

半刚性结构找形分析的实用方法

蔡建国¹, 余灵智², 王 方¹, 冯 健¹, 章传胜³

(1. 东南大学 混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室, 南京 210096;

2. 温州市建筑设计研究院, 浙江 温州 325003; 3. 南京市民用建筑设计院, 南京 210002)

摘要:在讨论拉索预应力模拟方法的基础上, 利用刚度法理论来确定半刚性结构零状态的几何尺寸。在初始态几何给定时, 初始态的预应力分布决定了零状态的放样几何。首先给出了用于求解拉索初始缺陷长度的影响矩阵法; 但该方法初始缺陷长度对控制点位移的影响因子是线性叠加的, 即结构反应呈线性, 这与半刚性结构的几何非线性相悖。为了减小结构非线性反应带来的误差, 对影响矩阵法的影响因子进行了修正, 提出了影响矩阵修正法。最后利用 ANSYS 参数化设计语言 APDL 编制程序对一个半刚性结构实例进行了找形分析, 数值算例表明了影响矩阵修正法减少了影响矩阵法中结构线性反应假定带来的误差, 能够应用于刚度较小的半刚性结构的找形分析。

关键词:半刚性结构; 找形分析; 影响矩阵; 非线性分析; 影响因子

中图分类号:TU394; TU311.41 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2010)06-0042-05

Practical Method of Form-finding of Semi-rigid Structures

CAI Jian-guo¹, YU Ling-zhi², WANG Fang¹, FENG Jian¹, ZHANG Chuan-sheng³

(1. Key Laboratory of C&RC Structures of Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 210096, P. R. China;

2. Wenzhou Architectural Design and Research Institute, Wenzhou 325003, P. R. China;

3. Nanjing Design Institute of Civil Architectural, Nanjing 210002, P. R. China)

Abstract: Based on the discussion of the simulation for the cable prestress, the rigidity theory was used to identify the geometrical dimensions of semi-rigid structures in zero state. When the structural geometry in initial state is given, the geometrical dimension in zero state is determined by the initial prestress distribution. The contribution-matrix method is firstly applied to get the initial lack of fit. However, the influencing factor of initial lack of fit on the displacement of control point is linear superposition, that is, the structural response is linear, and it is irreconcilable with the geometry nonlinear of semi-rigid structure. In order to reduce the error of nonlinear structural response, the influencing factor in the contribution-matrix method is revised, and modified contribution-matrix method is put forward. Programs by ANSYS parameter design language APDL are worked out for the form-finding analysis of beam-string structure of a practical project. The numerical results show that the modified contribution-matrix method reduces the errors of the assumption of structural linear response. And it can be applied to the form-finding of semi-rigid structures with small stiffness.

Key words: semi-rigid structure; form-finding analysis; contribution matrix; nonlinear analysis; influencing factor

收稿日期: 2010-02-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50478075); 江苏省六大人才高峰项目(A类)(07-F-008); 东南大学优秀博士学位论文基金资助项目(YBJJ0817)

作者简介: 蔡建国(1984-), 男, 博士生, 主要从事空间结构的研究, (E-mail) caijg_ren@126.com。

冯健(联系人), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事预应力结构的研究, (E-mail) fengjian@seu.edu.cn。

空间结构是建筑工程中广泛应用的一种结构形式。按刚度差异以及组合方式,可将空间结构分成 3 类:刚性结构、柔性结构和半刚性结构。刚性结构在荷载作用下,产生的位移相对于结构几何原始尺寸很小,其刚度贡献来自结构的组成和构件自身的刚度。而柔性结构在荷载作用下,荷载位移曲线不是线性的,表现出变化的刚度,故其亦称之为非线性结构,柔性结构几乎是没有自然刚度的,它的结构刚度必须是由索、杆或膜中的预应力来实现的。半刚性结构是介于刚性结构和柔性结构之间的 1 种结构体系。它充分发挥了组成它的刚性结构部分和柔性结构部分的各自优点,改善了整体结构的受力性能。半刚性结构的刚度表现出一定的几何非线性,它的刚度贡献主要来自结构的组成、构件自身的刚度以及预应力 3 个方面,最典型的结构形式是张弦梁结构和斜拉结构。

半刚性结构找形分析最为关键的问题就是结构初始预应力水平的确定。预应力分析的方法可以归纳为两大类:一是基于力的分析方法,二是基于形变的分析方法^[1]。基于力的分析方法由于计算过程复杂,在找形分析中较少采用。Hanaor 等^[2-3]将结构中拉索产生预应力的本质归纳为拉索的初始缺陷长度(lack of fit);邓华等^[4]在此基础上提出了空间网格结构的计算分析方法,证明了该方法与将拉索张力作为外力分析方法的一致性。拉索初始缺陷长度的求解常用的方法为迭代法及其改进形式^[5-7]。迭代法最大的限制就是:当存在目标位移约束时,控制点必须与索节点重合,且位移方向与拉索变形方向一致。影响矩阵法广泛应用于空间结构的预应力分析^[8-10]、桥梁工程中斜拉索的预应力优化^[11-12]以及机械工程中应力分析^[13]。影响矩阵法理论完善,但是只能解决线性问题,对于刚度较大的半刚性结构运用很方便。

该文给出半刚性结构中拉索的预应力实现过程与模拟方法,以刚度法理论为基础,利用影响矩阵法和影响矩阵修正法求解索的初始缺陷长度,从而获得结构零状态拉索需要施加的初始应变或温度荷载。文章最后给出 1 个工程实例,分别应用影响矩阵法和影响矩阵修正法进行了找形分析并对 2 种方法的结果进行了分析比较。

1 找形分析计算方法

1.1 预应力模拟方法

虽然半刚性结构体系在实际工程中已经得到较多的应用,但找形分析的研究多集中在柔性空间结构上,如悬索结构、薄膜结构和张拉整体结构^[14-16]。

一般而言,有 2 类体系可施加预应力,第 1 类是静不定(超静定)动定体系,第 2 类是静不定动不定结构体系。在这 2 种体系中,预应力可通过拉索的初始缺陷长度来实现^[2-3]。预应力的施加过程如图 1 所示。

假定 MN 是无应力状态时拉索的几何长度,拉索经过张拉至 $M'N'$ 并锚固进结构,此时在索里就产生了预应力。当索被锚固进结构后结构也产生了变形,协同变形后的拉索长度为 $M'N'$ ^[7]。初始缺陷长度即等价于拉索的几何长度和实际长度的差值,若用 B 表示初始缺陷长度,即

$$B = M'N' - MN \quad (1)$$

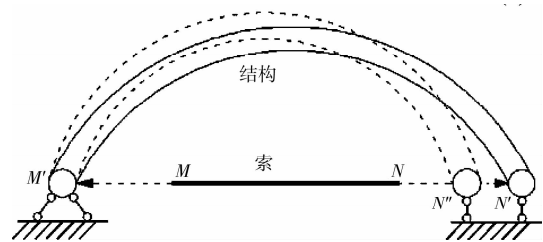


图 1 预应力张拉过程图

B 的值是由预应力的设计要求所决定的,反过来说,如果 B 的值已知,那么结构的预应力状态也能推出。所以在半刚性结构的找形中, B 值是个关键。

索的初应变定义如下:

$$\epsilon_0 = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (2)$$

其中: ΔL 是索的初始缺陷长度, L 是索实际长度(图 1 中的 $M'N'$), L_0 是索的几何长度(图 1 中 MN),在有限元分析软件中,索的初应变 ϵ_0 可以用来表示初始缺陷长度。索的初应变可以写成:

$$\epsilon_0 = \alpha \Delta t \quad (3)$$

其中 α 是线膨胀系数, Δt 是降温度数,所以索的预应力可以由索单元的降温来模拟。

1.2 半刚性结构的刚度法方程

对半刚性结构施加预应力的过程是克服索初始缺陷长度而强迫就位的过程。因此,该预应力结构的矩阵力学模型为:

$$\text{平衡方程: } \mathbf{N}^T \mathbf{F} = \mathbf{P}_0 \quad (4)$$

$$\text{物理方程: } \mathbf{F} = \mathbf{K}_e (\Delta - B) \quad (5)$$

$$\text{几何方程: } \Delta = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta} \quad (6)$$

其中: \mathbf{N} 为几何矩阵; \mathbf{N}^T 为 \mathbf{N} 转置; \mathbf{P}_0 为节点力向量; \mathbf{F} 为杆件内力向量; Δ 为杆件伸长长度; B 为缺陷长度; $\boldsymbol{\delta}$ 为节点变位; \mathbf{K}_e 为单元刚度矩阵。

根据式(4)、(5)和(6),可以推导出刚度法的表达式:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{N}^T \mathbf{K}_e B = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 \quad (7)$$

其中: $\mathbf{K} = \mathbf{N}^T \mathbf{K}_e \mathbf{N}$ 为结构整体刚度矩阵; \mathbf{P}_1 为索单元在没有锚固到结构上之前的预加内力产生的等效节点力。

如果已知缺陷长度 B , 就可通过刚度法对结构进行分析, 索力和结构位移也能求得。但在找形分析中, 一些目标控制点上的索力和结构位移是已知的, 而初始缺陷长度 B 是未知且待求的, 这和一般结构分析的步骤是相反的, 而影响矩阵法可以解决这个问题。

2 拉索初始缺陷的求解方法

半刚性结构的找形主要是初始态预应力分布的确定和零状态放样几何的确定。而一般情况下, 初始状态几何已由设计给定, 只要初始态预应力分布一旦确定, 则零状态的放样几何也会随之确定, 而且初始态预应力分布的确定主要是初始态下拉索的索力值确定, 根据 2.1 节预应力的计算方法, 这样半刚性结构的找形分析关键在于拉索初始缺陷长度的确定。

2.1 影响矩阵法

如果结构满足线性叠加原理, 影响矩阵法方程可以写为:

$$[G]\{A\} = \{D\} \quad (8)$$

其中: $[G]$ 为影响矩阵, $\{A\}$ 为主动控制向量, $\{D\}$ 为被动控制向量。

影响矩阵中的元素可以是力、应力或位移等。在半刚性结构的找形分析中, 被动控制向量可以用来代表一些控制点的目标位移, 主动控制向量可以是初始缺陷, 初始缺陷可以通过索单元的降温来模拟。由目标状态的 n' 个已知的控制点位移值确定 n 根拉索的温度荷载。欲唯一确定 n 根拉索的温度荷载, 必须满足 $n' = n$ 。其步骤如下:

1) 对第 i 根拉索施加单位温度荷载(降温), 其余拉索不施加温度荷载, 通过结构有限元分析求解

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{P}_1 = \mathbf{N}^T \mathbf{K}_e \mathbf{B} \quad (9)$$

可得到第 j 个控制点的位移 δ_{ji}^1 , 形成第 i 根拉索对各控制点位移的影响向量 $\{\delta_i^1\}$, 即:

$$\{\delta_i^1\} = \{\delta_{1i}^1 \quad \delta_{2i}^1 \quad \cdots \quad \delta_{ni}^1\}^T \quad (10)$$

由此可得到位移影响矩阵 \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \{\delta_1^1\} & \{\delta_2^1\} & \cdots & \{\delta_n^1\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}^1 & \delta_{12}^1 & \cdots & \delta_{1n}^1 \\ \delta_{21}^1 & \delta_{22}^1 & \cdots & \delta_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1}^1 & \delta_{n2}^1 & \cdots & \delta_{nn}^1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

2) 结构只在目标状态下的节点荷载向量 \mathbf{P}_0 作用时, 求解 $\mathbf{K}\delta = \mathbf{P}_0$, 得到控制点位移向量为 δ_0^1 , 目

标位移为 δ^1 , 拉索的温度荷载为 \mathbf{B}^u , 则由于拉索施加温度荷载引起的控制点位移为 $\delta^1 - \delta_0^1$, 列影响矩阵方程如下:

$$\mathbf{G}\mathbf{B}^u = \delta^1 - \delta_0^1 \quad (12)$$

求解此线性方程组可得到拉索的温度荷载 \mathbf{B}^u 。

影响矩阵法中初始缺陷长度对控制点位移的影响因子是线性叠加的, 即结构反应呈线性, 这显然与半刚性结构的几何非线性相悖。因而影响矩阵法最大的缺点就是不能考虑结构的非线性影响, 导致它的应用范围只能是刚度很大的结构。但是我们可以将这种非线性影响降低到最小, 于是该文在影响矩阵法的基础上进行了新的改进, 提出“影响矩阵修正法”, 对影响矩阵法得出的拉索初始缺陷长度进行调整和修正, 减少由于结构的非线性反应带来的误差, 以达到工程精度的要求。

2.2 影响矩阵修正法

由上节可知, 影响矩阵法只考虑了温度荷载作用下单位温度荷载对控制点位移的影响程度; 而对于某些刚度较弱的半刚性结构, 例如该文工程算例的张弦梁结构, 外荷载(节点荷载)作用下结构的变形较大, 也即外荷载对结构的几何形状影响很大, 运用影响矩阵法将会产生较大误差。在影响矩阵法的基础上进行了改进, 提出“影响矩阵修正法”, 对影响矩阵法的影响因子进行了修正, 考虑了节点荷载和温度荷载共同作用时单位温度荷载对控制点位移的影响。其步骤如下:

1) 在节点荷载向量作用 \mathbf{P}_0 下, 分别对第 i 根拉索施加单位温度荷载(降温), 其余拉索不施加温度荷载, 通过结构有限元分析求解

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \mathbf{N}^T \mathbf{K}_e \mathbf{B} \quad (13)$$

可得到第 j 个控制点的位移 δ_{ji} , 形成第 i 根拉索对各控制点位移的影响向量 $\{\delta_i\}$, 即:

$$\{\delta_i\} = \{\delta_{1i} \quad \delta_{2i} \quad \cdots \quad \delta_{ni}\}^T \quad (14)$$

2) 结构只在目标状态下的节点荷载向量 \mathbf{P}_0 作用时, 求解 $\mathbf{K}\delta = \mathbf{P}_0$, 得到第 i 个控制点位移为 δ_0^i , 形成对各控制点位移的影响向量

$$\{\delta_0^i\} = \{\delta_{01}^i \quad \delta_{02}^i \quad \cdots \quad \delta_{0n}^i\}^T \quad (15)$$

3) 式(14)减去式(15)可得到: 节点荷载和单位温度荷载同时作用时单位温度荷载对控制点位移的影响程度。构造广义位移影响矩阵如下:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \delta_{11} - \delta_{01}^1 & \delta_{12} - \delta_{01}^1 & \cdots & \delta_{1n} - \delta_{01}^1 \\ \delta_{21} - \delta_{02}^2 & \delta_{22} - \delta_{02}^2 & \cdots & \delta_{2n} - \delta_{02}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} - \delta_{0n}^n & \delta_{n2} - \delta_{0n}^n & \cdots & \delta_{nn} - \delta_{0n}^n \end{bmatrix} \quad (16)$$

4) 目标位移为 δ^1 , 拉索的温度荷载为 \mathbf{B}^u , 则由

于拉索施加温度荷载引起的控制点位移为 $\delta^i - \delta_0$ ，列影响矩阵方程如下：

$$\mathbf{GB}^u = \delta^i - \delta_0 \quad (17)$$

求解此线性方程组可得到拉索的温度荷载 \mathbf{B}^u 。

影响矩阵修正法可以最大限度地减少由于结构的非线性反应带来的误差,后面的工程算例分析证明它是可以满足工程精度要求的。但是需要强调的是:由于对影响矩阵法得出的拉索初始缺陷长度的修正过程中还是采用结构开始计算的线性影响矩阵,所以改进的影响矩阵法并不能改变它未充分考虑结构非线性的本质,但是其广义影响矩阵 \mathbf{G} 中已经包含了大部分结构非线性影响因素,因而该法最后修正结果会比影响矩阵法更精确。

比较上述2种方法可知,影响矩阵法的缺点是只能解决线性问题,对于刚度较大的半刚性结构,工程精度要求不高时,并且拉索数目不多时运用很方便;本文提出的影响矩阵修正法,对影响矩阵法求解初始缺陷长度时的影响矩阵进行修正和调整,以减少由于结构的非线性带来的误差。

3 工程算例

3.1 工程概述

南京会议展览中心展览大厅屋盖为张弦梁结构,其跨度为74 m,长度为189 m。屋盖总共有18榀张弦梁,整个结构由四部分组成:钢桁架、上弦梁、撑杆和预应力拉索,屋盖三维图见图2,12轴单榀张弦梁如图3,其上弦梁截面为H1 200×400×20×30,撑杆截面为P245×8,长度为4 200,下弦索型号为PES7-301(单位均为mm)。

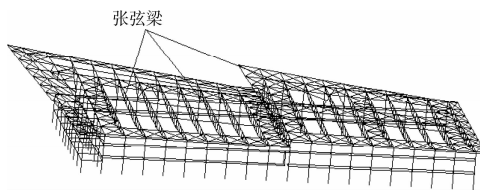


图2 屋盖三维图

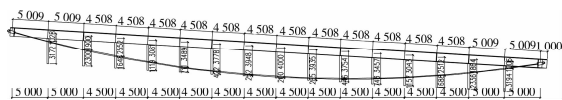


图3 单榀张弦梁示意图

3.2 ANSYS 有限元分析

钢桁架部分的构件及上弦梁采用 beam188 mm 单元模拟,撑杆采用 beam44 单元模拟,预应力拉索采用 link10 单元模拟。采用降温法对拉索施加预应力,考虑结构大变形及应力刚化。控制点位于上弦梁的中点,位置如图4所示(实心圆表示)。找形分

析的目标:初始态上弦梁中点竖向偏移设计初始态位置不超过±5 mm。用 APDL 编制两种方法的程序。

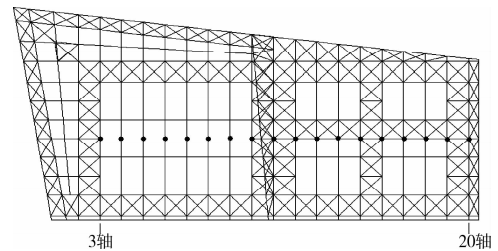


图4 控制点布置图

影响矩阵法和影响矩阵修正法求得各榀张弦梁拉索温度荷载及控制点竖向位移如表1所示。由表1易知,用影响矩阵法求得的控制点位移普遍很大,已经远远超出工程精度要求;而用影响矩阵修正法求得的控制点位移能够很好地满足工程精度要求。影响矩阵修正法通过考虑节点荷载和温度荷载同时作用时单位温度荷载对控制点的影响程度,减少了影响矩阵法中结构线性反应假定带来的误差。通过该文算例,还可以说明该工程张弦梁屋盖的刚度较弱,对该结构进行找形分析是必要的。

表1 影响矩正法和影响矩阵修正法的找形结果

轴号	影响矩阵法		影响矩阵修正法	
	拉索温度荷载	控制点位移/mm	拉索温度荷载	控制点位移/mm
3轴	-78	-10.6	-86.9	-0.2
4轴	-65.2	-34.3	-89.2	-0.3
5轴	-51.8	-56.1	-86.9	-0.5
6轴	-50.8	-68.2	-88.4	-0.9
7轴	-50.5	-71.3	-88.1	-1.2
8轴	-51.7	-67.2	-88.7	-1.3
9轴	-53.7	-54.9	-90.1	-1.4
10轴	-67.6	-36	-105.7	-1.3
11轴	-220.8	-21.8	-228.9	-0.9
12轴	-48.5	-45.9	-85.6	-0.3
13轴	-57.8	-78.1	-100.7	0.1
14轴	-32.9	-107.1	-89.5	0.4
15轴	-44	-125.1	-99.1	0.6
16轴	-43.6	-134.5	-101	0.6
17轴	-27.5	-138.5	-89.9	0.6
18轴	-51.8	-136.2	-104	0.7
19轴	0.45	-123	-78.3	1.1
20轴	-116.9	-96.6	-142.9	1.8

4 结语

利用刚度法理论讨论了半刚性结构找形分析的实用方法。通过阐述半刚性结构找形的基本概念,可知初始态预应力水平分布的确定是半刚性结构找形分析的关键。将拉索产生预应力的本质归纳为拉索的初始缺陷长度,预应力水平的确定可转化为求解拉索初始缺陷长度。

分别利用影响矩阵法以及影响矩阵修正法确定拉索的初始缺陷长度。影响矩阵法应用于刚度较大的半刚性结构可以取得较为满意的结果;而对于刚度较小的半刚性结构,由于影响矩阵法中结构线性反应的假定,无法精确求得初始状态的预应力分布和相应的零状态时的几何形状。工程算例表明影响矩阵修正法算法简单,流程清晰,减少了结构线性反应假定带来的误差,应用于刚度较小的半刚性结构的找形分析也可以取得较为理想的结果。

参考文献:

- [1] AYYUB B M, IBRAHIM A, SCHELLING D. Posttensioned truss: analysis and design [J]. *Journal of Structural Engineering*, 1990, 116(6): 1491-1506.
- [2] HANAOR A, LEVY R. Imposed lack of fit as a means of enhancing space truss design [J]. *Space Structure*, 1985, 1: 147-159.
- [3] HANAOR A. Prestressed pin-jointed structures—flexibility analysis and prestress design [J]. *Computers and Structures*, 1988, 28(6): 757-769.
- [4] 邓华,董石麟. 拉索预应力空间网格结构全过程设计的分析方法[J]. *建筑结构学报*, 1998, 20(4): 42-47.
DENG HUA, DONG SHI-LIN. Analytical method of pretensioned reticulated structure [J]. *Journal of Building Structures*, 1998, 20(4): 42-47.
- [5] 杨睿,董石麟,倪英戈. 预应力张弦梁结构的形态分析—改进的迭代法[J]. *空间结构*, 2002, 8(4): 29-35.
YANG RUI, DONG SHI-LIN, NI YING-GE. Form-finding analysis of prestressed beam string structures—modified inverse-iteration method. *Spatial structures*, 2002, 8(4): 29-35.
- [6] 吕方宏,沈祖炎. 修正的循环迭代法与控制索原长法结构进行杂交空间施工控制[J]. *建筑结构学报*, 2005, 26(3): 92-97.
LU FANG-HONG, SHEN ZU-YAN. Control of erection of hybridized space structure using the modified cyclic iteration and initial length control methods [J]. *Journal of Building Structures*, 2005, 26(3): 92-97.
- [7] 章传胜. 半刚性结构的找形分析[D]. 南京:东南大学, 2007.
- [8] CHEN YA-CHUN, ZHOU ZHEN. Prestressing Analysis and inspection for hybridized structure composed of prestressed reticulated shell and steel arch [C]// *Proceedings of the International Symposium on Innovation and Sustainability of Structures*. 2005(3): 2021~2031, Nanjing, China
- [9] 周臻,孟少平,陈亚春,等. 预应力网壳-拉杆拱组合结构的全过程分析方法[J]. *建筑结构学报*, 2006, 27(3): 93-98.
ZHOU ZHEN, MENG SHAO-PING, CHEN YA-CHUN, et al. Analysis methods for the whole prestressing process of hybridized structure composed of prestressed reticulated shells and tied-arches [J]. *Journal of Building Structures*, 2006, 27(3): 93-98.
- [10] DONG SHI-LIN, YUAN XING-FEI. Pretension process analysis of prestressed space grid structures [J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2007, 63(3): 406-411.
- [11] WU HUA-CHENG, XIANG YI-QIANG, WANG JING-FEN. Condition assessment of long span cable-stayed bridge [J]. *Journal of Zhejiang University: SCIENCE A*, 2006, 7(S2): 297-308.
- [12] 梁鹏,肖汝成,张雪松. 斜拉桥索力优化实用方法[J]. *同济大学学报*, 2003, 31(11): 1270-1274.
LIANG PENG, XIAO RU-CHENG, ZHANG XUE-SONG. Practical method of optimization of cable tensions for cable-stayed bridges [J]. *Journal of Tongji University*, 2003, 31(11): 1270-1274.
- [13] 赵宁,方宗德,孙雪梅. 计算斜齿轮弯曲应力的应力影响矩阵法[J]. *航空动力学报*. 1995, 10(3): 267-269
ZHAO NING, FANG ZONG-DE, SUN XUE-MEI. A stress influence matrix method for calculating bending root stresses of helical gears [J]. *Journal of Aerospace Power*, 1995, 10(3): 267-269.
- [14] LEVY R, SPILLERS W R. Practical methods of shape-finding for membranes and cable nets [J]. *Journal of Structural Engineering*, 1998, 124(4): 466-468.
- [15] TAMAI H. Development of form finding of tensile structures [D]. *Illinois Institute of Technology*, 2005.
- [16] ESTRADA G G, BUNGARTZ H J, MOHRDIECK C. Numerical form-finding of tensegrity structures [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(22/23): 6855-6868.

(编辑 胡玲)