

# 剪力滞对超静定箱梁结构性能的影响分析

周世军

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

**摘要:**提出一种考虑梁弯曲与剪力滞变形耦合影响的分析箱梁剪力滞效应的有限元方法, 导出相应的有限单元公式。在此基础上, 首先分析简支静定箱梁的剪力滞系数和考虑剪力滞影响的梁的挠度, 并与相应的变分法解析结果作对比, 然后分析超静定连续箱梁的剪力滞系数, 将其结果用叠加法和系数矩阵法结果进行验证。最后分析剪力滞对超静定多跨连续箱梁内力及变形的影响。结果表明: 剪力滞对静定和超静定箱梁变形及截面应力重分布的影响较大; 剪力滞对超静定箱梁内力重分布的影响很小, 可以在设计计算中忽略不计。

**关键词:**箱形梁; 剪力滞; 内力重分布; 超静定结构; 有限元法

**中图分类号:** TU311.4    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1674-4764(2010)04-0007-05

## Effect of Shear Lag on Structural Behaviours in Indeterminate Box-Girders

ZHOU Shi-jun

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

**Abstract:** A finite element method considering interaction between bending and shear lag deformation was proposed and the finite element formulations including the effect of shear lag was deduced. The effect of shear lag on structural behaviours in indeterminate box-girders was studied in detail based on the proposed method. Firstly, the shear lag effects on deflection and the shear lag coefficients were analyzed for both determinate and indeterminate beams. The results obtained by using the proposed method were compared with those by using the analytical method. Finally, the effect of shear lag on redistribution of internal forces including shear force, bending moment, and additional bending moment due to shear lag in indeterminate box-girder bridges was studied. It is found that the effects of shear lag on deflection and stresses at a cross-section are obvious for both determinate and indeterminate beams, while the effect of shear lag on internal forces in indeterminate box-girder bridges is small and may be neglected.

**Key words:** box girder, shear lag, redistribution of internal forces, indeterminate structures; finite element method

剪力滞问题是薄壁箱梁的重要力学特征之一。关于箱梁剪力滞理论和分析方法的研究已有很多, 并取得了一些有价值的成果, 部分如文献[1-19]。其中大多数采用能量变分法<sup>[1-10, 19]</sup>、比拟杆法、有限

条法和板壳有限元法。最近一些研究者试图用梁段有限元法分析箱梁的剪力滞效应, 利用变分法导出了1个每结点考虑了1个剪力滞自由度的薄壁箱梁单元的矩阵公式<sup>[6-10]</sup>。这种用梁段有限元法分析箱

收稿日期: 2009-11-26

基金项目: 重庆市自然科学基金资助项目(CSTC, 2010BB6048)

作者简介: 周世军(1961-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事桥梁工程研究, (E-mail) sjzhou8@163.com

梁剪力滞效应的方法由于简单方便、同时适应范围广而更具有实用性。然而,由于这种方法在单元分析中仅考虑了一个剪力滞自由度,不能很好地适应于各种剪力滞分析的边界条件,如仅可以满足当  $\varphi = 0$  ( $\varphi$  为剪切转角的最大差值) 时的边界条件,但当需要  $\varphi' = 0$  的边界条件时则无法考虑。

为此,文献[19]提出了一种基于梁段单元的分析箱梁剪力滞效应的系数矩阵法。该方法首先假定剪力滞的影响只改变梁截面上正应力的分布,但不改变梁的截面内力沿梁纵向的分布;在此基础上导出了求解箱梁剪力滞效应的单元系数矩阵和广义荷载列阵。文献[19]中的系数矩阵法简单、方便,计算精度也较高(当为静定结构时与解析解完全一致),适应不同边界和荷载条件下的实际结构的剪力滞效应分析。但该方法由于未计入剪力滞变形与梁竖向位移的耦合影响,因此分析时不能同时考虑剪力滞对梁变形以及结构内力重分布的影响。

该文采用与文献[1-10], [19]相同的考虑剪力滞效应的变分法基本原理,但与文献[6-10]中方法不同的是提出了一个每结点有 2 个剪力滞自由度的新的基于梁单元的有限元方法。另外与文献[19]不同的是考虑了剪力滞变形与梁竖向弯曲变形的耦合影响,提出了剪力滞影响刚度矩阵的概念,导出了相应的有限单元分析公式,并分析了剪力滞对超静定结构内力的影响。

## 1 考虑剪力滞变形与弯曲耦合影响的梁单元公式

薄壁箱梁在竖向荷载作用下,翼板的纵向位移沿横向可以表示为三次抛物线分布<sup>[2-3]</sup>(是对 E. Reissner 所采用二次抛物线线性的修正)。

$$u(x, z) = h_i \left[ \frac{dv}{dx} + \left( 1 - \frac{z^3}{(\alpha b)^3} \right) \varphi(x) \right] \quad (1)$$

其中,  $v$  为梁的竖向位移;  $u(x, z)$  为梁的纵向位移;  $\varphi(x)$  为剪切转角的最大差值;  $b$  为箱室翼板净宽的一半;  $\alpha$  为翼板悬臂部分相对宽度的修正因子;  $h_i$  为截面形心轴至翼板中面的距离。

应用变分法,可以得到关于  $\varphi(x)$  和  $v$  的微分方程和边界条件<sup>[3]</sup>。与箱梁剪力滞分析变分法微分方程相对应的单元应变能可以表示为<sup>[3-8]</sup>

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_w (v'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI_s [(\varphi'')^2 +$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} v'' \varphi' + \frac{9}{14} (\varphi')^2 ] dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{9GI_s \varphi^2}{5b^2} dx \\ & = \frac{1}{2} EI \int_0^l (v'')^2 dx + \frac{3}{4} EI_s \int_0^l v'' \varphi' dx + \\ & \frac{9}{28} EI_s \int_0^l (\varphi')^2 dx + \frac{1}{2} \frac{9GI_s}{5b^2} \int_0^l \varphi^2 dx \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $I$  为截面形心主惯性矩,  $I_s$  为上下翼板对截面形心轴的惯性矩 ( $I = I_w + I_s$ , 其中  $I_w$  为腹板对截面形心的惯性矩);  $E$  为弹性模量,  $G$  为剪切模量;  $n$  和  $k$  称作瑞斯纳 (Reissner) 参数。

考虑箱梁剪力滞变形与弯曲耦合影响的梁单元如图 1 所示。单元的结点位移向量和结点力向量分别定义为:

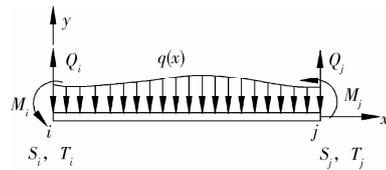


图 1 梁单元

$$\{\delta\} = [v_i \quad \theta_i \quad \varphi_i \quad \varphi_i' \quad v_j \quad \theta_j \quad \varphi_j \quad \varphi_j']^T \quad (3)$$

$$\{F\} = [Q_i \quad M_i \quad S_i \quad T_i \quad Q_j \quad M_j \quad S_j \quad T_j]^T \quad (4)$$

其中,  $v_i$  和  $v_j$  为竖向位移;  $\theta_i$  和  $\theta_j$  为角位移;  $\varphi_i$ 、 $\varphi_i'$  和  $\varphi_j$ 、 $\varphi_j'$  为单元两端的广义剪力滞位移参数;  $Q_i$  和  $Q_j$  为剪力;  $M_i$  和  $M_j$  为弯矩;  $S_i$ 、 $T_i$ 、 $S_j$  和  $T_j$  分别为与  $\varphi_i$ 、 $\varphi_i'$ 、 $\varphi_j$  和  $\varphi_j'$  对应的广义剪力滞单元结点力。单元的外力势能为

$$V = -\{\delta\}^T \{F\} - \int_0^l q_y(x) v(x) dx \quad (5)$$

其中,  $q_y$  为单元上的竖向分布荷载。

单元的总势能为

$$\Pi = U + V \quad (6)$$

对竖向位移  $v$  和剪力滞位移  $\varphi$  均选用三次抛物线插值函数, 分别用  $[N_v]$  和  $[N_\varphi]$  表示。有

$$v = [N_v] \{\delta\} \quad (7)$$

$$\varphi = [N_\varphi] \{\delta\} \quad (8)$$

将式(7)和(8)代入式(6), 并对总势能取驻值, 得到单元刚度矩阵

$$[K] = [K_e] + [K_s] \quad (9)$$

其中

$$[K_e] = EI \int_0^l [N_v'']^T [N_v''] dx \quad (10)$$



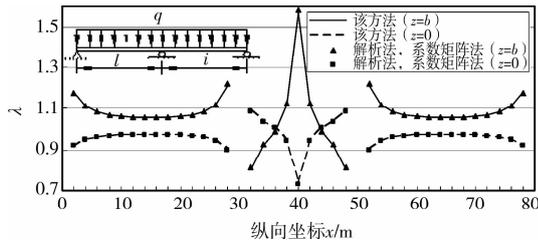


图 5 两跨连续梁在均布荷载下剪力滞系数沿梁纵向分布

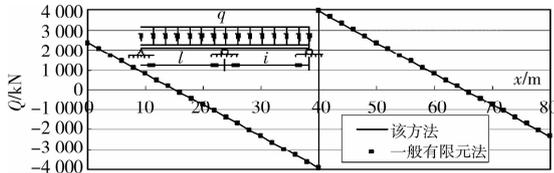


图 6 两跨连续梁在均布荷载下剪力图

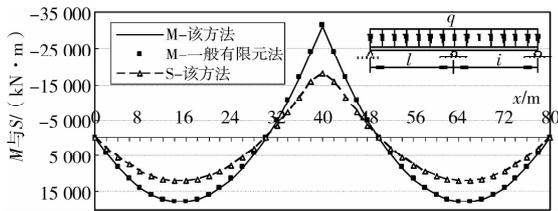


图 7 两跨连续梁在均布荷载下弯矩和剪力滞附加弯矩图

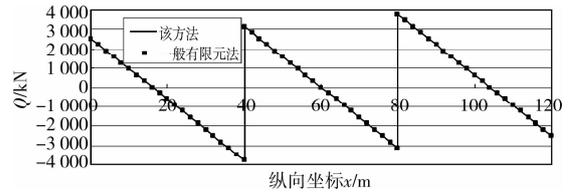


图 8 三跨连续梁在均布荷载下剪力图

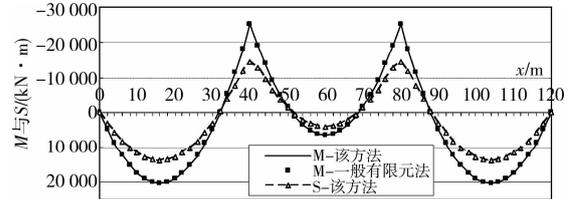


图 9 三跨连续梁在均布荷载下弯矩和剪力滞附加弯矩图

由图 2-9 和表 1, 可以得出:

1) 剪力滞对箱梁挠度的影响是明显的。进一步分析表明, 对相同截面参数的梁, 其刚度越大(意味着跨度相应减小), 这种影响比重就越大。

2) 无论对简支梁或连续梁, 用有限梁段方法分析得到的梁的挠度和剪力滞系数结果与变分法解析结果<sup>[3]</sup>几乎完全一致; 2 种方法挠度的最大相对误差

表 1 两跨连续梁截面内力比较

截面位置	剪力(kN)			弯矩(kN·m)		
	本文	一般有限元	差异%	本文	一般有限元	差异%
边支座 x=0	2377.7	2370	0.32	0	0	0
L/4(x=10 m)	797.7	790	0.97	15 876.6	15 800	0.48
L/4(x=20 m)	-782.3	-790	-0.97	15 953.2	15 800	0.97
3L/4(x=30 m)	-2362.3	-2 370	-0.32	229.7	0	
中间支座左	-3 942.3	-3 950	-0.19	-31 293.7	-31 600	-0.97

一般小于 0.1%; 2 种方法剪力滞系数的最大相对误差一般也小于 0.1%, 仅当单元数目很小时在弯矩接近零或中间支座截面附近的区域相对误差稍大, 但也仅为 2% 左右。剪力滞系数在弯矩接近零的区域稍大的原因是由于剪力滞系数定义中(式(13)和(14))弯矩在分母上的缘故。由文献[3]、[5-7]、[10]可知, 变分法结果与试验结果、有限条法和板壳有限元法结果吻合良好, 因此该方法结果同样也具有很好的精度。

3) 用文献[19]提出的系数矩阵方法分析得到的简支梁和连续梁的剪力滞系数结果与变分法解析结果、叠加法结果<sup>[3]</sup>完全一致, 表明用文献[19]方法计算静定与超静定结构的剪力滞系数其精度是很好的。区别在于用本文方法可以计入剪力滞对梁竖向弯曲刚度的影响, 另外对于超静定结构也能反应剪力滞引起的梁的刚度变化对结构内力重分配的影响。

响。

4) 通过对两跨连续梁和三跨连续梁截面内力结果的分析, 表明剪力滞效应对超静定结构内力重分配的影响较小, 在实际应用和进一步的研究工作中可以忽略不计。这也从另一方面证明了该方法和文献[19]提出的系数矩阵法都是十分有效的。在实际应用中具体采用哪种方法可以根据所要求解问题的目的决定。

### 4 结论

分析了简支箱梁和连续箱梁的剪力滞系数和考虑剪力滞影响的梁的挠度, 其结果与变分法解析结果吻合很好, 验证了该方法的有效性和可靠性。对简支梁, 超静定两跨连续和三跨连续箱梁考虑剪力滞效应的变形和截面内力的分析结果表明, 剪力滞效应对静定和超静定箱梁变形及截面应力的影响较

大;但对超静定箱梁内力重分布的影响较小。在实际应用或进一步的研究工作中可以忽略剪力滞效应对超静定箱梁内力重分布的影响。

#### 参考文献:

- [1] REISSNER E. Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy[J]. Q. Appl. Math. 1946, 5(3):268-278.
- [2] 郭金琼,房贞政,罗孝登. 箱形梁桥剪力滞效应分析[J]. 土木工程学报,1983,16(1):1-13.  
GUO JIN-QIONG, FANG ZHEN-ZHENG, LUO XIAO-DENG. Analysis of shear lag effect in box girder bridges[J]. China Civil Engineering Journal, 1983,16(1):1-13.
- [3] 张士铎,邓小华,王文州. 箱形薄壁梁剪力滞效应[M]. 北京:人民交通出版社,1998.
- [4] CHANG S T. Prestress influence on shear-lag effect in continuous box-girder bridge [J]. ASCE, J. of Structural Engineering, 1992,118(11):3113-3121.
- [5] CHANG S T. Shear-lag effect in simply supported prestressed concrete box-girder bridge[J]. ASCE, J. of Bridge Engineering, 2004,9(2):178-184.
- [6] LUO Q Z, LI Q S, TANG J. Shear lag in box girder bridges[J]. ASCE, J. of Bridge Engineering, 2002, 7(5):308-313.
- [7] LUO Q Z, TANG J, LI, Q S. Finite segment method for shear lag analysis of cable-stayed bridges[J]. ASCE, J. of Structural Engineering, 2002, 128(12):1617-1622.
- [8] LUO Q Z, WU Y M, LI Q S, et al. A finite segment model for shear lag analysis [J]. Engineering Structures, 2004, 26(14): 2113-2124.
- [9] 罗旗帜,娄奕红,杜嘉斌,等. 变高度连续曲线箱梁的剪力滞效应[J]. 铁道学报, 2007, 29(5):79-84.  
LUO QI-ZHI, LOU YI-HONG, DU JIA-BIN, et al. The shear lag effect on continuous curved box girder bridges with variable depth[J]. Journal of the China Railway Society, 2007,29(5):79-84.
- [10] WU Y P, LIU S I, ZHU Y L, et al. Matrix analysis of shear lag and shear deformation in thin-walled box beams [J]. ASCE, J. Eng. Mech., 2003, 129(8):944-950.
- [11] 张元海,李乔. 变截面梁的应力计算及其分布规律研究[J]. 工程力学, 2007, 24(3):78-82.  
ZHANG YUAN-HAI, LI QIAO. Stress calculation and stress distribution analysis of non-uniform beams [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(3):78-82.
- [12] 张元海,李乔. 箱形梁剪力滞效应分析中的广义力矩研究[J]. 铁道学报, 2007, 29(1):77-81.  
ZHANG YUAN-HAI, LI QIAO. Study on the generalized moment in shear lag effect analysis of the box girder[J]. Journal of the China Railway Society, 2007, 29(1):77-81.
- [13] 曹国辉,方志. 变分原理分析连续箱梁开裂后的剪力滞效应 [J]. 工程力学, 2007, 24(4):75-80.  
CAO GUO-HUI, FANG ZHI. Shear lag effect of cracked continuous box girder analysed by variational principle[J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(4):75-80.
- [14] 甘亚南,周广春. 薄壁箱梁纵向剪滞翘曲函数精度选择的研究[J]. 工程力学, 2008, 25(6):100-106.  
GAN YA-NAN, ZHOU GUANG-CHUN. An approach for precision selection of longitudinal shear lag warping displacement function of thin-walled box girders [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(6):100-106.
- [15] 甘亚南,周广春. 一种薄壁箱梁自振频率分析的多参数翘曲位移函数法[J]. 铁道学报, 2007, 29(5):93-98.  
GAN YA-NAN, ZHOU GUANG-CHUN. An approach of multi-parameter warping displacement function for natural frequency analysis of thin-walled box girders[J]. Journal of the China Railway Society, 2007, 29(5):93-98.
- [16] 韦成龙,李斌,曾庆元. 变截面连续箱梁桥剪力滞及剪切变形双重效应分析的传递矩阵法[J]. 工程力学, 2008, 25(9):110-117.  
WEI CHENG-LQNG, LI BIN, ZENG QING-YUAN. Transfer matrix method considering both shear lag and shear deformation effects in non-uniform continuous box girder[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9):110-117.
- [17] 刘世忠. 薄壁箱梁剪滞剪切效应自振特性分析[J]. 铁道学报, 2006, 28(5):59-64.  
LIU SHI-ZHONG. Natural vibration frequency analysis of thin-wall box beam considering both shear lag and shear deformation [J]. Journal of the China Railway Society, 2006, 28(5):59-64.
- [18] 王慧东,强士中. 压弯荷载下薄壁箱梁剪力滞效应的变分解[J]. 北京工业大学学报, 2006, 32(11):982-987.  
WANG HUI-DONG, QIANG SHI-ZHONG. Differential method for shear lag effect of thin-walled box girder under compact-bending load [J]. Journal of Beijing Polytechnic University 2006, 32(11):982-987.
- [19] 周世军. 箱梁的剪力滞效应分析[J]. 工程力学, 2008, 25(2):204-208.  
ZHOU, SHI-JUN. Shear lag analysis of box girders [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(2):204-208.

(编辑 胡英奎)