

# 双排刚性桩屏障对平面 SH 波的隔离性状研究

夏唐代, 孙苗苗, 陈 晨, 陈炜昀

(浙江大学 岩土工程研究所, 杭州 310058)

**摘 要:**基于 Twersky 的理论, 引入圆柱体对声波和电磁波的多重散射解析解, 对用排桩隔离环境振动的问题, 提出了一种新的求解任意排列、任意直径刚性桩对平面 SH 波多重散射的理论方法, 解决了传统的假设单重散射的计算方法中不考虑桩列作为整体屏障从而忽略桩间相互干涉关系的不足。随后, 在数值计算分析中讨论了散射重数, 排间距, 桩间距等因素对双排刚性桩隔振效果的影响, 对实际工程中利用排桩进行振动污染治理和屏障隔振的设计提出了有意义的结论。

**关键词:**非连续屏障; 多重散射; 无量纲位移; 隔振效果

**中图分类号:** TU435      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1674-4764(2011)02-0007-05

## Isolation Properties of Plane SH Wave by Double-row Rigid Pile Barriers

XIA Tang-dai, SUN Miao-miao, CHEN Chen, CHEN Wei-yun

(Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, 310058, P. R. China)

**Abstract:** Based on Twersky's theory, with the multiple scattering of plane acoustic or electromagnetic waves by an arbitrary configuration of parallel cylinders, a new method differing from the conventional ones is developed to figure out the plane SH waves scattered by rigid piles to solve the problem of the environmental vibration isolated by pile rows. This new method eliminates the disadvantages of the single scattering hypothesis which does not consider the coherent phase relations between the waves. Also, the influence factors on screening effectiveness including the orders of scattering, the space between pile-rows and separations between the adjacent piles are investigated.

**Key words:** discontinuous barrier; multiple scattering; normalized displacement; screening effectiveness

车辆荷载、建筑施工等引起的振动因其干扰人们的日常生活而对周围环境产生了不容忽视的影响, 并已成为学者关注的热点问题。采用屏障是隔离环境振动的有效措施。目前采用较多的有 2 种屏障形式, 一种是连续屏障, 主要有空沟、填充沟, 混凝土墙等形式, 对于连续屏障的研究已较为成熟。最早由 Barkan<sup>[1]</sup> 和 Richart<sup>[2]</sup> 对空沟和钢板桩屏障进行了试验研究; 其后 Woods<sup>[3]</sup> 进行了一系列的现场原位测试, 并首次提出用无量纲振幅比  $A_{RC}$  来评价屏障的隔振效果; 但是在地下水位较高或者软土地区, 连续屏障的施工难度加大因而增加了施工和维

护的费用, 非连续屏障便成为近年来在软土地区运用广泛的隔振手段之一。

非连续屏障对弹性波的散射研究起步较晚, 目前较多采用排桩和排孔等形式。Woods<sup>[4]</sup> 运用全息照相技术原理, 对瑞利波波场中圆孔屏障隔振进行了研究; Liao 和 Sangrey<sup>[5]</sup> 用模型桩屏障做试验得出柔性桩比刚性桩的隔振效果更好的结果; Boroomand 和 Kaynia<sup>[6]</sup> 用简化的地基模型来检验单排桩的隔振效果; Avilés 和 Sánchez-Sesma<sup>[7-8]</sup> 研究了单排实心桩对 P 波、S 波及 R 波的散射问题; Kattis<sup>[9-10]</sup> 等运用三维频域边界元技术分析了实心

收稿日期: 2010-07-20

基金项目: 浙江省重点创新团队支持计划(2009R50050)

作者简介: 夏唐代(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事土动力学与软粘土力学教学与研究, (E-mail) xtd@zju.edu.cn.

桩和方桩的隔振作用;徐平等<sup>[11-12]</sup>研究了刚性空心管桩屏障对平面 P、SH 和 SV 波的隔离效果;Cai<sup>[13-14]</sup>等分析了饱和多孔弹性介质中单排桩的屏蔽作用;Lu<sup>[15-16]</sup>等对用排桩隔离移动荷载产生的振动进行了详细的研究。

迄今为止,上述文中所述的计算非连续屏障对平面波的隔离问题都只考虑了单重散射,单重散射假设的不足在于它忽略了散射体也就是桩列作为一个整体相互之间相干相位关系,仅仅在桩间距较大的时候才是正确的;而在实际工程中,通常采用的排桩间距较小,排桩体系作为整体屏障起到作用。并且,多个任意排列,任意半径大小的桩屏障对平面波多重散射问题的精确解尚未见报道。该文引入圆柱体对声波和电磁波的多重散射解<sup>[16-17]</sup>,提出了一种新的考虑多重散射的方法来求解平面 SH 波入射下任意排列任意直径的刚性桩的散射问题。

## 1 波函数展开

### 1.1 问题的基本公式

如图 1 所示,各向同性的无限均质弹性介质的土体中含有任意排列的任意半径圆柱形刚性桩,假设桩长远大于桩径,则该问题可以简化为二维平面问题。入射平面 SH 波(偏振方向平行于桩身轴线)应满足 Helmholtz 方程:

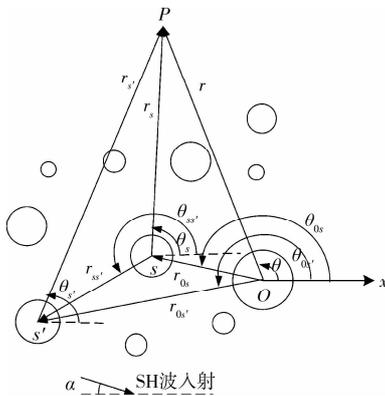


图 1 任意布置、任意半径圆柱形桩对 SH 波的散射计算简图

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_s^2 u = 0 \quad (1)$$

式中  $k_s = \omega/c$ , 称为土体中 SH 波的波数,  $\omega$  为圆频率,  $c = \sqrt{G/\rho}$ , 其中  $G$  和  $\rho$  分别为土体的剪切模量和密度。

在第  $s$  根桩的坐标系下, 满足上述方程的入射 SH 波可以表示为

$$u^{\text{inc}} = e^{i k_s \cdot r} \quad (2)$$

式中上角标 inc 表示入射, 这里为了研究和讨论方便, 运动量中的时间因子  $\exp(-i\omega t)$  ( $i = \sqrt{-1}$  为虚

数单位,  $t$  为时间) 均被省略。

基于变量分离法, 设第  $s$  根桩对 SH 波第  $m$  重散射解可表示为

$${}^s u_m^{\text{sc}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}^s A_m H_n(k_s r_s) e^{in\theta_s} \quad (3)$$

式中上角标 sc 表示散射,  $H_n(\cdot)$  为第一类 Hankel 函数,  $n$  为阶数。  ${}^s A_m$  为每根桩第  $m$  重散射的待定复系数 ( ${}^s A_m$  系数随散射重数  $m$  而不同)。

因此可得总共  $s$  根桩的总散射波解为

$$u^{\text{sc}} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} {}^s u_m^{\text{sc}} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(k_s r_s) e^{in\theta_s} \sum_{m=1}^{\infty} {}^s A_m \quad (4)$$

进而总波场为

$$u = u^{\text{inc}} + u^{\text{sc}} \quad (5)$$

### 1.2 散射系数的求解

对于任意排列的刚性圆柱桩, 计算简图如图 1 所示。以第  $s$  桩为例, 假定桩半径为  $a_s$ , 选定  $s=0$  时的桩中心为参考坐标系原点, 每根桩各自坐标轴都平行于参考坐标轴。远场  $P$  点可以用与  $s$  桩的距离  $r_s$  和角度  $\theta_s$  确定,  $s'$  桩相对于参考坐标系的坐标可用  $(r_{s'}, \theta_{s'})$  确定。例如  $P$  点对于  $s'$  桩坐标系的坐标为  $(r_{s'}, \theta_{s'})$ ,  $s'$  桩相对于  $0$  桩的坐标为  $(r_{0s'}, \theta_{0s'})$  等。为了求出散射系数  ${}^s A_m$ , 首先考虑  $m=1$  的第一重散射的散射系数  ${}^s A_1$ , 因刚性桩埋置得足够深, 假设土体与刚性桩界面完全联结, 即桩与周围土体界面处满足位移连续条件, 则第一重散射的边界条件为:

$$(u^{\text{inc}} + {}^s u_1^{\text{sc}}) \Big|_{r_s=a_s} = 0 \quad (6)$$

由上式可求得单重散射系数

$${}^s A_1 = {}^s A \exp\left[\ln\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_{0s}\right] \quad (7)$$

其中  ${}^s A = -J_n(k_s a_s) / H_n(k_s a_s)$ ,  $\mathbf{r}_{0s}$  为  $s=0$  时远场  $P$  点到  $0$  桩的距离矢量。

其次考虑第  $s$  根桩被其余桩的第一重散射波所激发, 产生第二重散射波, 同样可以假设第二重散射在桩土界面处也满足边界条件

$$\sum_{\substack{s'=0 \\ s' \neq s}}^{\infty} {}^{s'} u_1^{\text{sc}} + {}^s u_2^{\text{sc}} \Big|_{r_s=a_s} = 0 \quad (8)$$

即可求出第二重散射系数  ${}^s A_2$ :

为了便于相加, 需要把  ${}^{s'} u_1^{\text{sc}}$  化为  $s$  点坐标下的函数, 根据 Graf 加法原理,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} {}^{s'} A_1 H_{n-n'}(k_s r_{s'}) \times J_n(k_s r_s) e^{in\theta_s - i(n-n')\theta_{s'}} = 0 \quad (9)$$

令  $n = n' + m$ , 第二重散射系数

$${}^s A_2 = {}^s A \sum_{\substack{s'=0 \\ s' \neq s}}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} {}^{s'} A_1 H_{n-n'}(k_s r_{s'}) e^{-i(n-n')\theta_{s'}} \quad (10)$$

以此类推至  $n$  重散射,则散射系数为

$${}^s A_m = {}^s A \times \exp\left[\ln\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + ik_s \cdot r_{0s}\right] \times$$

$$\left\{ \prod_{\mu=1}^{(m-1)} \sum_{\substack{s^\mu=0 \\ s^\mu \neq s^{\mu-1}}} \sum_{n^\mu=-\infty}^{\infty} A_{n^\mu} H_{|n^\mu-1-n^\mu|}(k_s r_{s^{\mu-1} s^\mu}) \times \exp\left[-i(n^{\mu-1} - n^\mu)\bar{\omega}_{s^{\mu-1} s^\mu} + ik_s \cdot r_{s^{\mu-1} s^\mu}\right] \right\} \quad (11)$$

其中  $\varphi_{s^{\mu-1} s^\mu} = \theta_{s^{\mu-1} s^\mu} + \alpha + \frac{\pi}{2}$ 。

总散射波场的理论解为

$$u^{sc} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}^s A H_n(k_s r_s) e^{i\omega_0 s + ik_s \cdot r_{0s}} \times \prod_{\mu=1}^{m-1} \left\{ \sum_{s^\mu} \sum_{n^\mu} A_{n^\mu} H_{|n^\mu-1-n^\mu|}(k_s r_{s^{\mu-1} s^\mu}) \times \exp\left[-i(n^{\mu-1} - n^\mu)\bar{\omega}_{s^{\mu-1} s^\mu} + ik_s \cdot r_{s^{\mu-1} s^\mu}\right] \right\} \quad (12)$$

由公式 (5) 即可以求得总波场。

## 2 数值计算和分析

### 2.1 单排桩计算结果分析

假设桩为无限长,入射稳态平面 SH 波振幅为  $u_0$ ,入射角  $\alpha$ ,桩排布于同一直线上,桩半径  $a_s$  和桩间距  $s_p$  均相同,桩数  $N$ ,为了便于讨论,对位移场的频率进行归一化处理

$$\eta_s = \frac{k_s a_s}{\pi} = \frac{2a_s}{\lambda_s} \quad (13)$$

式中  $\lambda_s$  为土体中 SH 波长。

定义归一化位移幅值  $|u/u_0|$  为排桩后某处总波场引起的位移幅值与入射波在该处引起的自由场位移幅值的比值。各变量参数取值如下: $\alpha = \pi/2$ ,  $a_s = 1$ ,  $s_p/a_s = 3.$ ,  $N = 8$ ,  $\eta_s = 0.4$ 。此算例计算中 Bessel 函数阶数  $n$  截断到 8 阶已满足精度的要求。

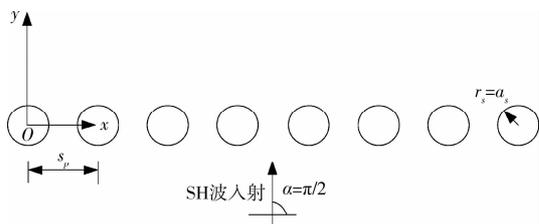


图 2 单排  $N$  根桩屏障计算模型及参考坐标系

图 3 分别为不同散射重数 ( $m=1\sim 4$ ) 屏障后中线上土体无量纲位移幅值  $|u/u_0|$  随  $y/a_s$  ( $-20 \leq y/a_s \leq 500$ ) 的变化曲线,首先从图 3 中可以得到,屏障前的区域因入射波与散射波的干涉产生振幅放大现象,而在屏障后,靠近屏障处的隔振效果优于远离屏障处。其次当散射重数取 3 和 4 时,屏障后无量纲位移的增量很小,当  $y/a_s \geq 150$  时  $|u/u_0|$  的值几乎没有变化,曲线重合,说明该理论计算方法同实际情况相符。

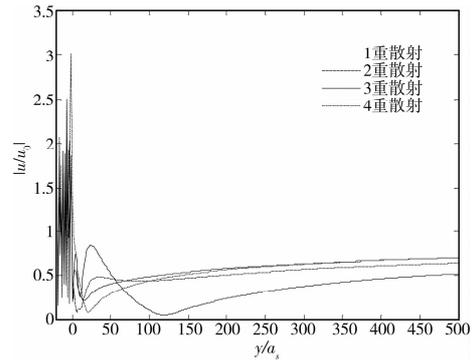


图 3 单排桩屏障后  $m$  重散射无量纲位移  $|u/u_0|$  随  $y/a_s$  的变化曲线

在实际工程中,近场主动隔振的区域在 2.5~3.0 倍波长内,从图 3 中可以看到屏障后  $10 \leq y/a_s \leq 60$  左右范围内相同位置处的位移幅值随着计算时所取的散射重数增加而减少,多重散射的理论计算结果与以往只考虑单重散射的相比更接近工程实际情况,有一定的工程应用价值。从图 3 还可以看出,当多重散射的重数取到 3 重时已经能够满足计算的精度要求,且此结果与文献[7]的结果较为吻合。

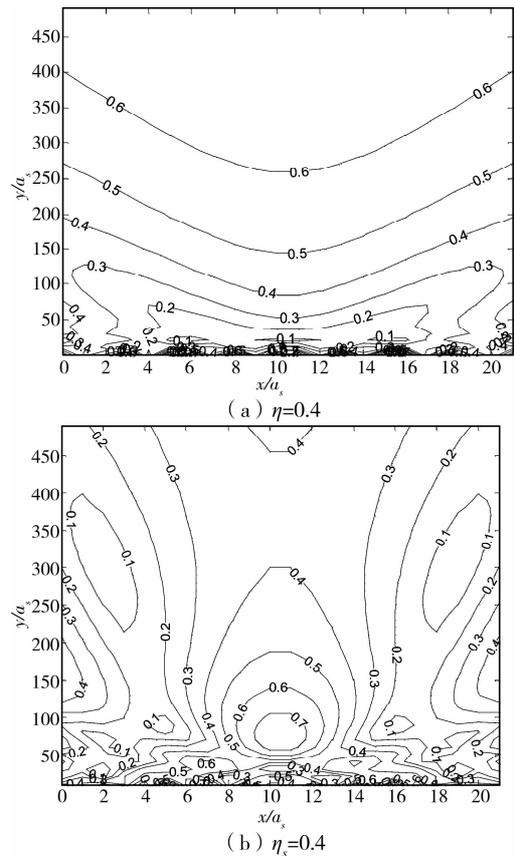


图 4 单排桩屏障后四重散射的无量纲位移  $|u/u_0|$  随位移场归一化频率  $\eta_s$  变化的等值线图 ( $s_p/a_s = 3.0$ )

图 4 为位移场不同归一化频率入射波下的单排桩屏障后无量纲位移等值线图,低频波 ( $\eta_s = 0.4$ ) 入射时屏障后无量纲位移分布较为平均,靠近屏障区

域隔振效果较好,在  $10 \leq y/a_s \leq 60$  范围内可以有效隔离 80% 左右的入射波,因此低频波用单排桩屏障已经能起到较好的屏蔽作用。然而,对于高频波( $\eta_s = 1.0$ )入射时屏障后中心范围内集中出现振幅放大效应,最佳隔离区域向两侧分散,屏蔽作用较为不均匀,单排桩已不能起到较好的屏蔽作用,故可以考虑多排桩屏障进行隔振。

## 2.2 双排桩计算结果分析

实际工程中对高频入射波较多采用双排桩进行振动污染的隔离,因此双排桩理论计算分析的结果对于工程应用具有重要意义。为了与单排桩屏障进行对比,同样选取屏障参数如下: $N=8, \alpha = \pi/2, a_s = 1, s_p/a_s = 3.0, N=8, \eta_s = 1$ 。排桩按两排梅花型

布置,计算模型及参考坐标系见图 5。

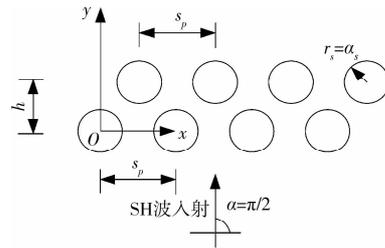


图 5 双排  $N$  根桩屏障计算模型及参考坐标系

双排桩与单排桩屏障的区别在于双排桩的隔振效果与屏障的厚度即排间距有较大关系。图 6 考查了排距对隔振效果的影响(排间距  $0 \leq h/a_s \leq 3.5$ )。

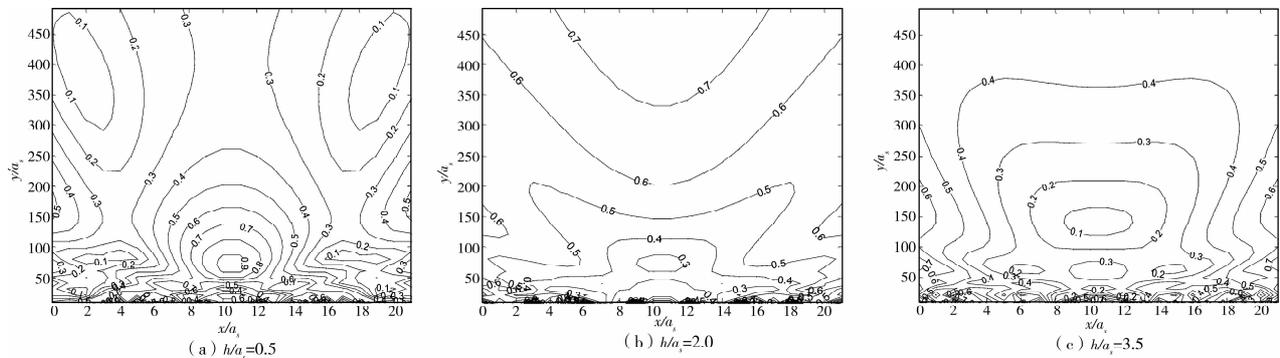


图 6 双排桩屏障后四重散射无量纲位移  $|u/u_0|$  随排间距变化等值线图( $s_p/a_s = 3.0$ )

从图 6 可以看出,屏障后等值线分布规律基本相同,越靠近屏障处屏蔽效果越好。当  $h/a_s = 0$  时,双排桩即退化为单排桩,退化解与单排桩屏障的数值计算结果一致,进一步说明本文理论计算方法的正确性。由之前的研究可得,单排桩隔振的屏蔽区域较小,且排桩前中心处有明显的振幅放大效应。随着双排桩排距的增加( $0.5 \leq h/a_s \leq 2.0$ ),屏障后  $20 \leq y/a_s \leq 100$  范围内无量纲位移减小,屏障后振幅放大效应趋于平均,说明双排桩逐渐作为一个整体对入射波进行隔离。当排间距  $h/a_s = 3.5$  时,屏障后  $20 \leq y/a_s \leq 200$  较大范围内都能隔离 70%~80% 的入射波,隔振效果明显优于单排桩。工程中选择排间距  $h/a_s = 3.5$  作为双排桩隔振屏障的设计依据。

为了讨论桩间距对双排桩隔振效果的影响,考查了不同桩间距下( $2.5 \leq s_p/a_s \leq 5.0$ )屏障后中线上无量纲位移随  $y/a_s$  的变化。图 7 表明桩间距较小时( $2.5 \leq s_p/a_s \leq 3.0$ ),屏障后位移减小不明显,屏障未能起到较好的屏蔽作用;当  $s_p/a_s = 3.0$  时,屏障后一定区域内( $20 \leq y/a_s \leq 200$ )无量纲位移减小,振幅放大效应明显,能有效隔离约 70% 的入射波,表明

此时双排桩作为整体取得较好的隔振效果;随着桩间距增加( $3.0 \leq s_p/a_s \leq 5.0$ ),屏障后无量纲位移明显增加,振幅放大效应减弱,双排桩不再作为整体屏障起到屏蔽作用,因此在实际工程中为了能形成整体屏障,双排桩间距一般应满足  $s_p/a_s \leq 3.0$ 。

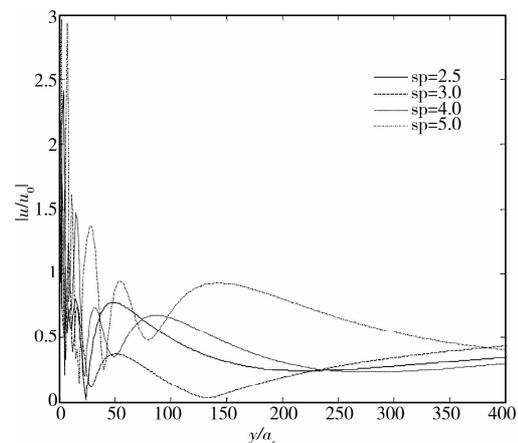


图 7 不同桩间距双排桩屏障后中线上四重散射无量纲位移  $|u/u_0|$  随  $y/a_s$  变化曲线( $h/a_s = 3.5$ )

## 3 结论

对排桩隔离环境振动的问题,提出了一种新的计

算任意排列任意直径的刚性桩对平面SH波的散射问题方法—多重散射法。通过对单排,以及双排桩后土体竖向位移振幅的研究,对环境振动的污染隔离提出了有意义的建议。数值分析计算的结果表明:

1) 排桩作为隔振体以整体屏障发挥作用,文中提出的考虑多重散射的计算方法优于以往只考虑单重散射而不考虑散射波之间相干相位关系假设的单重散射解。散射重数越多,计算结果与实际情况符合得越好,一般取到四重时已满足工程要求。

2) 当入射SH波频率较高时可以考虑多排桩进行隔离,多排桩数值计算结果可以退化至单排桩,表明本文理论计算方法的正确性。

3) 多排桩隔离效果与屏障厚度和及整体性有关,屏障厚度即排间距,排间距 $h/a_s=3.5$ 左右能取得较佳的隔离效果;同时隔振设计中桩间距应满足 $s_p/a_s \leq 3.0$ ,屏障才能作为整体发挥作用。

#### 参考文献:

- [1] BARKAN D D. Dynamics of bases and foundations [M]. New York:Mc Graw-Hill. 1962.
- [2] RICHART F E, HALL J R, WOODS R D. Vibrations of soils and foundations[M]. Prentice-Hall, Englewood cliffs, NJ. 1970.
- [3] WOODS R D. Screening of surface waves in soils[J]. Journal of Solids Mechanics and Foundation. Division, ASCE, 1968,94(4):951-979.
- [4] WOODS R D, N E BARNET, R SANGESSER. Holography, a new tool for soil dynamics[J]. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1974, 100: 1231-1247.
- [5] LIAO S, SANGREY D A. Use of piles as isolation barriers [J]. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1978,104 (9): 1139-1152.
- [6] BORROOMAND B, KAYNIA A M. Vibration isolation by an array of piles [C]//First International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering. Karlsruhe, Germany, 1992:683-691.
- [7] AVILÉS J, SÁNCHEZ-SESMA F J. Piles as barriers for elastic waves [J]. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE,1983,109(9):1133-1146.
- [8] AVILÉS J, SÁNCHEZ-SESMA F J. Foundation isolation from vibrations using piles as barriers[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114 (11): 1854-1870.
- [9] KATTIS S E, POLYZOS S, BESKOS D E. Vibration isolation by a row of piles using a 3-D frequency domain BEM[J]. International Journal of Numerical Methods Engineering, 1999,46:713-728.
- [10] KATTIS S E, POLYZOS S, BESKOS D E. Modelling of pile wave barriers by effective trenches and their screening effectiveness [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1999,18:1-10.
- [11] 徐平,夏唐代,吴明. 刚性空心管桩屏障对P波和SH波的隔离效果研究[J]. 工程力学, 2008, 25(5): 210-217.
- XU PING, XIA TANG-DAI, WU GANG. Study on the effect of barrier of a row of rigid hollow pipe piles for the isolation of P and SH waves [J]. Engineering Mechanics, 2008,25(5):210-217.
- [12] 徐平,夏唐代,周新民. 单排空心管桩屏障对平面SV波的隔离效果研究[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(1): 131-136.
- XU PING, XIA TANG-DAI, ZHOU XIN-MIN. Study on effect of barrier of a row of hollow pipe piles on isolation of incident plane SV waves [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(1):131-136.
- [13] CAI Y Q, DING G Y, XU C J. Screening of plane S waves by an array of rigid piles in poroelastic soil[J]. Journal of Zhejiang University, Science A, 2008, 9(5): 589-599.
- [14] CAI Y Q, DING G Y, XU C J, et al. Vertical amplitude reduction of Rayleigh waves by a row of piles in a poroelastic half-space [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, 33(16):1799-1821.
- [15] LU J F, XU B, WANG J H. Numerical analysis of isolation of the vibration due to moving loads using pile rows[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 319(3/4/5):940-962.
- [16] WANG J H, ZHOU X L, LU J F. Dynamic response of pile groups embedded in a poroelastic medium[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003, 23(3): 235-242.
- [17] TWERSKY V. Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1952, 24(1):42-46.
- [18] TWERSKY V. Multiple scattering of radiation by an arbitrary planar configuration of parallel cylinders and by two parallel cylinders [J]. Journal of Applied Physics, 1952, 23(4):407-414.