# 变截面 Timoshenko 悬臂梁自由振动分析

潘旦光，吴顺川，张　维
（北京科技大学 土木与环境工程学院，北京 100083）

摘　要：为考虑剪切变形和转动惯量的影响，基于模态摄动法基本原理，提出了一种求解变截面 Timoshenko 悬臂梁自由振动问题的近似解法。这一方法是利用等截面 Euler 梁的特征值和模态，将变截面 Timoshenko 梁特征方程的偏微分方程组转化为代数方程组进行求解，从而得到变截面 Timoshenko 梁的特征值和模态。该方法适用于求解任意复杂截面型式梁的动力特性，无论梁的截面变化是否连续。随后对截面阶跃变化和线性变化 2 类变截面梁进行算例分析，数值分析结果表明，这一方法简单、实用，具有良好的精度。

关键词：变截面悬臂梁；Timoshenko 梁；模态摄动法；自由振动；近似解
中图分类号：TU352　　文献标志码：A　　文章编号：1674-4764(2009)03-0025-04

# Free Vibration of Non-uniform Timoshenko Cantilever Beams

*PAN Dan-guang, WU Shun-chuan, ZHANG Wei*
(School of Civil and Environmental Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, P. R. China)

**Abstract**: In order to consider the effect of shearing deformation and rotating inertia, an approximate method, which is based on modal perturbation method, is proposed for the free vibration analysis of non-uniform Timoshenko cantilever beams. With the eigenvalues and eigenvectors of uniform Euler beams, a set of partial differential characteristic equations of non-uniform Timoshenko beams is transformed into a set of algebraic equations for solutions of non-uniform Timoshenko beams. The method can solve the dynamic characteristics of beams with complicated cross-section, whether the cross-section variation is continuous or discontinuous. At the end, two types of beams, namely (a) discontinuous variation of thickness and (b) continuous and linear variation, are analyzed and shown that the method is simple, practicable and owns good precision.

**Keywords**: non-uniform cantilever beams; Timoshenko beams; mode perturbation; free vibration; approximate solution

高层建筑、电视塔等常见的工程结构，通常可采用变截面梁式结构进行计算。已有的研究资料表明，当梁的长细比小于 25 时，梁的剪切变形和转动惯量对梁的动力特性产生明显影响，此时必须运用 Timoshenko 梁进行分析[1]。由于 Timoshenko 梁的复杂性，除一些特定边界条件以外，很难获得 Timoshenko 梁动力特性的解析解[2]。近年来，对于不同的 Timoshenko 梁振动问题，不同学者提出各种不同的解法[3-12]。这些求解 Timoshenko 梁动力特性的方法中，有的提供了自振特性的解析解，但只能适应极为特殊的情况，有的计算过程过于复杂，应用较困难。楼梦麟等曾应用模态摄动法求解了 3 种常见的等截面 Timoshenko 梁的动力特性[13-15]，计算结果表明，该方法具有计算简单、精度高的特点。

收稿日期：2009-02-02
基金项目：2006 年度新世纪优秀人才支持计划资助项目（NCET-06-0084）
作者简介：潘旦光（1974-），男，博士，副研究员，主要从事防灾减灾研究，（E-mail）pandanguang@sohu.com。

为分析任意复杂截面条件下 Timoshenko 梁的动力特性，该文应用模态摄动法基本原理[16]，利用等效均匀 Euler 梁的特征值和模态，将变截面 Timoshenko 梁特征方程的偏微分方程组转化为代数方程组进行求解，随后通过算例验证了该方法的有效性。

## 1 变截面 Timoshenko 梁振动方程

变截面 Timoshenko 梁的振动方程可表示为[1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\chi GA\left(\varphi-\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right]+\rho A\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EI\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]=\chi GA\left(\varphi-\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\rho I\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{2}$$

式中，$E$ 为杨氏弹性模量，$I$ 为截面的转动惯量，$A$ 为梁截面的面积，$G$ 梁的剪切模量，$\rho$ 为密度，$\chi$ 剪切系数，$y$ 和 $\varphi$ 分别为梁的横向位移和转角。

采用分离变量法，并将式(2)对 $x$ 求导一次，则梁的振动主模态函数可表示为：

$$-\frac{\partial}{\partial x}[\chi GA(\bar{\Phi}-\bar{Y}')]+\bar{\lambda}\rho A\bar{Y}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[EI\bar{\Phi}']-\frac{\partial}{\partial x}[\chi GA(\bar{\Phi}-\bar{Y}')]+\bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}[\rho I\bar{\Phi}]=0 \tag{4}$$

式中 $\bar{\lambda}=\bar{\omega}^2$ 。对于长为 l，起始段固定的悬臂梁，其边界条件为：

$\bar{Y}(0)=0,\bar{\Phi}(0)=0$

$\bar{\Phi}'(l)=0,\bar{\Phi}(l)-\bar{Y}'(l)=0$

当梁的 $\rho A$ 和 $EI$ 分别为常数 $\rho A_0$ 和 $EI_0$ 时，且忽略剪切变形和转动惯量影响时，即得 Euler 梁的特征方程：

$$EI_0Y^{iv}-\lambda\rho A_0Y=0 \tag{5}$$

当 Euler 梁为悬臂梁时，其特征值和模态可由以下公式确定[1]：

$$\lambda_j=\alpha_j^4EI_0/\rho A_0$$

$$Y_j(x)=\sin\alpha_jx-\sinh\alpha_jx+\frac{\sin\alpha_jl+\sinh\alpha_jl}{\cos\alpha_jl+\cosh\alpha_jl}(\cosh\alpha_jx-\cos\alpha_jx)$$

式中 $\alpha_j$ 为超越方程 $1+\cos\alpha_jl\cosh\alpha_jl=0$ 的解。

对于任意变截面 Timoshenko 梁，求解式(3)和式(4)耦合偏微分方程组的解析解通常是很困难的。而等截面 Euler 梁特征方程的解容易获得。应用模态摄动法基本思想，利用式(5) Euler 梁所得的特征值和特征向量的计算结果，形成一个求解式(3)和式(4)的较简单的方法。

## 2 模态摄动法基本理论

模态摄动法的基本思想是把式(3)和式(4)所表征的变截面 Timoshenko 梁看成是式(5)所表示的等截面 Euler 梁经过参数修改后得到的新系统，这个新系统主模态函数及特征值可以利用 Euler 梁的模态特征进行简单的摄动分析而近似的求得。即设

$$\bar{\lambda}_j=\lambda_j+\Delta\lambda_j \tag{6}$$

$$\bar{Y}_j(x)=Y_j(x)+\sum_{k=1,k\neq j}^{n}Y_k(x)a_{kj} \tag{7}$$

$$\bar{\Phi}_j(x)=\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(x)b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}Y'_k(x)b_{kj} \tag{8}$$

式中，$\lambda_j$ 和 $Y_j(x)$ 分别为与 Timoshenko 梁对应等截面 Euler 梁的第 $j$ 阶特征值和特征函数。从理论上讲，式(7)和式(8)中的梁有无穷多个主模态，即式(7)和式(8)中的 $n$ 应为 $\infty$，但在实际计算时，可取有限个低阶模态进行近似计算。因此，只要求得 $\Delta\lambda_j$，$a_{kj}$ 和 $b_{kj}$ 这 $2n$ 个未知数，即可求得变截面 Timoshenko 梁的第 $j$ 阶特征值 $\bar{\lambda}_j$ 及对应的主模态函数 $\bar{Y}_j(x)$ 和 $\bar{\Phi}_j(x)$。将式(6)、式(7)和式(8)代入方程(3)和方程(4)，并在方程两边乘以 $Y_i(x)(i=1,2,\cdots n)$，然后沿全长积分，并利用 Euler 梁的模态正交性，可得：

$$-\sum_{k=1}^{n}S_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1,k\neq j}^{n}S_{ik}a_{kj}+(\lambda_j+\Delta\lambda_j)\sum_{k=1,k\neq j}^{n}(m_i\delta_{ik}+\Delta m_{ik})a_{kj}+\Delta\lambda_j(m_i\delta_{ij}+\Delta m_{ij})=-S_{ij}-\lambda_j(m_i\delta_{ij}+\Delta m_{ij}) \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda_im_i\delta_{ik}+\Delta K_{ik})b_{kj}-\sum_{k=1}^{n}S_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1,k\neq j}^{n}S_{ik}a_{kj}+(\lambda_j+\Delta\lambda_j)\sum_{k=1}^{n}R_{ik}b_{kj}=-S_{ij} \tag{10}$$

式中：$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}$，$m_i=\int_0^l\rho A_0Y_i^2\mathrm{d}x$，

$\rho A_0=\int_0^l\rho A\mathrm{d}x/l$，$\Delta\rho A=\rho A-\rho A_0$

$EI_0=\int_0^lEI\mathrm{d}x/l$，$\Delta EI=EI-EI_0$，

$\Delta m_{ik}=\int_0^l\Delta\rho AY_iY_k\mathrm{d}x$，

$\Delta K_{ik}=\int_0^lY_i\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta EIY''_k)\mathrm{d}x$，

$S_{ik}=\int_0^l\chi GAY_iY''_k\mathrm{d}x$，$R_{ik}=\int_0^l\rho IY_iY''_k\mathrm{d}x$。

重复利用上式，可得代数方程组：

$$\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}^{11} & \boldsymbol{C}^{12}\\ \boldsymbol{C}^{21} & \boldsymbol{C}^{22}\end{bmatrix}+\Delta\lambda_j\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}^{11} & 0\\ 0 & \boldsymbol{D}^{22}\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \boldsymbol{q}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{Bmatrix} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{C}^{11}$，$\boldsymbol{C}^{12}$，$\boldsymbol{C}^{21}$，$\boldsymbol{C}^{22}$，$\boldsymbol{D}^{11}$，$\boldsymbol{D}^{22}$ 都为 $n$ 阶方阵，$\boldsymbol{q}_1$，$\boldsymbol{q}_2$，$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ 为 $n$ 阶向量。各方阵和向量的各元素分别为：

$$C_{ik}^{11}=\begin{cases}\lambda_j m_i\delta_{ik}+\lambda_j\Delta m_{ik}+S_{ik} & k\neq j\\ \lambda_j m_i\delta_{ik}+\lambda_j\Delta m_{ik} & k=j\end{cases},$$

$$C_{ik}^{21}=\begin{cases}S_{ik} & k\neq j\\ 0 & k=j\end{cases},\quad C_{ik}^{12}=-S_{ik},$$

$$C_{ik}^{22}=\Delta K_{ik}+\lambda_i m_i\delta_{ik}-S_{ik}+\lambda_j R_{ik},$$

$$D_{ik}^{11}=\begin{cases}m_i\delta_{ik}+\Delta m_{ik} & k\neq j\\ 0 & k=j\end{cases},\quad D_{ik}^{22}=R_{ik},$$

$$\boldsymbol{q}_1=\{a_{1j}\ \cdots\ a_{(j-1)j}\ \ \Delta\lambda_j/\lambda_j\ \ a_{(j+1)j}\ \cdots\ a_{nj}\}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{q}_2=\{b_{1j}\ \ b_{2j}\ \cdots\ b_{nj}\}^{\mathrm{T}},$$

$$p_{1i}=-S_{ij}-\lambda_j(m_i\delta_{ij}+\Delta m_{ij}),\ p_{2i}=-S_{ij}。$$

从上面公式的推导过程来看，利用模态摄动法将复杂的微分方程组求解转化为一组非线性代数方程求解。非线性代数方程可用迭代法求解[17]。在求得未知向量 $\{q\}$ 以后，从式(6)、式(7)和式(8)不难得到变截面 Timoshenko 梁的第 $j$ 阶主模态特性。令 $j=1,2,\cdots,s$，可求得截面 Timoshenko 梁的前 $s$ 阶振动模态，这样，就把变系数微分方程组转化为 $s$ 组 $2n$ 阶非线性方程组的求解。

## 3 算　例

为验算该方法计算的有效性，下面采用其它文献中分析过的算例进行验证。

### 3.1 截面阶跃悬臂梁

如图 1 所示的阶跃悬臂梁。算例中梁的计算参数如下：$h_2/h_1=0.8$，$l_1/l=2/3$，$E/G=2.6$，$\chi=5/6$，截面宽度 $b$ 为常量。并定义无量纲频率 $\Omega_i=\bar{\omega}_i l^2\sqrt{\rho A_1/EI_1}$，$r=\sqrt{I_1/A_1 l^2}$。应用该文的计算方法，等截面 Euler 梁的高度取为 $h_0=(2h_1+h_2)/3$。则不同 $r$ 下，无量纲频率 $\Omega_i$ 前三阶的计算结果如表 1 所示。文[3] 为采用有限元法的计算结果，文[9] 为采用动刚度有限元法的计算结果。

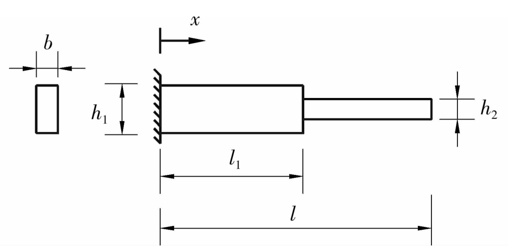


图 1　变截面 **Timoshenko** 阶跃悬臂梁

表 1　阶跃悬臂梁前 3 阶无量纲频率计算结果

| $r$ | 频率 | 该文 | 文[3] | 文[9] |
|---|---|---|---|---|
| | $\Omega_1$ | 3.818 8 | 3.82 | 3.821 9 |
| 0.02 | $\Omega_2$ | 21.353 7 | 21.35 | 21.354 0 |
| | $\Omega_3$ | 55.965 9 | 55.04 | 55.040 8 |
| | $\Omega_1$ | 3.805 8 | 3.80 | 3.803 4 |
| 0.04 | $\Omega_2$ | 20.701 8 | 20.72 | 20.728 3 |
| | $\Omega_3$ | 51.651 7 | 51.68 | 51.685 1 |
| | $\Omega_1$ | 3.770 6 | 3.77 | 3.771 6 |
| 0.06 | $\Omega_2$ | 19.797 2 | 19.80 | 19.803 6 |
| | $\Omega_3$ | 47.369 2 | 47.35 | 47.354 0 |

### 3.2 截面渐变悬臂梁

如图 2 所示截面高度线性变化梁。算例中梁的计算参数如下：$h_2/h_1=0.8$，$E/G=2.6$，$\chi=5/6$，截面宽度 $b$ 为常量。应用本文的计算方法，等截面 Euler 梁的高度取为 $h_0=(h_1+h_2)/2$。表 2 为不同 $r$ 下 Timoshenko 梁无量纲频率 $\Omega_i$ 前三阶的计算结果。其中文[3]为采用有限元法的计算结果，文[11]为采用 Lagrangain 法的分析结果，文[12]为采用 Rayleigh-Ritz 法的计算结果。

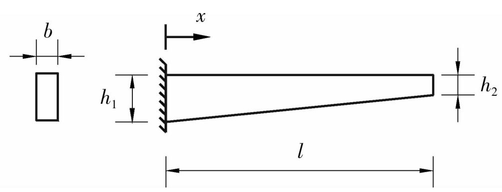


图 2　变截面 **Timoshenko** 渐变悬臂梁

表 2　渐变悬臂梁前 3 阶无量纲频率计算结果

| $r$ | 频率 | 该文 | 文[3] | 文[11] | 文[12] |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\Omega_1$ | 3.594 1 | 3.59 | 3.584 | 3.587 |
| 0.02 | $\Omega_2$ | 20.180 8 | 20.17 | 19.984 | 20.18 |
| | $\Omega_3$ | 53.509 5 | 53.48 | 52.445 | 53.488 |
| | $\Omega_1$ | 3.557 2 | 3.56 | 3.552 | 3.558 |
| 0.04 | $\Omega_2$ | 19.040 9 | 19.01 | 18.855 | 19.018 |
| | $\Omega_3$ | 47.450 8 | 47.43 | 46.693 | 47.398 |
| | $\Omega_1$ | 3.422 5 | 3.42 | 3.415 | 3.422 |
| 0.08 | $\Omega_2$ | 15.903 8 | 15.84 | 15.744 | 15.84 |
| | $\Omega_3$ | 35.574 2 | 35.35 | 34.96 | 35.271 |

## 4 结　语

该文利用等截面 Euler 梁的特征值和模态，求解了将变截面 Timoshenko 悬臂梁自由振动方程。该方法本质上属于 Ritz 法，由于选取了与变截面

Timoshenko 梁密切相关的等截面 Euler 梁的主模态函数作为近似函数，因而计算结果具有较高的精度。从计算过程来看，涉及变参数的情况，只需计算 $\Delta m_{ik}$，$\Delta K_{ik}$，$S_{ik}$，$R_{ik}$，$\rho A_0$，$EI_0$ 等参数，这些参数为积分运算的结果，当无法采用解析积分时，可采用数值积分的手段进行。计算中对梁横截面的变化情况并无特殊要求，可以是解析函数，也可以不是解析函数，因此，具有较强的适用性。

参考文献：

[1] TIMOSHENKO S, YOUNG D H, WEAVER W. Vibration problems in engineering [M]. 4th edition, John Wiley & Sons, Inc. 1974.

[2] VAN RENSBURG N F J, VAN DER MERWE A J. Natural frequencies and modes of a Timoshenko beam [J]. Wave Motion, 2006, 44: 58-69.

[3] ROSSI R E, LAURA P A A, GUTIERREZ R H. A note on transverse vibrations of a Timoshenko beam of non-uniform thickness clamped at one end and carrying a concentrated mass at the other [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 143: 491-502.

[4] EISENBERGER M. Derivation of shape functions for an exact 4-D. O. F. Timoshenko beam element [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1994, 10: 673-681.

[5] EISENBERGER M. Dynamic stiffness matrix for variable cross-section Timoshenko beams [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1995, 11: 507-513.

[6] GUTIERREZ R H, LAURA P A A, ROSSI R E. Fundamental frequency of vibration of a Timoshenko beam of non-uniform thickness [J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 145: 341-344.

[7] FARGHALY S H. Vibration and stability analysis of Timoshenko beams with discontinuities in cross-section [J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 174(5): 591-605

[8] FARGHALY S H, GADELRAB R M. Free vibration of a stepped composite Timoshenko cantilever beam [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 187(5): 886-896.

[9] TONG X, TABARROK B, YEH K Y. Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 186(5): 821-835.

[10] LEUNG A Y T, ZHOU W E. Dynamic stiffness analysis of axially loaded non-uniform Timoshenko columns [J]. Computers & Structures, 1995, 56: 577-588.

[11] AUCIELLO N M. Free vibration of a restrained shear-deformable tapered beam with a tip mass at its free end [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237: 542-549.

[12] AUCIELLO N M, ERCOLANO A. A general solution for dynamic response of axially loaded non-uniform Timoshenko beams [J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41: 4861-4874.

[13] 楼梦麟，任志刚. Timoshenko 简支梁的振动模态特性精确解[J]. 同济大学学报，2002,30(8):911-915.
LOU MENG-LIN, REN ZHI-GANG. Precise solution to modal characteristics of Timoshenko Pin-ended beams [J]. Journal of Tongji University, 2002, 30(8): 911-915.

[14] 楼梦麟，石树中. Timoshenko 固端梁特征值问题近似计算方法[J]. 应用力学学报，2003,20(1):140-143.
LOU MENG-LIN, SHI SHU-ZHONG. An Approach for solving the eigenvalue problem of Timoshenko clamped beam [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2003,20(1):140-143.

[15] 段秋华，楼梦麟. Timoshenko 悬臂梁自由振动特性的近似分析方法，结构工程师，2004,21(5):20-23.
DUAN QIU-HUA, LOU MENG-LIN. An Approach for analyzing free vibration characteristics of Timoshenko cantilever beams [J]. Structural Engineers, 2004,21(5):20-23.

[16] 楼梦麟. 线性广义特征值问题在模态子空间中的摄动解[J]. 同济大学学报，1994,22(3):268-273.
LOU MENG-LIN. Perturbation method for the linear generalized eigenvalue problem in modal subspace [J]. Journal of Tongji University, 1994,22(3):268-273.

[17] 楼梦麟. 变参数土层的动力特性和地震反应分析[J]. 同济大学学报，1997,25(2):155-160.
LOU MENG-LIN. Dynamic analysis for modal characteristics and seismic response of soil layer with variable properties [J]. Journal of Tongji University, 1997,25(2):155-160.

（编辑 胡 玲）