

广义 Hoek-Brown 破坏准则平面应变问题的 滑移线场理论

曾钱帮, 刘彤, 马平

(交通运输部公路科学研究院, 北京 100088)

摘要:根据弹塑性力学平面应变问题的特点, 推导广义 Hoek-Brown 破坏准则平面应变问题应力分量的双参数表达式。代入静力平衡微分方程, 得到双曲型一阶拟线性偏微分方程组。运用行列式方法, 在适当的变量代换后, 获得应力偏微分方程组的特征方向和特征上的微分关系。特征方向表明塑性区中的共轭斜交剪切滑移面形成两族非正交滑移线, 其共轭角随极限应力状态和 Hoek-Brown 岩体材料物性参数而变化。由于对称初始应力场条件下圆形洞室理想弹塑性围岩塑性区内最大主应力方向为环向, 而滑移线切线方向与最大主应力方向的夹角是最小主应力(径向应力)的函数, 结合圆形洞室理想弹塑性围岩的应力分布的分析解, 获得滑移线的极坐标曲线所满足的微分方程, 进而得到其极坐标曲线方程。

关键词:理想弹塑性; 广义 Hoek-Brown 破坏准则; 平面应变问题; 滑移线场; 圆形洞室; 极坐标曲线方程; 岩体; 剪应力

中图分类号: TV554; TU45 文献标志码: A 文章编号: 1674-4764(2010)01-0004-08

Slip Line Field of Plane Strain Problem Obeying the Generalized Hoek-Brown Failure Criterion

ZENG Qian-bang, LIU Tong, MA Ping

(Research Institute of Highway, Ministry of Transport, Beijing 100088, P. R. China)

Abstract: According to the characteristics of plane strain problem of elastic and plastic mechanics, the bi-parametric expressions were derived for stress components satisfying the generalized Hoek-Brown failure criterion. Being substituted into the static equilibrium partial differential equations, a group of first-order hyperbolic pseudo-linear differential equation partial differential equations was obtained. Utilizing the determinant method and proper variable transformation, the characteristic direction and the differential relation equation for the stress partial differential equations were acquired. The characteristic direction indicted that in plastic zone obliquely-intersecting conjugate shear slip surfaces formed two families of non-orthogonal slip lines, in which conjugate angle varied with the limit stress state and the material physical properties of Hoek-Brown rock mass. Since the principal direction of the maximum principal stress was circumferential in perfectly elasto-plastic surrounding rock of the plastic zone around a circular opening suffering the symmetric initial stress field, the angle between the tangential direction of slip line with the principal direction of the maximum principal stress was the function of the minimum principal stress(i. e. the radial stress). Combined with the analytical solution, the polar coordinate differential equation was derived and furthermore, the polar coordinate curve equation for the slip line was obtained.

Key words: perfectly elasto-plasticity; the generalized Hoek-Brown failure criterion; plane strain problem; slip line field; circular opening; curve equation of polar coordinate; rock; shear stress

收稿日期: 2009-09-29

作者简介: 曾钱帮(1973-), 男, 博士后, 要从事岩石力学与工程研究, (E-mail) zengqianbang@yahoo.com.cn.

滑移线场理论是利用理想弹塑性材料塑性变形过程中最大剪应力迹线的性质,求解塑性力学边值问题的一种严密方法。它满足塑性力学平面问题的所有控制方程和边界条件,作为经典塑性理论的重要组成部分,已被广泛地应用于金属塑性成型、结构塑性极限分析和土力学等工程领域。Kötter 最先导出平面应变情况下的滑移线方程,20 世纪 20 年代 Prandtl、Hencky、Mises、Geifinger 等学者用其确定遵守 Mises 或 Tresca 屈服准则的理想刚塑性材料的应力场和相关联流动的速度场,1962 年 Mandel 加以推广包含其它的屈服准则并建立了平面应力问题的滑移线方法,滑移线场理论遂基本定型。理论土力学方面,Prandtl 首先对无重土上的基底光滑无埋深的基础得出滑移线方程的闭合解,并由此发展而提出了以一束直线滑移线通过一个奇异点的解。这些结果后来被 Reissner、Novotortsev、Terzaghi、Berezancev、Meyerhof、Hansen、Vesic、Hanna 等用来求解各种条件下土质地基的极限承载力问题,被 Sokolovskii 用来求解各种土体强度问题。

上述经典的滑移线场理论均是基于 Tresca 最大剪应力强度准则、Mises 最大八面体剪应力强度准则和 Mohr-Coulomb 强度准则发展起来的。这几种强度准则在平面应变问题中都是线性的,其滑移线场理论(包括俞茂宏^[1]发展的统一双剪强度准则的滑移线场理论)的建立相对容易。

广义 Hoek-Brown 破坏准则^[2]是近年来岩体非线性强度准则的最新研究成果。许多试验数据显示绝大多数岩石的破坏并不遵守线性 Mohr-Coulomb 破坏准则,并且岩石剪切强度包络线具有非线性的特征^[3-7]。在工程尺度的岩体上(中)做现场试验较困难,而对工程尺度的岩体的力学性质的正确估计是进行理论和数值分析以及合理设计的前提,广义 Hoek-Brown 破坏准则比线性 Mohr-Coulomb 强度准则更适于估计节理岩体的强度,因此在岩石工程界已得到广泛的应用和认可。

广义 Hoek-Brown 破坏准则的非线性特质,也许正是这个原因,从已发表的文献[8-15]来看,均是利用切线法或面积差补法运用 Hoek-Brown 破坏准则参数来表达 Mohr-Coulomb 瞬时强度参数或等效强度参数,在 Mohr-Coulomb 强度准则的滑移线场理论获得的基础极限承载力问题的闭合解及极限分析方法的框架下重新求解,而并没有建立起广义 Hoek-Brown 破坏准则平面应变问题的滑移线方法。该文试图初步建立广义 Hoek-Brown 破坏准则的平面应变问题的滑移线场理论的轮廓,并运用该

理论求解圆形硐室围岩塑性区内的滑移线的极坐标曲线方程的数学表达式。

1 广义 Hoek-Brown 破坏准则的平面应变问题的滑移线

1.1 基本方程

理想弹塑性材料平面应变问题在塑性区需满足的基本条件有:

1.1.1 屈服条件(广义 Hoek-Brown 破坏准则的平面应变问题应力分量的双参数表达式) 平面应变问题的特点是沿等截面柱体轴向(取为 z 方向)没有变形,而在垂直轴线的各平面内均发生相同的变形(即不随 z 变化):

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = 0$$

在应变速率张量中有 3 个分量为 0: $\dot{\epsilon}_z = \dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{yz} = 0$ 。应力张量中有 2 个剪应力分量为 0: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, 并且 $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_2$, 为中间主应力。

其余 2 个主应力可按材料力学公式计算:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1)$$

式中: σ_x, σ_y 分别为沿 x 轴和 y 轴方向的正应力, τ_{xy} 为剪应力。

以 θ 表示由 x 轴逆时针旋转到最大主应力 σ_1 所对应的主方向的旋转角,则

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} \quad (2)$$

最大剪应力 τ_{\max} 为

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = k \quad (3)$$

考虑到广义 Hoek-Brown 破坏准则^[2],得到

$$\tau_{\max} = k = \frac{1}{2}\sigma_{ci} \left(m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^a, \sigma_3 = \frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left[\left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}} - s \right] \quad (4)$$

和

$$\begin{aligned} \sigma_3 + k &= \sigma_3 + \frac{1}{2}\sigma_{ci} \left(m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^a = \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma \end{aligned} \quad (5)$$

式中: σ_1 和 σ_3 分别为最大主应力和最小主应力; k 为最大剪应力; σ 为平均应力(静水压力); σ_{ci} 为完整岩石的单轴抗压强度; m_b, s 和 a 为 Hoek-Brown 岩体材料参数。

联立式(2)、(3)、(4)和(5),得到

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left[\left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}} - s \right] + k(1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left[\left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}} - s \right] + k(1 - \cos 2\theta) \\ \tau_{xy} &= k \sin 2\theta\end{aligned}\quad (6)$$

式(6)即为广义 Hoek-Brown 破坏准则的平面应变问题应力分量的双参数表达式,自动满足广义 Hoek-Brown 屈服条件,3 个应力分量由两个参量 (k, θ) 完全确定。

实际上,广义 Hoek-Brown 破坏准则在平面应变问题下的最大剪应力 k 和平均应力(静水压力) σ 分别为

$$\begin{aligned}k &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left[\left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}} - s \right] + k\end{aligned}$$

用上 2 式代换文献[16]中相应公式,立即可得到式(6)。与 Tresca 屈服准则或 Mises 屈服准则平面应变条件下的应力参数方程不同的是,最大剪应力 k 不是常数,随应力状态和广义 Hoek-Brown 破坏准则的物性参数而变化。

最大和最小主应力 σ_1 和 σ_3 可用最大剪应力 k 表示为

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left[\left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}} - s \right] + 2k \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left[\left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}} - s \right]\end{aligned}$$

如果令 $u = \frac{k}{\frac{1}{2}\sigma_{ci}}$, u 为一个无量纲的量,称为相

对最大剪应力,此量将在下面的分析中起到简化计算的作用。

1.1.2 平衡微分方程 平面应变问题应力满足平衡微分方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \gamma \sin \delta \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \gamma \cos \delta\end{aligned}\quad (7)$$

式中: σ_x 和 σ_y 为正应力; τ_{xy} 为剪应力; γ 为体力, $\gamma = \gamma(x, y)$, δ 为体力方向与 y 轴的夹角。

1.2 应力方程式的特征线及特征线上的微分关系

将广义 Hoek-Brown 破坏准则的平面应变问题应力分量的双参数表达式(6)代入平衡方程式(7),得到

$$\left[1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}-1} + \cos 2\theta \right] \frac{\partial k}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial k}{\partial y} -$$

$$2k \left(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \gamma \sin \delta$$

$$\sin 2\theta \frac{\partial k}{\partial x} + \left[1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}-1} - \cos 2\theta \right] \frac{\partial k}{\partial y} +$$

$$2k \left(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \gamma \cos \delta \quad (8)$$

与

$$\frac{\partial k}{\partial x} dx + \frac{\partial k}{\partial y} dy = dk$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy = d\theta \quad (9)$$

联立,可以求出(8)式的特征(线)方程。据附录,系数矩阵 $\Delta = 0$,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

式中:

$$A_1 = 1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}-1} + \cos 2\theta, B_1 = \sin 2\theta,$$

$$C_1 = -2k \sin 2\theta, D_1 = 2k \cos 2\theta.$$

$$A_2 = \sin 2\theta, B_2 = 1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}-1} - \cos 2\theta,$$

$$C_2 = 2k \cos 2\theta, D_2 = 2k \sin 2\theta.$$

将(10)式展开可得

$$a(dy)^2 - 2b(dy)(dx) + c(dx)^2 = 0 \quad (11)$$

式中:

$$a = C_1 A_2 - C_2 A_1 =$$

$$-2k \left\{ \left[1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}-1} \right] \cos 2\theta + 1 \right\}$$

$$b = \frac{1}{2} (C_1 B_2 - C_2 B_1 + D_1 A_2 - D_2 A_1) =$$

$$-2k \left[1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}-1} \right] \sin 2\theta$$

$$c = D_1 B_2 - D_2 B_1 = 2k \left\{ \left[1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}-1} \right] \cos 2\theta - 1 \right\}$$

以 $\lambda = \frac{dy}{dx}$ 表示应力方程式的特征线切线方向的

斜率,则由(11)式可得

$$\lambda = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} (b \pm \sqrt{b^2 - ac}) =$$

$$\frac{1}{\left[1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}-1} \right] \cos 2\theta + 1} \left\{ \left[1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}-1} \right] \cdot \right.$$

$$\left. \sin 2\theta \mp \sqrt{\left[1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}-1} \right]^2 - 1} \right\} = \tan(\theta \mp \eta)$$

(12)

式中: $\sec 2\eta = 1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}}\right)^{\frac{1}{a}-1}$ 或 $\eta = \frac{1}{2} \arccos \cdot$

$\left[\frac{1}{1 + \frac{2}{am_b} \left(\frac{2k}{\sigma_{ci}}\right)^{\frac{1}{a}-1}} \right]$ 。若已知 σ_3 , 则

$$\sec 2\eta = 1 + \frac{2}{am_b} \cdot \left(m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s\right)^{1-a} \text{ 或 } \eta = \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{1}{1 + \frac{2}{am_b} \left(m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s\right)^{1-a}} \right]$$

式(12)表明,塑性区中有一对共轭斜交剪切滑移面(图 1),形成 2 族非正交滑移线,其共轭角 2η 随极限应力状态和物性而变化。

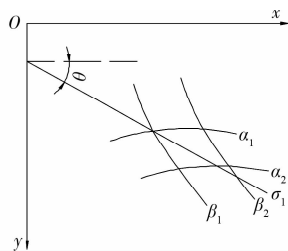


图 1 共轭斜交滑移线族

据附录,特征线上的微分关系满足

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \gamma \sin \delta & B_1 & C_1 & D_1 \\ \gamma \cos \delta & B_2 & C_2 & D_2 \\ dk & dy & 0 & 0 \\ d\theta & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

或

$$(\lambda_i M + E)dk + Fd\theta + Gdy + Hdx = 0 (i = 1, 2) \quad (14)$$

其中

$$M = 2k \left(\frac{\cos 2\theta}{\cos 2\eta} + 1 \right), E = -2k \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\eta}, F = 4k^2, G = -2\gamma k \sin(2\theta + \delta), H = -2\gamma k \cos(2\theta + \delta) \quad (15)$$

利用式(12),得到特征线上的微分关系为

$$\mp \operatorname{tg} 2\eta dk + 2kd\theta = \gamma \sin(2\theta + \delta)dy + \gamma \cos(2\theta + \delta)dx \quad (16a)$$

引入相对最大剪应力 u , 特征线上的微分关系重写为

$$\mp \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\eta du + ud\theta = \frac{\gamma}{\sigma_{ci}} \sin(2\theta + \delta)dy + \frac{\gamma}{\sigma_{ci}} \cos(2\theta + \delta)dx \quad (16b)$$

式中: $\sec 2\eta = 1 + \frac{2}{am_b} u^{\frac{1}{a}-1}$ 或 $\eta =$

$\frac{1}{2} \arccos \left[\frac{1}{1 + \frac{2}{am_b} u^{\frac{1}{a}-1}} \right]$ 。当 $\gamma = 0$ 时,式(16b)变为

$$d\theta = \pm \frac{1}{2u} \sqrt{\left(1 + \frac{2}{am_b} u^{\frac{1}{a}-1}\right)^2 - 1} du \quad (16c)$$

当 $\gamma = 0$ 时,如果某滑移线为直线,即其上的 θ 为常数,则由式(16a)知 k 也为常数。根据式(6),直线滑移线上的 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 也为常数。进而可知,如果某区域内二族滑移线都是直线,则该区域内的 k 和 θ 均为常数,并且该区域内的应力均匀分布。如果已知滑移线场(即已知各节点的位置和角度 θ)及任一节点上的 k ,并不能求得全场其它节点上的 k 。与 Tresca 屈服准则或 Mises 屈服准则平面应变条件下的滑移线场不同,对于广义 Hoek-Brown 屈服准则平面应变条件下的滑移线场,Henchy 定理^[16]不成立。显然,求解广义 Hoek-Brown 屈服准则平面应变条件下的滑移线场问题要困难的多。

作为特例,考察无重(不计体力, $\gamma = 0$)的完整岩石($a = \frac{1}{2}$),其特征线方程和特征线上的 (k, θ) 满足的关系分别为

$$\lambda_i = \operatorname{tg}(\theta \mp \eta) \quad i = 1, 2$$

$$\frac{1}{2} \tan 2\eta + \ln(\sqrt{|\sec 2\eta + 1|} + \sqrt{|\sec 2\eta - 1|}) \mp \theta = \text{常数} \quad (17)$$

式中: $\eta = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{1 + \frac{8k}{m_i \sigma_{ci}}}$ 或 $\sec 2\eta = 1 + \frac{8k}{m_i \sigma_{ci}}$

$$k = \frac{1}{2} \sigma_{ci} \left(m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.3 边界条件

应用广义 Hoek-Brown 破坏准则的滑移线场理论求解具体岩土力学问题(边坡极限承载力、岩基极限承载力等)时,首先要根据应力边界条件构造滑移线网。在滑移线场理论中有两种应力边界条件:1)已知法向应力 σ_n 和剪应力 τ_n 的非特征线应力边界条件;2)弹性区(或刚性区)与塑性区的交界面及应力间断面。

1)已知法向应力 σ_n 和剪应力 τ_n 的非特征线应力边界条件(在边界 Γ 上,已知法向应力 σ_n 和剪应力 τ_n ,求 Γ 上的 (k, θ) 值)。

设 Γ 的切线方向 t 与 x 轴的夹角为 φ ,则 t 与 σ_1 的夹角为 $\varphi - \theta$ (图 2)。在塑性区域的边界上应力满足

$$\sigma_t = \sigma_x = \frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left[\left(\frac{2k}{\sigma_{ci}}\right)^{\frac{1}{a}} - s \right] + k[1 + \cos 2(\varphi - \theta)] \quad (18a)$$

$$\sigma_n = \sigma_y = \frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left[\left(\frac{2k}{\sigma_{ci}}\right)^{\frac{1}{a}} - s \right] + k[1 - \cos 2(\varphi - \theta)] \quad (18b)$$

$$\tau_n = \tau_{xy} = k \sin 2(\varphi - \theta) \quad (18c)$$

联立(18b)和(18c)两式消去 $(\varphi - \theta)$, 得到

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left[\left(\frac{2k}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}} - s \right] + k \mp \sqrt{k^2 - \tau_n^2} \quad (19a)$$

采用 Newton-Raphson 迭代法求出 k 值后, 可解出

$$\theta = \varphi \pm \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\tau_n}{k} \right) \mp \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \quad (19b)$$

$$\sigma_t = \sigma_n \pm 2 \sqrt{k^2 - \tau_n^2} = \sigma_n \pm 2k \cos \left[\arcsin \left(\frac{\tau_n}{k} \right) \right] \quad (19c)$$

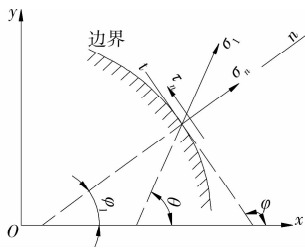


图 2 应力边界条件

2) 应力间断线上的关系式

2 个塑性区的交界线 Γ 如果不是滑移线, 则 2 边的 θ 和 σ_t 值不同。由平衡条件(图 3), σ_n 和 τ_n 在 Γ 的 2 边应相等, 允许 k 、 θ 和 σ_t 在 Γ 2 边取不同的值。间断线 2 侧的 σ_n 和 τ_n 连续, 由式(18b)和(18c)可得

$$\frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left(\frac{2k^+}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}} + k^+ [1 - \cos 2(\varphi - \theta^+)] = \frac{\sigma_{ci}}{m_b} \left(\frac{2k^-}{\sigma_{ci}} \right)^{\frac{1}{a}} + k^- [1 - \cos 2(\varphi - \theta^-)]$$

$$k^+ \sin 2(\varphi - \theta^+) = k^- \sin 2(\varphi - \theta^-) \quad (20)$$

式中: φ 为应力间断线与 x 轴间的夹角, (k^+, θ^+) 和 (k^-, θ^-) 分别为应力间断线两侧的 (k, θ) 值。

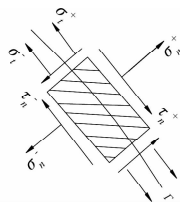


图 3 塑性区交界线两边的应力

由于 $\sigma_n = \sigma_t - 2k \cos 2(\varphi - \theta)$, 因此

$$\sigma_t^+ - 2k^+ \cos 2(\varphi - \theta^+) = \sigma_t^- - 2k^- \cos 2(\varphi - \theta^-) \quad (21)$$

σ_t 的间断值(跃度)为

$$\langle \sigma_t \rangle = 2k^+ \cos 2(\varphi - \theta^+) - 2k^- \cos 2(\varphi - \theta^-) \quad (22)$$

2 圆形洞室围岩塑性区内的滑移线场

现场观测和理论研究都证明, 在较大的初始地应力作用下, 洞室围岩往往会产生塑性剪切破坏。对称初始应力场(侧压力系数为 1.0)情形下圆形洞室周围的滑移线场的结果从另一个角度阐明围岩不稳定块体形成的机理。

洞室开挖后围岩产生应力重分布, 在洞壁附近, 径向应力 σ_r 迅速降低, 而切向应力 σ_θ 迅速增高, 如果应力状态满足广义 Hoek-Brown 破坏准则, 达到极限平衡状态。此后, 高应力区向围岩深处发展, 达到极限平衡状态的范围也随之增大, 最终到达塑性区与弹性区的交界处。

假设圆形洞室半径为 R_0 (图 4), 周边作用支护力 P_i , 运用上述广义 Hoek-Brown 破坏准则平面应变问题的滑移线应力方程的特征线的性质, 可求解塑性区内滑移线曲线方程的数学表达式。

据文献[17], 在塑性区内最小主应力为

$$\sigma_r = \frac{\sigma_{ci}}{m_b} g(r, P_i) + \sigma_t \quad (23)$$

式中: r 为塑性区内某点的极坐标半径; P_i 为作用在洞室周边的支护力。

$$g(r, P_i) = \left[m_b (1 - a) \ln \left(\frac{r}{R_0} \right) + \left(m_b \frac{P_i}{\sigma_{ci}} + s \right)^{1-a} \right]^{\frac{1}{1-a}}$$

$$\sigma_t = -\frac{\sigma_{ci}}{m_b}$$

按式(4a)得最大剪应力为

$$k = \frac{1}{2} \sigma_{ci} \left(m_b \frac{\sigma_r}{\sigma_{ci}} + s \right)^a = \frac{1}{2} \sigma_{ci} [g(r, P_i)]^a =$$

$$\frac{1}{2} \sigma_{ci} \left[m_b (1 - a) \ln \left(\frac{r}{R_0} \right) + \left(m_b \frac{P_i}{\sigma_{ci}} + s \right)^{1-a} \right]^{\frac{1}{a-1}} \quad (24)$$

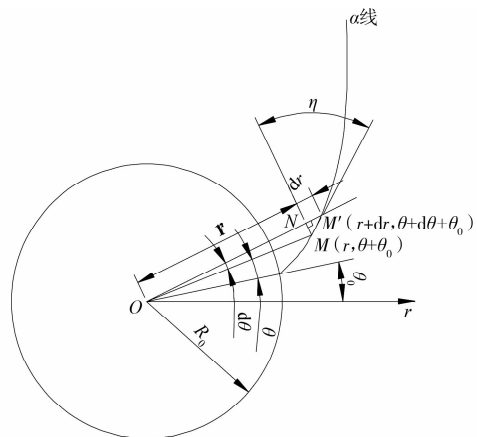


图 4 圆形洞室围岩塑性区内的滑移线 (图中以 α 滑移线为例)

另外,最大主应力方向为环向,与最小主应力方向(径向)垂直,与最大主应力成干 η 角的方向上逐渐发生塑性剪切滑移。据(12)式,有

$$\eta = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{1 + \frac{2}{am_b} \left[m_b(1-a) \ln \left(\frac{r}{R_0} \right) + \left(m_b \frac{P_i}{\sigma_{ci}} + s \right)^{1-a} \right]} \quad (25)$$

滑移线上点 $M(r, \theta + \theta_0)$ 与其无限接近的另一端点 $M'(r + dr, \theta + d\theta + \theta_0)$ 的连线与环向微线段 MN 的夹角为 η , 在微分直角三角形 $M'MN$ (图 4) 中,

$$\frac{dr}{rd(\pm\theta)} = \tan\eta \quad (26)$$

因此,滑移线满足的积分方程为

$$\int_{R_0}^r \frac{dt}{t \tan\eta} = \pm (\theta - \theta_0) \quad (27)$$

令

$$\Psi = \frac{1}{am_b} \left[m_b(1-a) \ln \left(\frac{r}{R_0} \right) + \left(m_b \frac{P_i}{\sigma_{ci}} + s \right)^{1-a} \right] \\ \Phi = \frac{1}{am_b} \left(m_b \frac{P_i}{\sigma_{ci}} + s \right)^{1-a} \quad (28)$$

积分式(28)得到

$$\sqrt{\Psi(1+\Psi)} - \sqrt{\Phi(1+\Phi)} + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{2\Psi + 1 + 2\sqrt{\Psi(1+\Psi)}}{2\Phi + 1 + 2\sqrt{\Phi(1+\Phi)}} \right] = \pm R_0 \left[\frac{\theta - \theta_0}{a} - 1 \right] \quad (29)$$

此方程即为遵守广义 Hoek-Brown 破坏准则的理想弹塑性围岩塑性区内滑移线的极坐标曲线方程的数学表达式,2 组滑移线斜交。

下面给出一个简单的算例。在地质强度指标 GSI 分别为 15 和 30 的石灰岩 ($m_i = 8, D = 0.6$ 和 $\sigma_{ci} = 30$ MPa) 中开挖半径为 2.0 m 的圆形洞室,假设围岩初始应力 P_0 为 2.7 MPa,无支护,那么产生的塑性区半径分别为 18.85 m 和 5.16 m。在洞室周围形成的滑移线场如图 5,在两组剪切滑移面的切割下,围岩塑性区内可能会形成一些潜在的滑移块体。

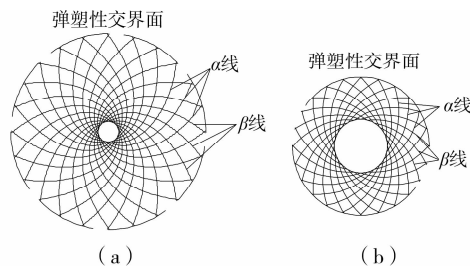


图 5 圆形洞室围岩塑性区中的滑移线场
(a) $GSI=15, m_i=8, D=0.6, \sigma_{ci}=30$ MPa, $P_0=2.7$ MPa, $P_i=0$ MPa, $R_0=2.0$ m, $R=18.85$ m
(b) $GSI=30, m_i=8, D=0.6, \sigma_{ci}=30$ MPa, $P_0=2.7$ MPa, $P_i=0$ MPa, $R_0=2.0$ m, $R=5.16$ m

3 结 论

论文借鉴经典滑移线场,为初步建立广义 Hoek-Brown 破坏准则的平面应变滑移线场理论进行了有益的尝试。

1)根据弹塑性力学平面应变问题的特点,推导以最大剪应力 k 和由 x 轴逆时针旋转到最大主应力 σ_1 所对应的主方向的旋转角 θ 为变量的广义 Hoek-Brown 破坏准则平面应变问题应力分量的双参数表达式。

2)将应力分量的双参数表达式代入静力平衡微分方程,得到以 (k, θ) 为变量的双曲型一阶拟线性偏微分方程组,根据行列式方法,在适当的变量代换后,获得应力偏微分方程组的特征方向和特征上的微分关系。其中,关键的步骤是进行变量代换,使得非线性问题可解。

3)遵守广义 Hoek-Brown 破坏准则的平面应变问题应力偏微分方程组的特征方向表明,塑性区中的共轭斜交剪切滑移面形成两族非正交滑移线,其共轭角随极限应力状态和 Hoek-Brown 岩体材料物性参数而变化。

4)遵守广义 Hoek-Brown 破坏准则的平面应变问题的滑移线场与经典的滑移线场理论有诸多不同之处:(1)如果已知滑移线场(即已知各节点的位置和角度 θ)及任一节点上的 k ,并不能求得全场其它节点上的 k ;(2)对于广义 Hoek-Brown 屈服准则平面应变条件下的滑移线场,Henchy 定理不成立。求解广义 Hoek-Brown 屈服准则平面应变条件下的滑移线场问题要困难的多。

5)因为对称初始应力场条件下圆形洞室理想弹塑性围岩塑性区内最大主应力方向为环向,而滑移线切线方向与最大主应力方向的夹角是最小主应力(径向应力)的函数,结合圆形洞室理想弹塑性围岩的应力分布的分析解,获得到滑移线的极坐标曲线所满足的微分方程,进而得到了其极坐标曲线方程。

附录 一阶拟线性偏微分方程组与其特征线方程和特征线上的微分关系

在塑性力学、空气动力学、松散介质力学等力学中,经常会遇到如下形式的数学物理方程:

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^2 b_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial y} + d_i = 0, (i = 1, 2)$$

(1)

系数矩阵 a_{ij} , b_{ij} 和 d_i 是自变量 x, y 以及未知函数 $u_j (j = 1, 2)$ 的光滑函数, (1) 式称为是关于 $u_j (j = 1, 2)$ 的一阶拟线性偏微分方程组。假定在某一光滑曲线 $L: y = y(x)$ 上给定了 $u_j (j = 1, 2)$ 的值, 则沿 $L, u_j (j = 1, 2)$ 的增量为已知:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} dx + \frac{\partial u_j}{\partial y} dy = du_j|_L, (j = 1, 2) \quad (2)$$

沿曲线 L, dx 和 dy 不同为零, 如果我们认为 $dx \neq 0$, 则方程组(2)可改写为

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} = -\frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{du_j}{dx}, (j = 1, 2) \quad (3)$$

然后由方程组(1)消去 $\frac{\partial u_j}{\partial x}$, 得到

$$\sum_{j=1}^2 (a_{ij} dy - b_{ij} dx) \frac{\partial u_j}{\partial y} = \sum_{j=1}^2 a_{ij} du_j + d_i dx (i = 1, 2) \quad (4)$$

如果由(1)式和(2)式所决定的关于 $\frac{\partial u_j}{\partial x}, \frac{\partial u_j}{\partial y} (j = 1, 2)$ 的系数行列式不为零:

$$\Delta = \det |a_{ij} dy - b_{ij} dx| \neq 0, (i, j = 1, 2) \quad (5)$$

那么按克莱姆法则由(4)式和(3)式能唯一确定 L 上 $u_j (j = 1, 2)$ 的所有一阶偏导数。反之, 如果

$$\Delta = \det |a_{ij} dy - b_{ij} dx| = 0, (i, j = 1, 2) \quad (6)$$

时, 就不能唯一确定 L 上关于 $u_j (j = 1, 2)$ 的所有一阶偏导数, 也就无法求得 L 邻域中的 $u_j (j = 1, 2)$ 值。当曲线 L 上处处满足(6)式时, 称 L 是方程(1)式的特征线方程, 而称方向 $\frac{dy}{dx}$ 为相应的特征方向。

如果对于(1)式的解, 在某区域 G 中的每一点上(6)式都有两个相异实根 $\lambda_j (j = 1, 2)$, 称(1)式对于该解是狭义双曲型的, 这时区域 G 中每一点都有且仅有两条实的特征线通过。反之, 如果对某区域 G 中的每一点, (6)式都不存在实根, 则称(1)式对该解在上述区域中是椭圆型的。

假定平面 (x, y) 上的曲线 L 是方程组(1)与给定解 $u_j(x, y) (j = 1, 2)$ 相应的特征线, 在曲线上 $\Delta = 0$, 但方程组(4)是相容的, 因此在行列式 Δ 的第 $j (j = 1, 2)$ 列上换成方程组(4)的右端以后所形成的行列式也都为零。此时函数 $u_j(x, y) (j = 1, 2)$ 将有以下 3 个关系式

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$$

但所有这些条件并非相互独立, 假设 $\Delta_1 = 0$, 可

以推得 $\Delta_2 = 0$ 。因此, 在曲线 L 上, 解 $u_j(x, y) (j = 1, 2)$ 满足 $\Delta = 0, \Delta_k = 0 (k = 1 \text{ 或 } 2)$, 它们称为方程组(1)的特征方程组, 第 1 个称为特征方向方程, 第 2 个称为特征上的微分关系。特征方向方程为

$$dy - \lambda_i dx = 0 (i = 1, 2) \quad (7)$$

其中 λ_i 是方程

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} - b_{11} & \lambda a_{12} - b_{12} \\ \lambda a_{21} - b_{21} & \lambda a_{22} - b_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

的根。特征线上的微分关系为

$$\begin{vmatrix} a_{11} du_1 + a_{12} du_2 + d_1 dx & \lambda a_{12} - b_{12} \\ a_{21} du_1 + a_{22} du_2 + d_2 dx & \lambda a_{22} - b_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

或

$$(\lambda_i M + E) du_1 + F du_2 + G dy + H dx = 0 (i = 1, 2) \quad (10)$$

其中

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, E = \begin{vmatrix} b_{12} & a_{11} \\ b_{22} & a_{21} \end{vmatrix}, F = \begin{vmatrix} b_{12} & a_{12} \\ b_{22} & a_{22} \end{vmatrix} \\ G = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} \\ d_2 & a_{22} \end{vmatrix}, H = \begin{vmatrix} b_{12} & d_1 \\ b_{22} & d_2 \end{vmatrix} \quad (11)$$

参考文献:

- [1] 俞茂宏, 杨松岩, 刘春阳, 等. 统一平面应变滑移线场理论[J]. 土木工程学报, 1997, 30(2): 14-26.
YU MAO-HONG, YANG SONG-YAN, LIU CHUN-YANG, et al. Unified plane strain slip line field theory system[J]. China Civil Engineering Journal, 1997, 30(2): 14-26.
- [2] HOEK E, CARRANZA-TORRES C, CORKUM B. Hoek-Brown failure criterion - 2002 edition [C] // NARMS-TAC. Mining and Tunnelling Innovation and Opportunity: Proceedings of 5th North American Rock Mechanics Symposium and 17th Tunnelling Association of Canada Conference, Toronto, Ontario, Canada, July 7-10, 2002. Toronto, Canada: University of Toronto Press, 2002: 267-271.
- [3] HAJIABDOLMAJID V, KAISER P K, MARTIN C D. Modelling brittle failure of rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2002, 39(6): 731-741.
- [4] PRIEST S D. Determination of shear strength and three-dimensional yield strength for the Hoek-Brown criterion[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering,

- 2005, 38(4): 299-327.
- [5] SOFIANOS A I, NOMIKOS P P. Equivalent Mohr-Coulomb and generalized Hoek-Brown strength parameters for supported axisymmetric tunnels in plastic or brittle rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2006, 43(5): 683-704.
- [6] ZHANG L. A generalized three-dimensional Hoek-Brown strength criterion[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2008, 41(6): 893-915.
- [7] SHARAN S K. Analytical solutions for stresses and displacements around a circular opening in a generalized Hoek-Brown rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2008, 45(1): 78-85.
- [8] SERRANO A, OLALLA C, GONZÁLEZ J. Ultimate bearing capacity of rock masses based on the modified Hoek-Brown criterion[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2000, 37(6): 1013-1018.
- [9] YANG X L, YIN J H. Upper bound solution for ultimate bearing capacity with a modified Hoek-Brown failure criterion [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2005, 42(4): 550-560.
- [10] YANG X L, YIN J H. Linear Mohr-Coulomb strength parameters from the non-linear Hoek-Brown rock masses [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2006, 41(8): 1000-1005.
- [11] MERIFIELD R S, LYAMIN A V, SLOAN S W. Limit analysis solutions for the bearing capacity of rock masses using the generalised Hoek-Brown criterion[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2006, 43(6): 920-937.
- [12] YANG X L, ZOU J F. Stability factors for rock slopes subjected to pore water pressure based on the Hoek-Brown failure criterion [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2006, 43(7): 1146-1152.
- [13] YANG X L. Seismic displacement of rock slopes with nonlinear Hoek-Brown failure criterion [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2007, 44(6): 948-953.
- [14] LI A J, MERIFIELD R S, LYAMIN A V. Stability charts for rock slopes based on the Hoek-Brown failure criterion[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2008, 45(5): 689-700.
- [15] SAADA Z, MAGHOUS S, GARNIER D. Bearing capacity of shallow foundations on rocks obeying a modified Hoek-Brown failure criterion[J]. Computers and Geotechnics, 2008, 35(2): 144-154.
- [16] 王仁,熊祝华,黄文彬. 塑性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [17] 曾钱帮,王恩志,王思敬. 深埋圆形洞室围岩塑性形变压力的广义 Hoek-Brown 破坏准则解及其三元非线性回归模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(S2): 3543-3549.
- ZENG QIAN-BANG, WANG EN-ZHI, WANG SI-JING. Analytical solution for the plastic deformation pressure around a deep circular opening based on the generalized Hoek-Brown failure criterion and its tri-variable non-linear regression mathematic model [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(S2): 3543-3549.

(编辑 王秀玲)