, 主裂尖前的微裂纹没有屏蔽作用。

关键词:主裂纹; 微裂纹; 相互作用; 应力强度因子; 屏蔽

中图分类号: TU502 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2009)01-0013-06

Numerical Simulation of Microcrack Toughening in Particulate Composite

QU Hong-chang, CHEN Guo-rong

(Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China)

Abstract: The crack tip region in an elastic composite can be divided into three different zones. The constitutive equations corresponding to these zones and the extent of the saturated damage zones are derived. The damage isotropy in the largest saturated damage zone is expressed by utilizing the Monte Carlo technique to create uniform distribution microcracks. The interaction between the main crack and microcracks can be evaluated by an alternating iteration scheme. In the assumption of a dilute concentration of microcracks, the interaction among microcracks is neglected, and the stress intensity factor produced by interaction between the main crack and each microcrack can be superposed. Two sources of loading are analyzed; one is for the main crack microcrack interaction under an applied remote load, and the other is for the main crack microcrack interaction accompanied by the relief of residual stresses on the microcrack surfaces. The results show that two sources of loading can shield the main crack tip, and microcracks behind the main crack tip can create the most shielding whereas the micro-cracks ahead of the main crack tip play no role in shielding.

Key words: main-crack; microcrack; interaction; stress intensity factor; shielding

一些颗粒增强复合材料(如高级陶瓷、混凝土等)具有比劈裂其颗粒或颗粒边界的断裂能大多倍的宏观断裂韧性。这种现象可以运用颗粒复合材

料的微观理论去解释。一个普遍的观点是在裂纹延长的道路上, 存在微障碍, 如裂纹弯曲、倾斜、翘曲、桥联^[1,2]等变形造成裂纹的闭合或阻塞导致了材料

收稿日期: 2008-07-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50679022)

作者简介: 琚宏昌(1965-), 男, 河海大学博士, 主要从事工程力学、混凝土细观力学方面的研究, (E-mail) qhc410603@126.com。

韧性增强。另一种增韧机制可能是在断裂过程区形成的微裂纹对主裂纹的屏蔽作用从而增强了材料的韧性^[3]。

微裂纹增韧主要归因于两个潜在的原因^[4]。一个是主裂纹和微裂纹的相互作用(第一荷载源),这种作用引起主裂纹前端的应力重新分布,从而降低了微裂纹材料的刚性(增加了材料的韧性)。另一个原因是由于当微裂纹成核时残余应力的释放造成应力的重新分布(第二荷载源)。在文献中,有两种不同的方法去模拟微裂纹损伤,即连续性损伤和离散性损伤。前者考虑损伤区有效弹性模量减少,重点集中在损伤固体本构关系的推导上^[2,5]。而后者首先计算单一微裂纹与主裂纹的相互作用,然后再近似估算损伤区全体微裂纹对主裂纹的影响^[4,6]。

文中首先采用连续损伤力学导出损伤材料的本构关系,确定主裂纹尖端饱和和损伤区的大小,然后再应用离散方法来评估损伤区内微裂纹增韧的程度。微裂纹损伤区是指主裂纹尖端附近的断裂过程区^[7,8]。基于无限远载荷和微裂纹预先成核的假设,断裂过程区的形状和大小可以用解析表达式表示出来。考虑到颗粒复合材料的实际微观结构,可以认为,微裂纹是具有大小、位置和方向的颗粒面。另外,假定微裂纹损伤饱和区是一个圆形区域,位于主裂纹尖端周围,如图 2,损伤区内的微裂纹大小预先给定,其位置和方向基于 Monte-Carlo 技术随机产生。

1 本构关系

当颗粒复合材料承受拉伸载荷时,材料内部会发生损伤,这些损伤将导致复合材料弹性模量的衰减。对于发生损伤的弹性复合材料,本文导出了一种简单的三维唯象本构模型^[9]。

对于象混凝土这样的复合材料,在损伤之前是几乎不可压缩的,而由变形引起的损伤是以体积扩张的形式出现的。自然,可以选择体积应变或未损伤材料应变能的扩张部分 U^0 作为损伤程度的尺度。这意味着可以采用一个应变能函数:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}; D) = g(\Theta)U^0(\Theta) + h(\Theta)\Psi^0(e) \quad (1)$$

表示材料的损伤程度。其中 U^0 和 Ψ^0 分别是材料应变能函数的体积分量和偏量分量, D 是一个广义损伤参数, Θ 和 e 分别是无限小应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的体积分量和偏量分量,即

$$\Theta = \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}, e_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} - \Theta\delta_{ij}/3 \quad (2)$$

为了简单起见,可以假定损伤函数 g 和 h 是体积应变 Θ 的各向同性损伤函数。对于线弹性材料,函数 U^0 和 Ψ^0 可表示为:

$$U^0 = \kappa_0\Theta^2/2, \Psi^0 = \mu_0 e_{ij}e_{ij} \quad (3)$$

其中 κ_0 和 μ_0 分别是未损伤复合材料的体积模量和

剪切模量。

未损伤材料的应力张量 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 可表示为:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^0 = \kappa_0\Theta\delta_{ij} + 2\mu_0 e_{ij} \quad (4)$$

损伤材料的应力张量可表示为:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \kappa_0 g(\Theta)\Theta\delta_{ij} + 2\mu_0 h(\Theta)e_{ij} \quad (5)$$

损伤材料应力张量的体积应力分量和应力偏量分量分别随着 g 和 h 的变化而变化。函数 g 和 h 可通过复合材料单轴拉伸响应来决定。如对于单轴应力情况,即 $\boldsymbol{\sigma}_{11} = \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_{22} = \boldsymbol{\sigma}_{33} = 0$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{11} = \boldsymbol{\varepsilon}$, 由方程(5)可求得:

$$g(\Theta) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{3\kappa_0\Theta}, h(\Theta) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\mu_0(3\varepsilon - \Theta)} \quad (6)$$

函数 $g(\Theta), h(\Theta)$ 在体积应变 Θ 达到其临界值 Θ_c 之后,也达到了其饱和值 g_s, h_s 。

在饱和区域,本构关系可表示为:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^s = \kappa_s\Theta\delta_{ij} + 2\mu_s e_{ij} \quad (7)$$

其中 $\kappa_s = \kappa_0 g_s, \mu_s = \mu_0 h_s$

2 裂尖损伤饱和区域的大小

2.1 裂尖应力场

受力损伤弹性复合材料的主裂纹尖端区域由 3 个区域(如图 1)组成:1)邻近主裂尖被称作饱和区域的内核区,其行为由方程(7)控制;2)邻近内核区的过渡区,其行为由方程(5)控制;3)由方程(4)控制的外部弹性区域。

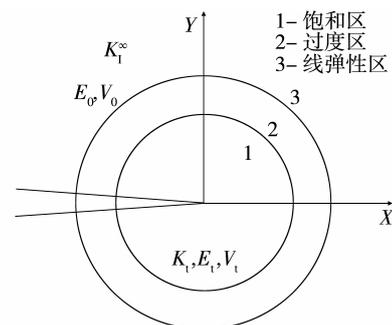


图 1 弹性固体内裂纹尖端损伤区域分布示意图

在远离主裂尖的外部区域,材料行为是线弹性各向同性的。相应于 I 型裂纹的渐近解可表示为^[10]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I^\infty}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (8)$$

其中 K_I^∞ 是无限远处弹性应力强度因子, $\hat{\sigma}_{ij}(\theta)$ 是在直角坐标系下的广义角应力分布,其表达式为:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} \\ \hat{\sigma}_{22} \\ \hat{\sigma}_{33} \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (9)$$

一般而言,过渡区域的解不能表示为相应于本构方程(5)的封闭形式。

内核区或饱和区域的材料行为由方程(8)控制,这种应力应变关系可很容易地从均匀场的二阶能量势能导出。因此,饱和区域的渐近解可根据^[10]表示为:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (10)$$

其中 K_I 是局部或主裂尖应力强度因子, $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ 是待定的广义角应力分布。比较方程(4)和方程(7)可知:损伤饱和区域的角分布 $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ 与主裂尖外部区域的角分布 $\hat{\sigma}_{ij}(\theta)$ 相同,即

$$\hat{\sigma}_{ij}(\theta) = \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (11)$$

如果假定局部裂纹的产生与传播由局部应力强度因子 K_I 控制,那么,找到 K_I 和远场应力强度因子 K_I^∞ 间的关系将是十分重要的。一般来说,由于过渡区和饱和区对裂尖的屏蔽作用,两个应力强度因子 K_I 和 K_I^∞ 是不相等的。

2.2 K_I 和 K_I^∞ 的关系

由文献^[10]可知,不依赖路径的 J 积分可表示为

$$J = \int_{\Gamma} [Wn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}] ds \quad (12)$$

其中 Γ 是环绕主裂尖的周线, W 是应变能密度, n 是环绕周线的单位外法向。在线弹性力学中,能量释放率 J 与 I 型裂纹应力强度因子的关系可表示为:

$$J = \frac{K_I^{\infty 2}}{H} \quad (13)$$

其中,

$$H = \begin{cases} E \\ E/(1-\nu^2) \end{cases} \quad (14)$$

分别对应于平面应力和平面应变问题。

当环绕主裂尖的周线 Γ 收缩无限接近于主裂尖时,可将主裂尖的能量释放率 J_I 看作由环绕线弹性区域的远处载荷为裂纹扩展提供的能量流。因此,相应于远处载荷的能量释放率 J 与主裂尖能量释放率 J_I 的关系为:

$$J = J_I \quad (15)$$

利用方程(13)和(15),主裂尖应力强度因子 K_I 和远处应力强度因子 K_I^∞ 的关系可表示为

$$\frac{K_I}{K_I^\infty} = \sqrt{\frac{H_s}{H_0}} \quad (16)$$

在平面应力情况下^[11],取屏蔽率 $K_I/K_I^\infty = 0.5$ 。

2.3 饱和区域尺寸

利用饱和区的体积应变 Θ_s 可以估算饱和区域的范围。由式(2)、(5)和(11)可以导出:

$$\Theta_s = \frac{\sigma_{kk}}{3\kappa_s} = \frac{2}{3\kappa_s} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_s}} (1 + \tilde{\nu}) \cos(\theta/2) \quad (17)$$

其中对于平面应力情况下 $\tilde{\nu} = 0$, 对于平面应变情况下 $\tilde{\nu} = \nu_s$ 。由(17)式,饱和区域的边界可表示为:

$$r_s(\theta) = \frac{1}{9\pi} \left(\frac{K_I}{\kappa_s} \right)^2 \frac{(1 + \tilde{\nu})^2}{\Theta_s^2} \cos^2(\theta/2) \quad (18)$$

令 $\theta = 0$, 得饱和区域的最大范围为:

$$R = \frac{1}{9\pi} \left(\frac{K_I}{\kappa_s} \right)^2 \frac{(1 + \tilde{\nu})^2}{\Theta_s^2} \quad (19)$$

本文将以 R 为界,来分析在此范围内的微裂纹对主裂纹的影响。

文献^[12]测量了各种砂子含量饱和灰泥混凝土试样的弹性模量。为了增加计算结果的真实性,本文使用了文献^[12]的部分实验数据。即取体积分量为 40% 时的实验值: $\kappa_0 = 27.69$ GPa, $\mu_0 = 16.91$ GPa, $\nu_0 = 0.246$, $E_0 = 42.5$ GPa。

对于无限大平板,在平板的中央有一长度为 20 mm 的贯穿裂纹,在垂直于裂纹的方向作用有 $\sigma^\infty = 1.0$ MPa 的应力,饱和区体积模量取 $\kappa_s = 6.92$ GPa,饱和区边界的体积应变 $\Theta_s = 5.10 \times 10^{-5}$,由式(19)可得饱和区最大范围 $R = 4.46$ mm。

3 裂纹相互作用的迭代方法

为了进行裂纹间相互作用的分析,建立如下离散模型:如图 2,在无限大平板内,有一长度为 $2a$ 的主裂纹,在其附近(裂纹饱和区内)存在任意位置和方向,长度为 $2c = R/10$ 的微裂纹,在远处沿着主裂纹的法向,作用有 $K_I^\infty = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$ 的载荷。其中 X, Y 表示原点在主裂纹中心的坐标轴, x, y 表示主裂纹尖端的坐标。

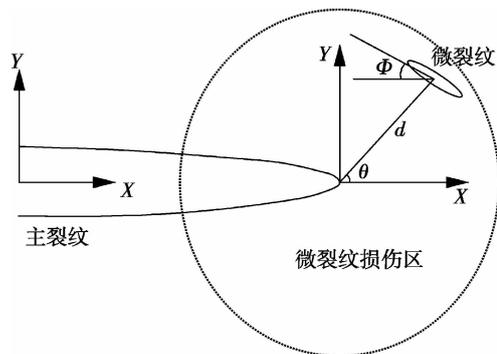


图 2 圆形损伤区内主裂纹和微裂纹位置关系

在线弹性断裂力学中,根据 Bueckner 叠加原理,可将问题分解为两个子问题,如图 3。为了描述脆性材料中残余应力的影响,假定残余应力 σ_{Res}, τ_{Res} 沿着微裂纹面均匀分布。主裂纹和微裂纹面上的表

面力为:

$$p_{\text{MAIN}}^0 = \sigma^\infty = \frac{K_1^\infty}{\sqrt{\pi a}}, q_{\text{MAIN}}^0 = 0 \quad (20)$$

$$p_{\text{MIC}}^0 = \frac{K_1^\infty}{\sqrt{\pi c}} \cos^2 \theta, q_{\text{MIC}}^0 = \frac{K_1^\infty}{\sqrt{\pi c}} \sin \theta \cos \theta \quad (21)$$

对于图 3c, 采用轮流迭代法^[13,14], 可以释放裂纹的表面张力。在每一个荷载源系统中, 运用 Westergard 应力函数^[15]可以计算裂纹面上的应力分布。在每一迭代循环中, 只有一个裂纹存在, 其余的裂纹可看作是虚拟裂纹。为了数值处理上的方便, 将裂纹面上的常张力沿着每一裂纹长度平均, 得到沿裂纹面均匀分布的虚应力。将带有负的虚应力场的每一虚拟裂纹强加于现有的应力场中去释放裂纹面张力, 并计算该微裂纹与主裂纹的相互作用力。重复这一过程, 直到所有裂纹进行迭代为止。这种

迭代方法有一个明显的优势, 即已经考虑了裂纹间的相互作用。由裂纹间的相互作用引起的主裂纹尖端应力强度因子的第 k 次增量 ($\Delta K_{\text{MAIN}}^k(\pm a)$) 可以通过对文献[15]的结果(集中力结果)进行积分得到, 即

$$\Delta K_{\text{I,MAIN}}^k(\pm a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a p_{\text{MAIN}}^k(X) \sqrt{\frac{a \pm X}{a \mp X}} dX$$

$$\Delta K_{\text{II,MAIN}}^k(\pm a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a q_{\text{MAIN}}^k(X) \sqrt{\frac{a \pm X}{a \mp X}} dX \quad (22)$$

其中 $p_{\text{MAIN}}^k(X)$ 和 $q_{\text{MAIN}}^k(X)$ 是在第 k 次迭代中沿主裂纹分布的法向和切向应力函数。由微裂纹引起的总应力强度因子 ($\Delta K_{\text{I}}, \Delta K_{\text{II}}$) 可以将每一次迭代循环中的 $\Delta K_{\text{I,MAIN}}^k, \Delta K_{\text{II,MAIN}}^k$ 分别叠加而得到。

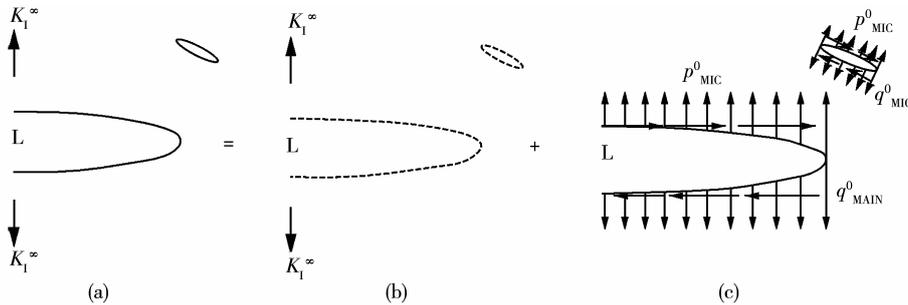


图 3 含裂纹固体 Bueckner 叠加原理的分解

4 统计试验

根据混凝土的微结构特点, 本文认为材料体中的微裂纹伴生存在, 不考虑裂纹的形成和增长, 重点考察这些业已存在的裂纹间的相互作用。认为损伤区域是一个以主裂纹尖端为中心, 半径为 R 的圆形区。微裂纹在损伤区域内随机均匀分布, 微裂纹-主裂纹及微裂纹-微裂纹不相交。

4.1 微裂纹分布

在二维平面内, 微裂纹密度 ρ 可根据特征面积 A 内含有 N 个特征长度为 $2c$ 的微裂纹计算得到^[16];

$$\rho = \frac{1}{A} N (2c)^2 \quad (23)$$

文献[3,17]发现: 在氧化铝-氧化锆中微裂纹密度为 $0 \sim 0.24$, 而硅-碳合金中的微裂纹密度为 $0.31 \sim 0.47$ 。在微裂纹浓度稀疏的假设前提下, 忽略了微裂纹间的相互作用。然而, 文献^[8,18]指出, 微裂纹间的相互作用并不像预料的那样在那么小的范围内产生影响。因此, 假定主裂纹尖端附近微裂纹损伤区域的平均尺寸为饱和区域的最大区域, 即

$A = \pi R^2$ 。本文进行了在微裂纹损伤区含有 40、60、80、100 个微裂纹, 相应的微裂纹密度 ρ 分别为 0.127、0.191、0.255、0.318 的研究。

考虑到混凝土材料的颗粒微结构, 可以认为其微裂纹是具有大小、位置和方向的颗粒面。因此, 微裂纹的长度保持为 $2c = R/10$ 的常数, 而其位置和方向随着随机分布的几何参数 (d, θ, φ) 的变化而变化, 见图 2。均匀分布的几何变量能导致微裂纹的最大分散, 而就颗粒的边界来说, 可以保持微裂纹的统计无序。因此, 微裂纹的损伤可以认为是均匀各向同性的。借助于 Monte-Carlo 技术及统计分布函数, 使几何参数均匀分布在 $0 < d \leq R$, $-\pi < \theta < \pi$ 和 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 内。对于每一个裂纹密度, 每一种损伤区域采用 30 个试样进行试验, 然后对结果分别进行平均, 得到各种裂纹密度下各损伤区域平均应力强度因子。

4.2 损伤区域的数值模拟

在 Monte-Carlo 模拟中, 考虑三种不同的损伤区域, 即图 4a 表示的主裂纹尖端周围 ($0 < d \leq R$, $-\pi < \theta < \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) 的区域; 图 4b 表示的主裂纹前方 ($0 < d \leq R, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

区域和图 4c 表示的主裂纹尖后方 ($0 < d \leq R$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) 区域。这些情况分别

用来评估主裂纹尖端不同区域内各向同性(微裂纹)损伤对主裂纹的屏蔽程度。

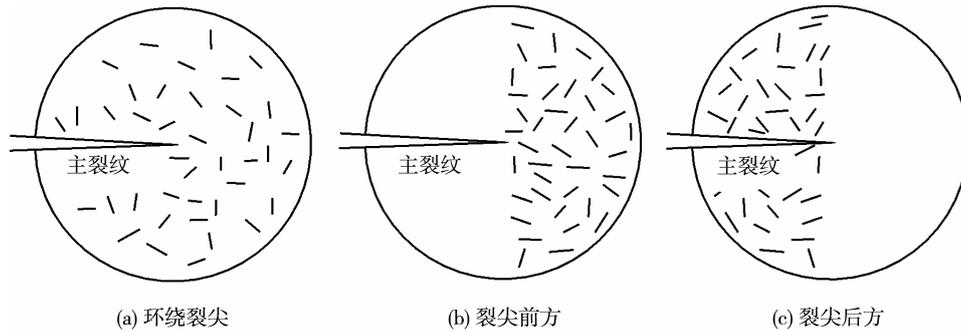


图 4 在圆形损伤区内分布 40 个微裂纹的示意图

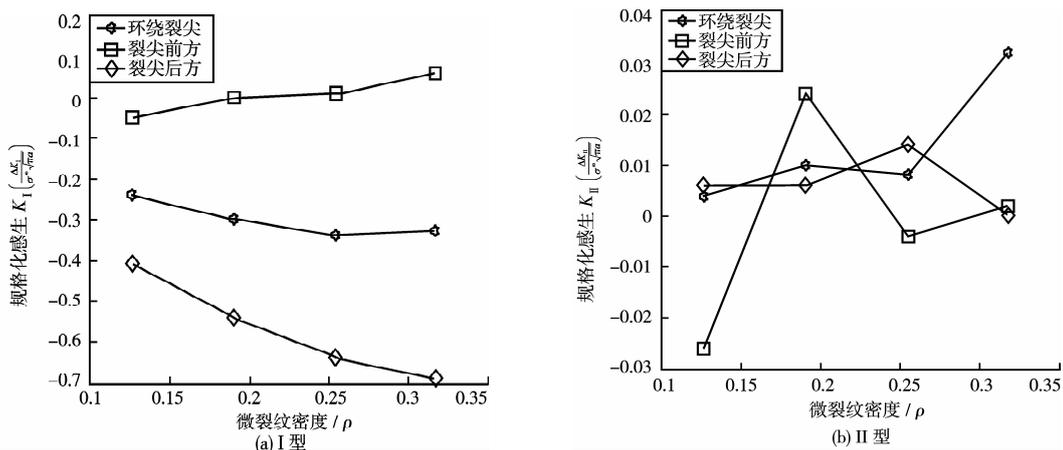


图 5 不同微裂纹密度和损伤区主裂纹尖端的规格化感生 I 型和 II 型应力强度因子

对于第一荷载源(在无限远荷载作用下主裂纹和微裂纹的相互作用),主裂纹尖端的统计结果 ΔK_I , ΔK_{II} 分别绘于图 5(a)、5(b)中。图 5(a)表明,环绕裂尖微裂纹存在屏蔽效应,并且随着裂纹浓度的增大而提高,微裂纹起到了增韧效果,主裂纹尖端后的微裂纹区提供了最大屏蔽效应,而主裂纹尖端前的微裂纹区几乎没有屏蔽效应。图 5(b)表明,在各种情况下 II 型应力强度因子都远远小于 I 型应力强度因子,同时,

ΔK_{II} 不稳定,有时可能随着微裂纹浓度升高而增大,说明随机分布应力可能导致反对称应力场。

对于第二荷载源(伴随着微裂纹面上残余应力的释放主裂纹和微裂纹的相互作用),微裂纹释放的均匀残余应力表示为 $\sigma_{Res} = \tau_{Res} = S^R$ 。主裂纹尖端的统计结果 ΔK_I 、 ΔK_{II} 分别绘于图 6(a)、6(b)中。比较图 6 和图 5 可知,第二荷载源与第一屏荷载源引起的屏蔽结果类似。

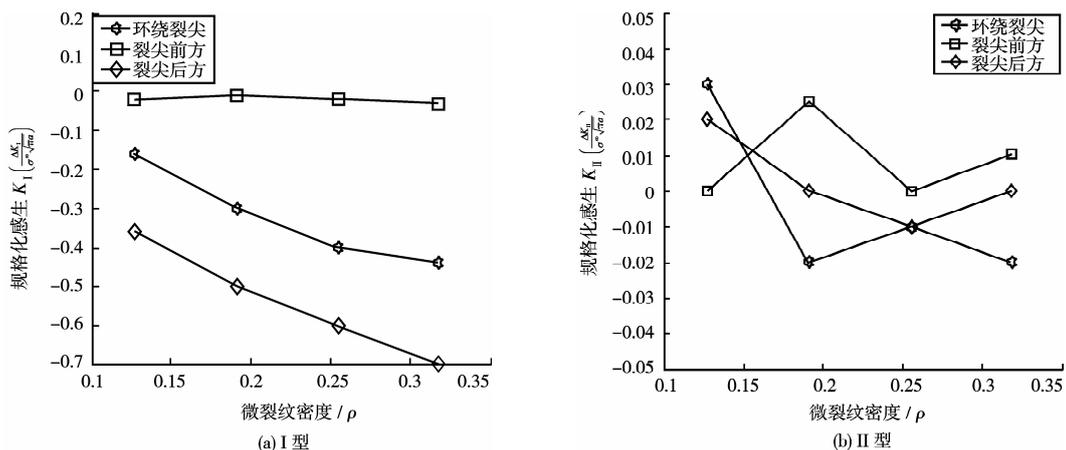


图 6 残余应力引起的不同微裂纹密度和损伤区内主裂纹尖端的规格化感生 I 型和 II 型应力强度因子

5 结 论

1)对于承受拉伸载荷而发生损伤的弹性复合材料,给出了一种简单的本构模型。并利用裂尖应力场及 K_I 和 $K_{I\infty}$ 的关系导出了损伤饱和区域范围。

2)在最大损伤饱和区内,应用 Monte-Carlo 技术产生分布均匀的微裂纹,采用轮流迭代法,从统计学的角度分别评价了两个荷载源作用下主裂纹和微裂纹的相互作用。

3)两种荷载源在各向同性损伤假设前提下,均可增强混凝土的韧性。且主裂纹尖端后方的微裂纹起到了主要的屏蔽作用,主裂纹前方的微裂纹没有屏蔽作用。

参考文献:

- [1] FABER K T, EVANS A G. Crack deflection processes (I): theory[J]. *Acta Metallurgica*, 1983, 31(4): 565-576.
- [2] EVANS A G, FABER K T. Crack-growth resistance of microcracking brittle materials [J]. *Journal of the American Ceramic Society*, 1984, 67(4): 255-260.
- [3] RUHLE M, EVANS A G, MCMEEKING R M, et al. Microcrack toughening in alumina/zirconia [J]. *Acta Metallurgica*, 1987, 35: 1701-1710.
- [4] HUTCHINSON J W. Crack tip shielding by microcracking in brittle solids[J]. *Acta Metallurgica*, 1987, 35: 1605-1619.
- [5] ORITZ M. Continuum theory of crack shielding in ceramic[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1987, 54: 54-58.
- [6] KACHANOV M. Elastic solids with many cracks: a simple method of analysis[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1987, 23(1): 23-43.
- [7] GONG S X. On the formation of near-tip microcracking and associated toughening effects [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 50(1): 29-39.
- [8] BRENCICH A, CARPINTERI A. Stress field interaction and strain energy distribution between a stationary main crack and its process zone [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1998, 59(6): 797-814.
- [9] RAVICHANDRAN G, LIU C T. Modeling constitutive behavior of elastic particulate composites undergoing damage [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, 32: 979-990.
- [10] RICE J R. *Mathematical analysis in the mechanics of fracture*[M]. Academic Press, NY, 1968.
- [11] CHARALAMBIDES P, MCMEEKING R M. Near tip mechanics of stress induced micromaking in brittle materials[J]. *Mechanics of Materials*, 1987(6): 71-87.
- [12] WANG J A, LUBLINER J, MONTEIRO P J M. Effect of ice formation on the elastic moduli of cement paste and mortar[J]. *Cement and Concrete Research*, 1988, 18(6): 874-885.
- [13] KUANG J H, CHEN C K. Alternating iteration method for interacting multiple crack problems [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 1998, 21: 743-752.
- [14] CAI H, FABER K T. On the use of approximation method for microcrack shielding problems[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1992, 59(3): 497-501.
- [15] TADA H, PARIS P C, IRWIN G R. *The stress analysis of cracks handbook* [J]. Paris Productions Incorporated (and Del Research Corporation), Paris, 1985.
- [16] KACHANOV M. Elastic solids with many cracks and related problems[J]. *Advances in applied mechanics*, 1994, 30: 259-445.
- [17] HAN L X, SURESH S. High-temperature failure of an alumina-silicon carbide composite under cyclic loads: mechanism of fatigue crack tip damage[J]. *Journal of the American Ceramic Society*, 1989, 72(7): 1233-1238.
- [18] 胡江春, 王红芳, 何满潮, 等. 交流阻抗谱法及其在岩石微裂纹检测中的应用[J]. *岩土工程学报*, 2007, 29(6): 853-856.
- HU JIANG-CHUN, WANG HONG-FANG, HE MAN-CHAO, et al. Impedance spectroscopy and application to test the microcrack of rock[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, 29(6): 853-856.

(编辑 陈 蓉)