

# 平面钢管桁架平面外稳定混合有限元分析

黄政华<sup>1,2</sup>, 张其林<sup>1</sup>, 季俊<sup>1</sup>

(1. 同济大学 建筑工程系, 上海 200092; 2. 贵州大学 土木建筑工程学院, 贵阳 550003)

**摘要:**平面外失稳通常是无支撑平面钢管桁架在极限荷载作用下的破坏形式之一。在平面钢管桁架平面外稳定问题的求解方法中,采用梁-板壳混合有限元模型在完成整体稳定分析的同时,还可以得到节点区域实际的受力状况,且具有求解精度较高、单元数量较少的特点。根据混合有限元的基本原理,给出了混合单元交界上的结点约束方程。针对混合有限元求解方程的特点,为避免在求解上遇到数值困难,给出了混合单元模型在单元划分、求解方法上的原则和建议。数值算例与试验结果表明,混合有限元模型计算耗时较少,能较为准确的分析平面钢管桁架平面外失稳过程,提出的求解方法及建议较好的避免了数值困难的产生。

**关键词:**有限元法;极限荷载;平面外稳定;平面管桁架;混合模型;约束方程;数值困难

**中图分类号:**TU311.4 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2009)03-0006-05

## Analysis of Out-of-plane Stability for Planar Tubular Truss with Mixed Finite Elements Method

HUANG Zheng-hua<sup>1,2</sup>, ZHANG Qi-lin<sup>1</sup>, JI Jun<sup>1</sup>

(1. Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China; 2. School of Civil Engineering and Architecture, Guiyang 550003, P. R. China)

**Abstract:** Out-of-plane instability is usually one of the failures for planar tubular truss without out-of-plane braces under ultimate load. The mixed model of beam and shell elements, with the characteristics of high solving precision and less elements, can undertake overall stability analysis as well as the joints mechanic property when solving the issue of out-of-plane stability. Based on the principle of mixed finite element, nodes constraint equations at the interface between beam elements and shell elements were derived. And advices on the element division and solving method were proposed in order to avoid numerical difficulty in solving the mixed finite element equations. With the numerical solution and experimental test, it was found that the out-of-plane instability process can be expressed accurately with less time-consuming by the proposed method and the proposed solution.

**Keywords:** finite element method; ultimate load; out-of-plane stability; planar tubular truss; mixed model; constraint equation; numerical difficulty

钢管桁架是一种造型优美,承载力特性较好的结构形式,目前已经广泛应用于各类公共建筑的屋面与墙面结构中。由于屋面和墙面材料的轻质化,平面钢管桁架的两个主管都可能受到拉力或压力,

对于无面外支撑的平面钢管桁架,屋面和墙面系统只能对平面钢管桁架的一侧主管提供面外支撑作用,因而其平面外的整体稳定往往控制了其极限承载能力。在桁架的面外失稳极限承载力分析中,桁

收稿日期:2008-10-15

基金项目:上海市科委世博科技专项项目;世博轴及地下综合体关键技术研究(08DZ0580303)

作者简介:黄政华(1979-)男,博士研究生,主要从事建筑结构分析计算研究,(E-mail)hzhtz@yahoo.cn。

张其林(联系人),男,研究员,博士生导师,(E-mail)zhangqilin@mail.tongji.edu.cn。

架节点的面外转动刚度影响显著,为此,普通的刚接或铰接杆系有限元模型已不能精确分析其平面外稳定极限承载力。目前主要有引入半刚性节点连接单元的杆系有限元分析<sup>[1-2]</sup>,考虑节点刚度影响的简化计算长度法<sup>[3-4]</sup>以及桁架全板壳单元有限元分析<sup>[5]</sup>3种方法可以考虑节点刚度对结构整体静力性能的影响。这3种方法各有优缺点:全壳元分析模型精度最高,但缺点是,建模复杂,单元数量巨大,对计算机性能要求较高,计算机时较长,难以适应设计对时间的要求;带连接单元的杆系分析,建模简单,单元数量少,计算耗费机时极少,但缺点是,需要事先确定单元节点的非线性刚度特性,而节点的刚度特性与其受力非线性相关。理论上,每个节点的刚度特性都是不同的。要精确考虑,需事先得到节点的受力状况,并进行节点分析,得到每个节点在各种受力状况的刚度特性,这在设计上过于繁琐,故杆系分析中,节点刚度一般选取等效的统一的线性刚度,分析结果一般也能满足工程需要的精度,但很难做到精度较高;计算长度法是对杆系有限元方法的进一步简化,只能考虑线性的节点刚度,虽然计算简洁、可手算,但缺点同样也是无法获得较高的精度。此外,基于杆系的有限元整体分析无法同时对节点的受力分析。为降低计算机时的消耗,同时也使分析结果与桁架真实的力-变形状态更为接近,采用板壳单元以及梁单元混合模型<sup>[6-7]</sup>进行非线性有限元分析是一种较好的选择。混合模型用板壳单元模拟桁架节点区域,用梁单元模拟节点区域以外的杆件部分,能充分适应不同区域力学分析的精度要求,由于仅在节点部分区域采用板壳单元,与全板壳单元模型相比,单元数明显减少,可以显著减少分析时间。此外,采用混合单元模型在完成桁架整体分析的同时,也完成了对各个节点的受力分析,这对于复杂受力节点的设计具有特别意义。该文根据混和有限元的约束变分原理,通过对有限元模型施加单元交界约束方程,对钢管桁架实现了平面外稳定极限承载力分析,并根据钢管桁架混合有限元模型的特点,对单元划分,求解方法提出一定的建议,以顺利实现混合有限元分析。

## 1 混合有限元基本原理

混合有限元方法与一般有限元方法的主要区别在于采用多种单元离散结构模型。由于多种单元的使用,不可避免的存在不同单元在单元交界上的位移协调问题。即不同单元交界需满足附加的位移协调条件或几何约束条件。满足约束条件的有限元分析的理论基础为约束变分原理<sup>[8-9]</sup>。设单元交界上的几何约束条件为

$$R(u) = 0 \quad (1)$$

结构在整个求解域的势能泛函为  $\Pi$ ,将约束条件引入泛函,需要构造一个修正了的约束泛函,构造约束泛函常用的方法有拉格朗日乘子法和罚函数法。拉格朗日乘子法是将约束方程乘上一个拉格朗日乘子  $L^T$  并在单元交界域  $\Gamma$  上积分,与原有势能泛函  $\Pi$  一起构造约束泛函  $\Pi'$

$$\Pi' = \Pi + \int_{\Gamma} L^T R(u) d\Gamma \quad (2)$$

罚函数法是将约束条件以乘积的形式引入泛函<sup>[10]</sup>

$$\Pi'' = \Pi + \rho \int_{\Gamma} R^T(u) R^T(u) d\Gamma \quad (3)$$

其中  $\rho$  称为罚数,当  $\Pi$  本身是解的极小值问题,  $\rho$  取正数。由约束泛函得到的近似解只是近似满足约束条件,当  $\rho$  值越大,约束条件的满足就越好。

对满足附加约束条件的约束泛函  $\Pi'$  或  $\Pi''$  应用最小势能原理,

$$\begin{aligned} \text{或} \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi''}{\partial u} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

即可得到满足附加单元交界约束条件的有限元求解方程。

## 2 混合单元选择及单元交界面约束方程

以圆钢管截面的桁架为例,根据桁架几何形状、受力状况的特点,分析单元选取等参板壳单元与梁单元。其中板壳单元用来模拟节点区域,最为符合几何构型实际情况,力学假定最少,能较为准确的反映节点区域复杂的应力、变形情况。本文分析的主要是桁架整体稳定极限承载力,需要考虑的主要是节点变形对结构整体行为的影响。因此,钢管桁架节点用板壳单元模拟。对于节点区域之外的杆件部分,其力、变形状况近似满足一定的力学假定,可以用梁单元来模拟,见图1。

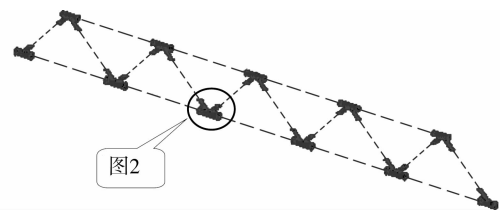


图1 平面圆钢管桁架混合有限元模型

为在分析前就能确定约束状况,一般应选取变形遵循一定规律或假定的区域作为不同单元的单元交界。

单元交界的选择需满足2个基本条件:1)单元交界是节点局部变形影响区域的单元交界,位移或变形协调条件符合现有力学假定的要求且能在计算

前确定;2)相邻板壳与梁单元均能满足或近似满足单元交界上的位移协调条件。

根据圣维南原理,节点局部变形仅限于节点局部区域,在距节点连接处一定距离后,圆管截面变形逐渐遵循薄壁梁单元截面的变形规律,即满足刚周边及平截面假定。整体壳元模型分析结果表明,距节点连接处一倍圆管直径处,节点局部变形的影响非常小,此处圆管截面符合单元交界的基本条件,可作为混合单元的单元交界,见图 2。

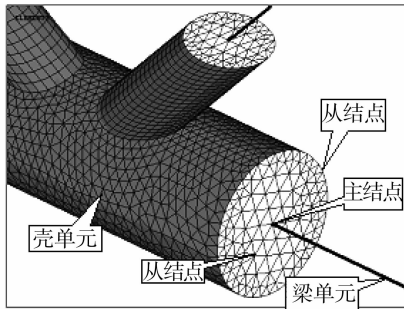


图 2 壳单元与梁单元交界处理

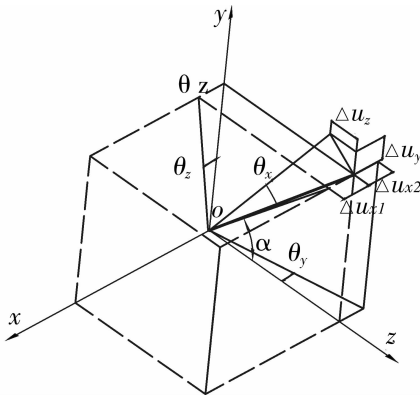


图 3 交界面上 oi 杆的位移

由图 2 可见,单元交界上的约束关系,反映为单元交界面上杆端结点(主结点)与单元交界面上板壳单元结点(从结点)的位移约束关系。

以主结点  $o$  与一个从结点  $i$  为例,建立基于刚周边及平截面变形协调条件的几何约束方程。由于上述假定,  $oi$  可视为一刚性杆,在结构定义空间做刚体平动和刚体转动,主结点的位移参数为  $u_x^o, u_y^o, u_z^o$ , 从结点的位移为  $u_x^i, u_y^i, u_z^i$ , 单元交界上所有结点转角位移均为  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ , 主从结点由刚体转动产生的相对位移为  $\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z$ , 见图 3。主结点与从结点位移满足下式

$$\begin{cases} u_x^i = u_x^o + \Delta u_x \\ u_y^i = u_y^o + \Delta u_y \\ u_z^i = u_z^o + \Delta u_z \end{cases} \quad (5)$$

实际结构为小变形,忽略相对位移的高阶微量,由刚体转动的几何关系得

$$\begin{cases} \Delta u_x = \Delta u_{x1} + \Delta u_{x2} = \rho \theta_z \sin \alpha - \rho \theta_y \cos \alpha \\ \quad \quad \quad = (y_i - y_o) \theta_z - (z_i - z_o) \theta_y \\ \Delta u_y = \rho \theta_x \cos \alpha = (z_i - z_o) \theta_x \\ \Delta u_z = -\rho \theta_x \sin \alpha = -(y_i - y_o) \theta_x \end{cases} \quad (6)$$

上式中,  $\rho$  为刚性杆长度值,  $x_i, y_i, z_i$  为从结点  $i$  在整体坐标系下的坐标值;  $x_o, y_o, z_o$  为主结点  $o$  在整体坐标系下的坐标值。

将式(6)代入(5),并推广到单元交界上的  $n$  个板壳单元结点,得到满足单元交界的节点位移协调条件的约束方程组为

$$\begin{cases} u_x^i - u_x^o - (y_i - y_o) \theta_z + (z_i - z_o) \theta_y = 0 \\ u_y^i - u_y^o - (z_i - z_o) \theta_x = 0 \\ u_z^i - u_z^o + (y_i - y_o) \theta_x = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_x^n - u_x^o - (y_n - y_o) \theta_z + (z_n - z_o) \theta_y = 0 \\ u_y^n - u_y^o - (z_n - z_o) \theta_x = 0 \\ u_z^n - u_z^o + (y_n - y_o) \theta_x = 0 \end{cases} \quad (7)$$

在实际计算过程中,根据前述约束变分的原理,可通过拉格朗日乘子法和罚函数法引入上述位移约束方程。由于约束方程以显式的形式存在,拉格朗日乘子法可简化为直接引入的形式,即根据约束方程,将混合单元交界面上的板壳单元结点的位移用梁系单元结点的位移表示并引入到结构整体模型板壳部分的刚度矩阵和荷载向量中,经转换后的板壳部分刚度矩阵和荷载向量可按通常的步骤与梁系部分的刚度矩阵和荷载向量合成结构模型总的刚度矩阵和荷载向量,从而得到结构混合有限元模型总的求解方程组。

### 3 求解方法比较与选择

混合有限元的刚度方程具有刚度分量差异大的特点,有限元刚度方程普通采用直接求解方法<sup>[11]</sup>,部分主元值与较大值刚度分量相比,将变得非常小,在高斯消去法中由于数值精度的限制,将被视为零,从而带来数值求解的困难,见图 4。

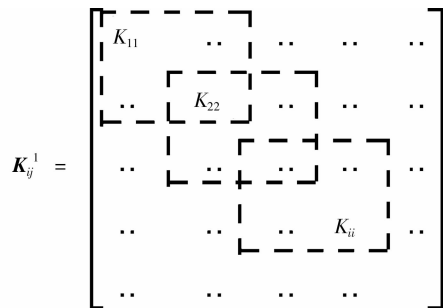


图 4 高斯直接消元法的消元范围

例如,弯曲梁单元的刚度方程为<sup>[9]</sup>

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

而平板板壳单元的刚度矩阵为

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} K_{ij}^m & & & \\ & & & \\ & & K_{ij}^b & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中,  $K_{ij}^m = \iint (B_i^m)^T D^m B_j^m dx dy$ , 表示薄膜应力状态的刚度分量;  $K_{ij}^b = \iint (B_i^b)^T D^b B_j^b dx dy$ , 表示平板弯曲状态的刚度分量。

由上两式可以看出, 决定刚度分量数量级的主要因素是板壳单元和梁单元的横截面面积及截面惯性矩, 在本文数值算例的混合有限元分析中, 二者差异较大, 横截面面积比值一般低于  $1.5 \times 10^{-3}$ , 截面惯性矩比值一般低于  $3.6 \times 10^{-6}$ 。因此, 在混合有限元分析中, 单元网格划分应均匀, 应避免极端单元的出现, 如几何尺寸极小单元, 几何病态单元等。由于相贯节点几何构型复杂, 单元划分时要完全避免此类单元的出现是非常困难的。为解决直接求解稀疏矩阵可能造成的数值困难, 可使用改进的直接解法, 如波前法<sup>[12-14]</sup>。

波前法的求解特点是: 刚度矩阵  $K$  和载荷列阵  $P$  不按自然编号进入内存而按计算时参加运算的顺序排列; 在内存中只保留尽可能少的一部分  $K$  和  $P$  中的元素。在波前法中, 按单元顺序扫描的自由度集成完毕后, 以该自由度作为主元对其它行列的元素进行消元修正, 然后再将该自由度消去, 对每一个自由度重复上述过程, 待全部自由度集成完毕(见图 5), 再按消元的顺序, 由后向前逐个恢复波前, 调入送到外存的元素, 依次回代求解。

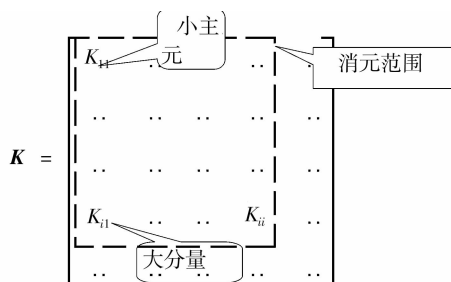


图 5 波前法中一个主元的消元范围

由于波前法的消元过程, 是在一个波前内进行, 且波前只保留最少的刚度矩阵  $K$  的元素, 与稀疏矩阵的直接消元相比, 大大降低了主元相对为零的可能性。因此, 在混合有限元方程的直接解法中, 推荐用波前法。

另外一种避免数值困难的方法是有限元求解方程的迭代解法<sup>[15-16]</sup>, 如雅可比迭代法(Jacobi), 高斯-赛德尔迭代法(Gauss-Seidel)等。迭代解法由于没有消元过程, 可以避免直接解法在消元过程中可能出现的数值精度问题, 但缺点是可能出现不收敛的情况。

#### 4 数值算例及其与试验结果的比较

为验证前述混合有限元分析方法的有效性。本文对一实际的平面钢管桁架进行混合有限元分析, 并与试验结果进行了比较。该平面圆管桁架如图 6 所示, 钢管材质为 Q235, 上弦主管两端 3 个方向的平动位移及下弦主管出平面  $Z$  向位移被限制, 上弦节点处承受向上的集中荷载  $P$ , 施加的总荷载  $P_a = 30$  kN。缺陷按实际测得的初始弯曲选取, 最大值为桁架跨度的  $1/1700$ 。分析软件为通用有限元软件 ANSYS。

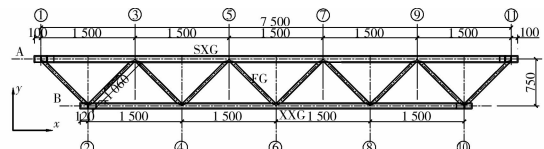


图 6 数值算例中的平面钢管桁架

根据前述方法, 建立钢管桁架混合有限元计算模型, 根据式(7)给不同单元交界面施加的约束方程。在混合有限元模型的非线性分析中, 考虑几何和材料非线性, 得到桁架的极限荷载为 21.6 kN ( $0.72 P_a$ )。在极限荷载作用下, 无平面外支撑的下弦主管开始出现明显的出平面弯曲变形, 见图 7。分析过程同时也表明有限元方程的直接求解方法遭遇到一些数值困难并导致求解失败, 当本文前述方法得到运用时, 数值困难得到有效避免, 求解过程顺利。

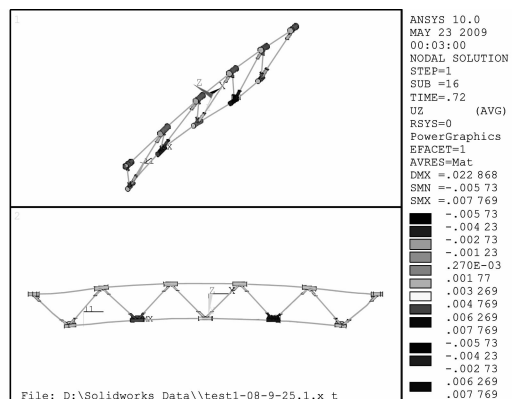


图 7 极限荷载下出平面位移(10 : 1)

对图 6 所示桁架进行相同荷载及约束条件下的极限承载力试验,得到桁架的极限承载力为 22.8 kN ( $0.77 P_a$ ),混合有限元结果与其仅相差 5%,极限荷载下桁架的变形见图 8。从图中也可以明显看出受压下弦主管发生了出平面 S 形的弯曲变形。



图 8 试验桁架极限荷载下的变形

根据混合有限元分析及极限承载力试验结果,可以得到桁架下弦主管中间结点的全加载过程荷载-位移曲线,见图 9、10。从图中可以看出,混合有限元计算结果与试验结果基本吻合,当荷载临近极限荷载时,桁架的平面内刚度几乎没有降低,但平面外刚度显著下降,表明承载力极限状态为平面外失稳。

有限元数值算例及试验结果表明,混合有限元方法求解钢管桁架的平面外稳定极限承载力,可靠性好,计算效率高且精确度较好。

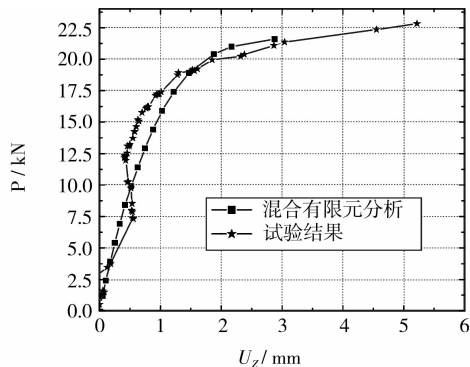


图 9 荷载-平面外位移曲线

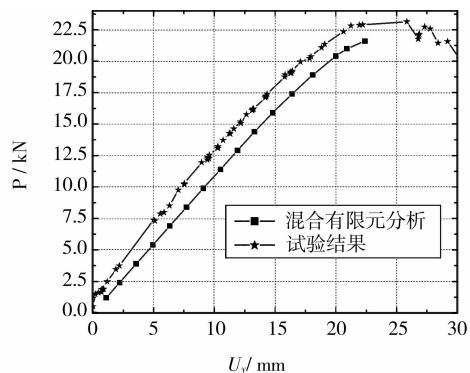


图 10 荷载-平面内竖向位移曲线

## 5 结 论

根据约束变分原理,通过在混合交界上施加位移约束方程的方法,实现了对平面桁架的混合有限元求解。通过对求解方法的分析,对单元划分,求解方法的选择提出一定的建议。数值算例与试验结果证明,运用本文提出的混合有限元分析方法能较为准确的分析平面钢管桁架的平面外稳定问题,且具有单元数量少,求解精度高,计算耗时少的优点。

### 参考文献:

- [1] 胡毓仁,陈伯真,马建平. 海洋平台导管架结构分析中管节点局部柔度的等效单元[J]. 计算结构力学及其应用, 1992,9(3):284-295.  
HU YU-REN, CHEN BO-ZHEN, MA JIAN-PING. Equivalent element representing local flexibility of tubular joints in structural analysis of jacket structure of offshore platforms [J]. Journal of Computational Structural Mechanics and Applications, 1992,9(3):284-295.
- [2] CHAKRABARTI P, MUKKAMALA A, ABU-ODEH I, et al. Effect of joint behavior on the reassessment of fixed offshore platforms in the bay of campeche, Mexico [C]//Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 2005: vol A. Halkidiki(Greece), 2005: 135-145.
- [3] MAGEIROU G E, GANTES C J. Buckling strength of multi-story sway, non-sway and partially-sway frames with semi-rigid connections [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2006,62(9): 893-905.
- [4] 王静峰,李国强. 有侧移半刚性连接组合框架柱的有效长度系数[J]. 工程力学, 2007, 24(3):71-73.  
WANG JING-FENG, LI GUO-QIANG. Effective length factor of columns in sway and semi-rigid composite frames[J]. Engineering Mechanics, 2007,24(3):71-73.
- [5] MOUNIR E M, KASSIM M T. Finite-element analysis of steel girder highway bridges[J]. Journal of Bridge Engineering(ASCE), 1997,2(3):83-87.
- [6] 朱慈勉,沈祖炎. 薄壁柱相关屈曲分析的混合有限元模型[J]. 同济大学学报, 1997,25(1):11-16.  
ZHU CI-MIAN, SHEN ZU-YAN. Mixed finite method for the interactive buckling analysis of thin-walled columns[J]. Journal of Tongji University, 1997,25(1): 11-16.
- [7] 苏庆田,张其林. 混合有限元法分析带纵肋钢箱构件的受力[J]. 工程力学, 2006,23(10):163-167.  
SU QING-TIAN, ZHANG QI-LIN. Mixed finite element method for mechanics analysis of longitudinal stiffened steel box member[J]. Engineering Mechanics. 2006,23(10):163-167.

(下转第 17 页)

- researches for the behaviors of high strength concrete filled steel tubes subjected to axial compression[J]. *Industrial Construction*, 1997,27(11):39-44, 13.
- [13] 中国工程建设标准协会标准. CECS28:90 钢管混凝土结构设计与施工规程[S].
- [14] 国家建材工业局标准. JCJ01-89 钢管混凝土结构设计施工及验收规程[S].
- [15] European Committee for Standardization. ENV 1994-1-2 Design of steel and composite structures, part 1, 2: Structural fire design[S].
- [16] European Committee for Standardization. ENV 1994-1-1 Design of composite steel and concrete structures, part 1.1: General rules and rules for building [S].
- [17] C D 古德. 钢管混凝土组合柱的研究进展[J]. *工业建筑*, 1996,26(3):23-27.  
C Douglas Goode. Concrete filled steel tubular columns-state of the art[J]. *Industrial Construction*, 1996, 26(3):23-27.
- [18] 张春梅,王立超,阴毅,等. 几种钢-高强混凝土柱轴压试验研究[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2004, 36(12): 1678-1682.  
ZHANG CHUN-MEI, WANG LI-CHAO, YIN YI, et al. Studies on axial compressive experiments of several kinds of steel and high-strength concrete columns[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2004, 36(12):1678-1682.
- [19] XIAO YAN, HE WEN-HUI, MAO XIAO-YONG. Research on Confined Concrete Filled Tubular (CCFT) Columns [C]. *Fourth International Conference on Advances in Steel Structures*, 2005;563-570.
- [20] HAN LIN-Hai, LIU WEI, YANG YOU-FU. Behaviour of concrete-filled steel tubular stub columns subjected to axially local compression[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2008, 64(4): 377-387.

(编辑 胡英奎)

(上接第 10 页)

- [8] ZIENKIEWICZ OC, TAYLOR RL. *The Finite Element Method*[M]. 6th edition Elsevier. Oxford: 2005.
- [9] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.
- [10] BATHE K J. *Finite Element Procedures*[M]. Prentice Hall, 1996.
- [11] SCOTT J A. Parallel frontal solvers for large sparse linear systems [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2003, 29(4): 395-417.
- [12] KIM J, IM S, KIM H G. Finite element analysis of Arc-welding process by parallel computation [J]. *Quarterly Journal of the Japan Welding Society*, 2005, 23(2): 203-208.
- [13] SCOTT J A. A frontal solver for the 21st century [J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2006,22(10):1015-1029.
- [14] TOPKAYA C, KALAYC A S, WILLIAMSON E B. Solver and shell element performances for curved bridge analysis[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2008, 13(4): 418-424.
- [15] LIU YAO-RU, ZHOU WEI-YUAN, YANG QIANG. Parallel 3-D finite element analysis based on EBE method[J]. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(3): 27-31.
- [16] CHENG, GUANG-HUI, HUANG, TING-ZHU, CHENG XIAO-YU. Preconditioned Gauss-Seidel type iterative method for solving linear systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2006, 27(9):1275-1279.

(编辑 王秀玲)