

# 考虑应变强化的高压缩性黏土修正双曲线模型

程 涛<sup>1</sup>, 晏克勤<sup>1,2</sup>

(1. 黄石理工学院 土木建筑工程学院, 湖北 黄石 435003;

2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

**摘 要:**研究了武汉地区高压缩性黏土弹塑性本构模型。基于 Duncan $E \sim v$  双曲线模型, 对等压固结条件下 CTC 应力路径三轴实验数据进行了数据拟合, 得到了该条件下的非线性应力应变关系, 并将卸载一再加载试验曲线的平均斜率作为卸载模量, 引入了加卸载函数作为判定加卸载的准则。将该模型嵌入有限元程序对三轴压缩试验进行数值模拟, 并与 Duncan 模型数值解及试验曲线作对比。结果表明, 该模型较 Duncan 模型能更好的体现正常固结黏土在 CTC 路径下的应力应变关系, 特别是加载后期的应变强化效应, 与试验曲线的最大相对误差不超过 5%。

**关键词:**等压固结; 高压缩性黏土; 本构关系; 非线性; 加卸载准则; 应变强化

中图分类号: TU 443 文献标志码: A 文章编号: 1674-4764(2009)05-0049-05

## Modified Hyperbolic Model of High Compressibility Clay Considering Strain Strengthening Effects

CHENG Tao<sup>1</sup>, YAN Ke-qin<sup>1,2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Huangshi Institute of Technology, Huangshi, Hubei 435003, P. R. China; 2. State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

**Abstract:** The elasto-plastic constitutive relation of high compressibility clay in Wuhan was investigated. On the basis of the framework of Duncan  $E \sim v$  model, an elasto-plastic constitutive model was derived by fitting the data of triaxial compression tests under CTC stress path on isotropic consolidation condition. With the average slope of unload-reload curves as unload modulus, the loading-unloading function was introduced as the loading-unloading criterion. Moreover, the comparison was made among the stress-strain relation curve simulated by the proposed model and those with Duncan model and test curve. It was shown that the proposed model was more reasonable, which can reflect the stress-strain relation of normally consolidated soils under CTC path. Especially, the model can reflect the strain strengthening effect. The maximum relative error was no more than 5%.

**Key words:** isotropic consolidation; high compressibility clay; constitutive relation; nonlinear; loading-unloading criterion; strain hardening

Duncan-Chang 双曲线模型是基于等压固结条件下 CTC 路径的三轴剪切试验拟合而成的<sup>[1]</sup>, 根据试验确定的初始变形模量  $E_i$  以及峰值强度, 结合 Mohr-Coulomb 强度准则, 得到切线变形模量公式<sup>[2]</sup>。因为模型参数易于获取, 目前仍是应用较广

的一类岩土非线性本构关系。随着研究的深入, 不少学者将 Duncan-Chang 模型进行了改造, 得出了近似弹塑性模型<sup>[3-6]</sup>, 但本质上仍然属于非线性弹性模型。并且此类模型虽然适用于强化材料, 但是一般要求荷载不大, 随着荷载的增大乃至破坏, 模型与

收稿日期: 2009-05-10

基金项目: 湖北省教育厅优秀青年人才基金项目(Q200830002); 黄石理工学院科研基金重点项目(07yjz03R)

作者简介: 程涛(1975-), 男, 副教授, 博士, 主要从事岩土本构理论及数值仿真研究, (E-mail) chthust@163.com。

实际的差异较大,无法较好体现材料的强化特性。该文针对武汉地区高压缩性黏土的非线性应变强化特性,引入强化指数,修正了双曲线模型架构,并引入了卸载函数准则,得出考虑应变强化效应的弹塑性本构模型。

## 1 试验分析

### 1.1 试样制备

以武汉地区天然饱和黏土为研究对象,采用侧限压缩试验,经 2 组平行测定<sup>[7]</sup>,该土样的天然压缩系数  $a$  为  $0.567 \text{ MPa}^{-1}$ ,根据规范判定为高压缩性黏土。考虑到取土时难以避免的扰动影响,因此,试验采用重塑饱和土样<sup>[8]</sup>。试验时,土样安装完毕后,进行反压力饱和,直至饱和度达到 99% 以上,进行特定应力路径下的三轴剪切试验。

### 1.2 试验路径

进行了 CTC 应力路径下排水剪切试验,即等压固结条件下三轴排水剪切试验(CD 试验<sup>[9]</sup>)。试验路径如图 1 所示。CD 试验中先期固结压力分别为 50~300 kPa,每个试验的先期固结压力相差 50 kPa,在该固结压力下维持到孔压消散至 95% 以上即认为固结过程完成,可进行三轴压缩试验。

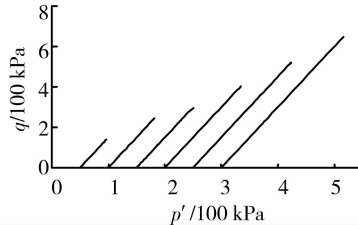
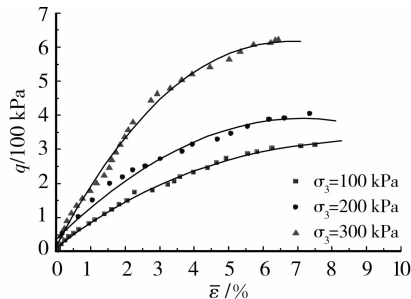
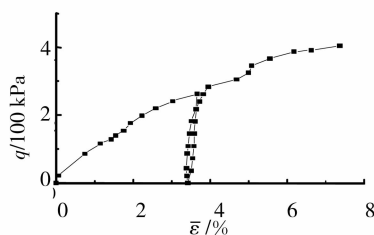


图 1 试验的应力路径

### 1.3 试验结果



(a) 单调加载试验



(b) 循环加载试验

图 2 不同加载方式下  $q-\varepsilon$  试验曲线

为了能在模型中分析出塑性变形部分,三轴试验采用循环加载的方式进行<sup>[10]</sup>。图 2(a) 为不同初始固结压力下的单调加载试验曲线。作为对比,图 2(b) 列出了初始固结压力为 200 kPa 下广义剪应力  $q$  与广义剪应变  $\bar{\varepsilon}$  的试验关系曲线。

由图 2 可以看出,不同加载方式下试验曲线发展规律有所不同。初始围压为 200 kPa 条件下,循环加载试验曲线剪切强度较单调加载更大,而破坏时剪切变形比单调加载条件下剪切变形小。这表明应力历史对黏土的本构关系的影响不可忽略。

## 2 模型框架

### 2.1 轴向应变 $\varepsilon_1$

由试验曲线,可以发现正常固结黏土有一定的应力强化特性,为此,该文基于双曲线模型架构,引入强化指数,得出如下公式确定轴向应变  $\varepsilon_1$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{E_i \left[ 1 - \frac{R_f (1 - \sin \varphi) (\sigma_1 - \sigma_3)^{0.8}}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \right]} \quad (1)$$

式中,  $E_i$  为初始切线弹性模量,  $R_f$  为破坏比率,  $R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}$ ,  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  为  $(\sigma_1 - \sigma_3) \sim \varepsilon_1$  双曲线的渐近值,  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$  为破坏强度值,可根据 Mohr-Coulomb 破坏准则确定<sup>[11]</sup>:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{(2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)} \quad (2)$$

其中,  $c$  为土的粘聚力;  $\varphi$  为土的内摩擦角;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  分别为三轴试验测定的轴向压力和侧向压力。

### 2.2 切线弹性模量 $E_i$

切线弹性模量  $E_i$  可由下式确定

$$E_i = K p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (3)$$

式中,  $p_a$  为大气压力;  $K$ ,  $n$  为试验参数。在双对数坐标系下,  $E_i \sim \sigma_3$  函数呈直线关系,直线的斜率为  $n$ ,根据单位围压  $\sigma_3$  对应截距即可确定  $K$ 。

考虑到  $(\sigma_1 - \sigma_3) \sim \varepsilon_1$  呈双曲线关系,引入 Duncan 切线弹性模量  $E_i$  公式<sup>[12]</sup>,代入公式(1)可得

$$E_i = E_i \left[ 1 - \frac{R_f (1 - \sin \varphi) (\sigma_1 - \sigma_3)^{0.8}}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \right]^2 \quad (4)$$

### 2.3 切线泊松比 $\nu_i$

由于在实测资料中,  $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_3$  多呈双曲线关系, Duncan 等人推导出切线泊松比  $\nu_i$  的公式:

$$\nu_i = \frac{\nu_i}{(1 - D\varepsilon_1)^2} \quad (5)$$

式中,  $D$  为实验参数,  $\varepsilon_r/\varepsilon_1 \sim \varepsilon_r$  直线斜率确定,  $\varepsilon_r = (3\varepsilon_v - \varepsilon_1)/2$ ,  $\varepsilon_v, \varepsilon_1$  分别为体应变和轴向应变;  $\nu_i$  为初始泊松比,可由下式确定

$$\nu_i = G - F \log \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right) \quad (6)$$

其中,  $G, F$  为试验参数, 可由半对数坐标系下  $\nu_i \sim \sigma_3$  函数曲线确定, 其中,  $F$  为该直线的斜率,  $G$  为直线在单位围压下的截距。

### 2.4 卸荷模量 $E_{ur}$

根据试验资料, Duncan 假定卸载模量  $E_{ur}$  不随  $\sigma_1 - \sigma_3$  变化, 仅与  $\sigma_3$  相关。根据卸载-再加载曲线, 可绘制  $E_{ur} \sim \sigma_3$  关系, 表现在双对数坐标系下, 近似为直线, 即

$$E_{ur} = K_{ur} p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (7)$$

式中:  $K_{ur}$  为试验常数, 可由直线  $\lg\left(\frac{E_{ur}}{p_a}\right) \sim \lg\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)$  的截距表示。

### 2.5 加卸载函数

为了反映出黏土的弹塑性, Duncan 等根据卸载-再加载试验曲线的平均斜率作为卸载模量, 并采用加卸载函数来判定加卸载<sup>[13]</sup>, 加卸载函数可表述为:

$$S_s = S \sqrt[4]{\frac{\sigma_3}{p_a}} \quad (8)$$

式中,  $S$  为应力水平, 可由下式计算

$$S = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \quad (9)$$

## 3 本构模型的确

### 3.1 模型参数

根据初始围压  $\sigma_3 = 100, 200, 300$  kPa 条件下的试验数据, 确定  $\varepsilon_i / (\sigma_1 - \sigma_3) \sim \varepsilon_i$  曲线, 如图 3 所示。

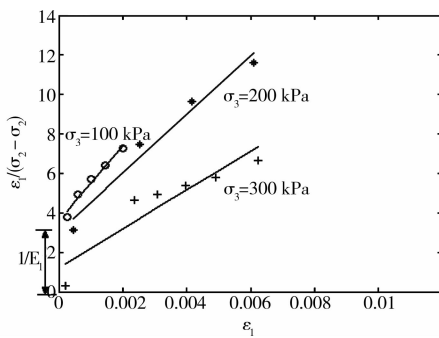


图 3  $\varepsilon_i / (\sigma_1 - \sigma_3) \sim$  轴向应变  $\varepsilon_i$  曲线

根据图 3, 可得直线截距, 即  $1/E_i$ , 由此可以计算初始弹模  $E_i$ , 列表如下

表 1 初始切线弹模  $E_i$

$\sigma_3$ /kPa	$1/E_i$	$E_i/(100 \text{ kPa})$	$\bar{E}_i$
100	0.0056	178.0	
200	0.0050	200.0	230
300	0.0032	312.5	

在双对数坐标系下,  $E_i$  与对应围压  $\sigma_3$  的函数关系近似为直线, 如图 4 所示。

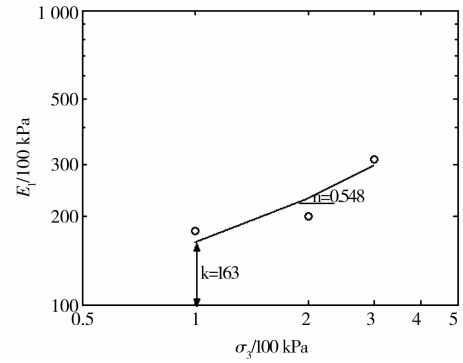


图 4  $E_i \sim \sigma_3$  关系曲线

由图 4 可得  $\sigma_3 = 100$  kPa 时对应纵坐标值  $K = 163.0$ , 以及直线斜率  $n = 0.548$ 。

由测定的轴向应变  $\varepsilon_1$  和体应变  $\varepsilon_v$ , 经应变换算后, 绘制  $\varepsilon_r / \varepsilon_1 \sim \varepsilon_r$  的关系曲线, 如图 5 所示。

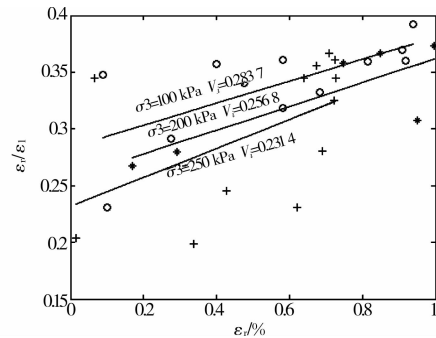


图 5  $\varepsilon_r / \varepsilon_1 \sim \varepsilon_r$  关系曲线

由图 5, 3 条直线的斜率的平均值为 9.07, 则参数  $D = 9.07$ 。

根据公式 6, 将  $\nu_i \sim \sigma_3$  函数关系在半对数坐标系下拟和成直线, 如图 6 所示。由图 6 对应的斜率和单位截距得  $F = 0.1413$ ,  $G = 0.28$ 。

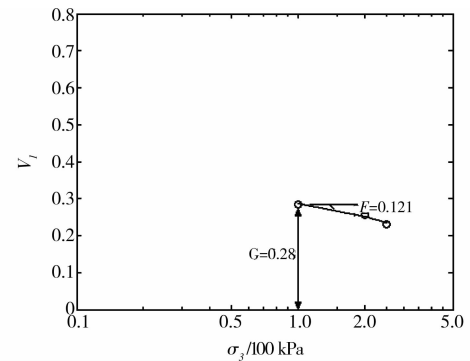


图 6  $\nu_i \sim \sigma_3$  关系曲线

根据不同围压下极限状态参数, 绘制莫尔圆, 如图 7 所示。由图 7 可得抗剪强度指标  $c = 24$  kPa,  $\varphi = 32.0^\circ$ 。

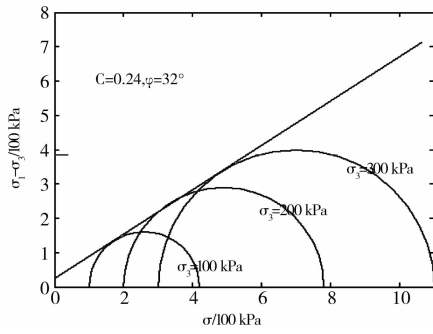


图 7 抗剪极限状态莫尔圆

由  $(\sigma_1 - \sigma_3) \sim \epsilon_1$  双曲线确定  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ ，并由 (2) 式确定  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ ，可得破坏比率  $R_f$ ，计算结果如表 2。

表 2 极限状态参数

$\sigma_3 / \text{kPa}$	$(\sigma_1 - \sigma_3)_f$	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	$R_f$	$\bar{R}_f$
100	320.3	324.0	0.988 6	
200	553.0	580.0	0.953 4	0.970
300	785.8	810.0	0.970 1	

类似弹模  $E_t$  的求解，取不同初始围压下  $K_0$  固结的卸载—再加载滞回环的平均斜率  $E_{ur}$ ，在双对数坐标系下绘制卸荷模量  $E_{ur}$  与  $\sigma_3$  关系曲线，如图 8 所示。

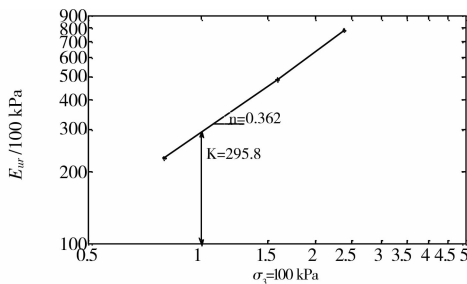


图 8  $E_{ur} \sim \sigma_3$  关系曲线

图 8 近似为直线，由图 8 得  $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$  时对应纵坐标值  $K_{ur} = 295.8$ ，直线斜率  $n = 0.362$ 。

### 3.2 本构模型

综合上述试验所得模型参数，可得等压固结条件下的该文模型，其切线弹模为

$$E_t = 163 \left[ 1 - \frac{0.456(\sigma_1 - \sigma_3)^{0.8}}{0.407 + 1.06\sigma_3} \right]^2 p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{0.548} \quad (10)$$

其切线泊松比为

$$\nu_t = \frac{0.28 - 0.1413 \log\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)}{\left\{ 1 - \frac{9.07(\sigma_1 - \sigma_3)}{163 \left[ 1 - \frac{0.456(\sigma_1 - \sigma_3)^{0.8}}{0.407 + 1.06\sigma_3} \right]^2 p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{0.548}} \right\}^2} \quad (11)$$

相应地，应力应变增量统一关系式为：

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\epsilon\} \quad (12)$$

式中， $\{d\sigma\} = \{d\sigma_{x(r)}, d\sigma_{y(\theta)}, d\sigma_z, d\tau_{xy(rz)}\}^T$ ；

$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon_{x(r)}, d\epsilon_{y(\theta)}, d\epsilon_z, d\epsilon_{xy(rz)}\}^T$ ；

$$[D] = \frac{E_t}{(1 + \nu_t)(1 - 2\nu_t)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_t & \nu_t & \nu_t & 0 \\ \nu_t & 1 - \nu_t & \nu_t & 0 \\ \nu_t & \nu_t & 1 - \nu_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu_t \end{bmatrix}$$

由当前应力状态根据公式(8)和(9)判断加卸载状态。加载时， $E = E_t$ ；卸载时  $E_{ur} = 295.8 p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^{0.362}$ ，再加载时， $E = E_{ur}$ ，以此分离弹性应变与塑性应变。

## 4 数值分析

为了检验获得的黏土本构模型的正确性，将模型嵌入到有限元程序，对三轴试验过程进行数值模拟。数值分析对象为黏土三轴试验标准试样，黏土试样高 8 cm，直径 3.91 cm，考虑到试样的对称性，取试样的一半作为数值计算的几何模型<sup>[14-15]</sup>，共划分 45 个节点和 64 个单元，计算简图如图 9 所示。

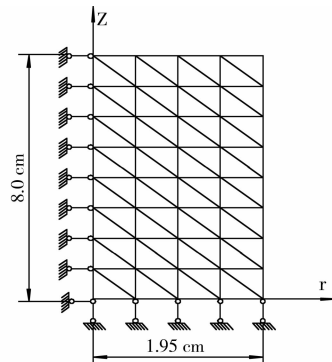


图 9 有限元计算简图

在初始围压为 100 kPa 的条件下将试样等压固结，然后进行排水剪切试验进行数值模拟，通过计算得到  $q \sim \epsilon_1$  的关系曲线。将 Duncan-Chang  $E \sim \nu$  模型及该文模型模拟的关系曲线与相应条件下的试验曲线进行对比，对比结果图 10 所示。

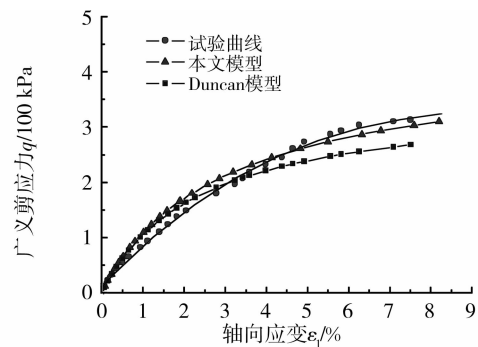


图 10 数值模拟与试验关系曲线对比

由图 10 可以看出该文模型曲线与 CTC 应力路

程下的三轴剪切试验关系曲线基本一致。虽然计算曲线与试验曲线在早期有小部分分离,这是由于模型的架构源自 Duncan 双曲线模型,容易受到试验早期读数稳定性的影响,而导致初始斜率发生相应变化。但相比 Duncan 双曲线模型,随着荷载的增加,模型能很好的反映高压缩性黏土的强化效应,并与试验曲线较好的吻合,与试验曲线的最大误差小于5%。表明模型能够较好的体现高压缩性黏土在 CTC 路径下的应力应变关系。

## 5 结 论

1)不同加载方式下试验曲线发展规律有所不同,应力历史对黏土本构关系的影响不可忽略。

2)基于 Duncan $E \sim v$  双曲线模型,对等压固结条件下 CTC 应力路径三轴实验数据进行了数据拟合,得到了该条件下的非线性应力应变关系,并将卸载一再加载试验曲线的平均斜率作为卸载模量,引入了卸载函数作为判定加卸载的准则。

3)该文模型较 Duncan-Chang 模型能更好的体现正常固结黏土在 CTC 路径下的应力应变关系,特别是加载后期的应变强化效应,模型仿真计算最大相对误差不超过5%。

### 参考文献:

- [1] DUNCAN J M, CHANG C Y. Non-linear analysis of stress and strain in soils [J]. J. Soil Mech. Div., ASCE, 1970, 96(SM5): 1629-1653.
- [2] 殷宗泽. 土工原理[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2007.
- [3] 殷宗泽. 高土石坝的应力与变形[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(1):1-14.  
YIN Z Z. Stress and deformation of high earth and rock-fill dams [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(1):1-14.
- [4] 费勤发, 钟才根. Duncan-Chang 土体非线性弹性模型向弹塑性模型的转化[J]. 力学季刊, 1994, 15(4): 41-47.  
FEI Q F, ZHONG C G. A transformation of the Duncan-Chang non-linear elastic model for soil bodies into an elasto-plastic model [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 1994, 15(4): 41-47.
- [5] 张继周, 缪林昌, 王华敬. 邓肯-张模型参数敏感性分析与控制变形研究[J]. 工业建筑, 2008, 38(3):75-79.  
ZHANG J, MIAO L C, WANG H J. Analysis of parameters sensitivity of Duncan-Chang model and study on the controlling deformation [J]. Industrial Construction, 2008, 38(3):75-79.
- [6] 彭丽云, 刘建坤, 肖军华, 等. 压实粉土非线性应力-应变关系的试验研究[J]. 工程地质学报, 2007, 15(1):50-55.  
PENG L Y, LIU JIAN-KUN, XIAO J H, et al. Triaxial test results for nonlinear stress-strain relationship of compacted silt [J]. Journal of Engineering Geology, 2007, 15(1):50-55.
- [7] CHENG T, WANG J T, YAN K Q. Elastoplastic plane strain consolidation of clay based on numerical modeling method [C]//Proceeding of the 2<sup>nd</sup> international Conference on Environmental and Engineering Geophysics. Beijing: Science Press USA Inc., 2006: 972-975.
- [8] 程涛, 王靖涛, 晏克勤. 数值建模条件下弹塑性 sony HDR-FX7E 驱动平面应变固结问题研究. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2007, 35(3):113-115  
CHEGN T, WANG J T, YAN K Q. Decoupling analysis of elastoplastic plane strain consolidation [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science Edition, 2007, 35(3):113-115.
- [9] 程涛, 王靖涛, 晏克勤. 基于数值建模方法的弹塑性固结问题解耦研究[J]. 岩土力学, 2007, 28(3):582-586.  
CHENG T, WANG J T, YAN K Q. Research on decoupling conditions for elastoplastic consolidation with numerical modeling method [J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(3):582-586.
- [10] CHENG T, WANG J T, YAN K Q. Digitalization modeling system for constitutive relation of geomaterial [J]. Journal of China University of Mining and Technology, 2006, 16(3):338-343.
- [11] 程涛. 黏土的数值建模和固结问题研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2006.
- [12] KONDNER R L. Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1963, 89 (SMI): 115-143.
- [13] 李广信主编. 高等土力学[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.
- [14] 程涛, 王靖涛, 晏克勤, 等. 考虑应力路径影响的粘土弹塑性平面应变固结问题. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(2):403-408.  
CHENG T, WANG J T, YAN K Q, et al. Coupling analysis method for elastoplastic consolidation of clay considering stress paths [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(2):403-408.
- [15] CHENG T, YAN K Q. Numerical simulation research of triaxial shearing tests for soil under different stress paths [C]//Proceeding of the 1<sup>st</sup> International Conference of Modelling and Simulation. Liverpool: World Academic Press, 2008: 24-28.

(编辑 胡 玲)