

# 非饱和土渗流-变形耦合的数值分析

吴礼舟, 黄润秋

(成都理工大学 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室, 成都 610059)

**摘要:**基于一维非饱和土的渗流-变形控制方程,采用 Flex PDE(Partial differential equation)软件对该耦合方程组进行求解分析。该方法突破了解析法对非饱和土导水系数函数的特殊限定,适用于任意的土-水特征曲线表达式;还可考虑到饱和时的渗透系数以及孔隙率是变量。与解析解相比,该数值解表现较高的精度,具有解决非饱和土耦合问题的可行性。计算分析表明,非饱和土渗流-变形耦合作用对暂态孔隙水压力分布产生重要的影响,在降雨入渗过程中需考虑土体渗流-变形耦合的影响。降雨初期,位移随着时间明显增大,地表出现下沉,考虑耦合效应的孔隙水压力慢于非耦合情况,原因是  $H$  值为正的。随着降雨持续时间的增大,地表下沉的速度减缓,到最后变形开始稳定。位移的变化快慢与孔隙水压力变化规律相同。地表沉降量还与初始孔隙水压力分布以及  $H$  值密切相关。饱和时的渗透系数以及孔隙率对非饱和土降雨入渗以及稳态流的分布产生影响,但对其地表变形产生的影响微弱。

**关键词:**非饱和土;渗流-变形耦合;降雨入渗;数值分析

**中图分类号:** 文献标志码:A 文章编号:1674-4764(2011)03-0063-05

## Numerical Analysis of Seepage and Deformation in Unsaturated Soils

WU Li-zhou, HUANG Run-qiu

(State Key Laboratory of Geological Hazard Prevention and Geological Environment Protection,  
Chengdu University of Technology, Chengdu 610069, P. R. China)

**Abstract:** Based on one-dimensional seepage and deformation governing equations, PDE software is used to analyze the coupled governing equations. The method is available to arbitrary functions of SWCC (soil-water characteristic curve), and it considers that both the coefficient of permeability at saturation and the porosity change with soil strain. Compared with analytical solution, the numerical solution shows high precision and it can effectively solve coupling problems. It is found that coupling effect of seepage and deformation in unsaturated soils plays an important role in the pore-water pressure profiles, and that the coupling effect should be considered during rainfall infiltration. At early stage of rainfall infiltration, settlement obviously increases with time, and the pore-water pressure considering the coupling moves more slowly than that without considering coupling due to positive  $H$ . The settlement is related with initial pore-water pressure profiles and  $H$  value. The coefficient of permeability at saturation and the porosity have an effect on rainfall infiltration and steady-state seepage, but their change has a weak influence on deformation in unsaturated soils.

**Key words:** unsaturated soil; coupled seepage and deformation; rainfall infiltration; numerical analysis

收稿日期:2010-12-22

基金项目:国家自然科学基金(40902087);教育部科学技术研究重点项目(110186);教育部博士点新教师基金(20095122120007)

作者简介:吴礼舟(1975-),男,副教授,博士后,主要从事非饱和土及其边坡灾害研究,(E-mail)wulizhoucn@yahoo.com.cn

非饱和土的渗流-变形耦合一直是岩土工程界的一个研究热点。土坡、路基填土以及垃圾与核废料填埋场大都处于非饱和状态。伴随着人类活动的深入,越来越多的非饱和土工程问题亟待解决。例如降雨等诱发的边坡失稳、坝基坍塌等地质灾害现象等。非饱和土是固-液-气三相复合介质,物理性质复杂。降雨入渗或水位涨落过程中,非饱和土中渗流与变形一直是相互作用、相互影响的<sup>[1-2]</sup>。需要研究入渗的瞬态渗流场、变形以及各种边界条件的影响。如何定量描述非饱和渗流过程中流动与骨架变形的相互作用,也是当今科研的难点<sup>[2]</sup>。因此,从渗流-变形耦合分析的角度上探讨非饱和土渗流以及变形问题具有较高的科研以及生产实践价值<sup>[2]</sup>。

饱和-非饱和土的多场耦合研究引起众多学者的兴趣<sup>[2-9]</sup>。白冰对饱和多孔介质热-水-力耦合响应的一维情形进行研究,给出温度、孔压和位移等的解析表达式<sup>[3]</sup>。吴礼舟等也给出非饱和土渗流-变形耦合的解析解<sup>[4]</sup>。张玉军从水-气-热三场耦合的角度上分析了孔隙介质中各组分的渗流与变形问题<sup>[5]</sup>。Thomas提出了可变形的非饱和土热、水和气转化的理论表达式<sup>[7]</sup>。廖红建等对水库堤坝进行了非稳定渗流场的数值模拟,并对土体固-液耦合研究进行了探讨<sup>[8]</sup>。卢再华、陈正汉等建立了一个非饱和膨胀土的弹塑性损伤本构模型及相应的固结模型,对该边坡进行了三相多场耦合问题的数值分析,较好地揭示了膨胀土边坡在气候变化条件下逐渐发生失稳滑动的机理<sup>[9]</sup>。

非饱和土渗流-变形的耦合的解析解多要求形式简单的土-水特征曲线表达式,局限于饱和土渗透系数为常数的条件。而实际上,饱和时渗透系数与应变有关,是变量。基于非饱和土渗流-变形的耦合模型,采用应用广泛的V-G模型,利用美国的商业软件FlexPDE软件研究一维非饱和土渗流-变形的数值解,试图分析耦合作用对非饱和土渗流与变形的影响。

## 1 变形渗流耦合模型

为了分析渗流和变形耦合问题,作出如下假设:1)土是均一的,各向同性的弹性材料;2)土结构是可变形的,水是不可压缩的;3)不考虑土-水特征曲线的滞后性;4)在土中孔隙气压力为一常值。

对非饱和土渗流-变形耦合控制方程进行修正,为<sup>[4]</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_w}{\gamma_w} + x \right) \right] = \frac{\theta}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial u_w}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial u} \frac{\partial u_w}{\partial t} - S_r \eta \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \epsilon_v - \frac{(1+\mu)(u_a - u_w)}{(1-\mu)H} \right] \right\} + [nS_r \rho + (1-n)\rho_s]g = 0 \quad (2)$$

式中: $u_w$ 是孔隙水压力; $\epsilon_v$ 为体积应变,对于一维问题, $\epsilon_v = \epsilon_x$ ;  $x$ 为高程; $k$ 为非饱和土的渗透系数; $\rho$ 为水密度; $g$ 为重力加速度; $\gamma_w = \rho g$ 为水的自重, $\epsilon_s$ 为固体密度; $S_r$ 为饱和度; $n$ 为孔隙率; $n_0$ 为初始的孔隙率。 $\eta = (1-n)^2 / (1-n_0)$ 。 $E$ 为杨氏模量; $t$ 为时间; $(u_a - u_w)$ 为土吸力; $u_a$ 为孔隙气压力; $\mu$ 为泊松比; $E$ 为净正应力变化相关的土的弹性模量; $H$ 为吸力变化相关的土的弹性模量。

假设不考虑水的压缩性和重力项,式(1)、(2)则写成

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u_w}{\partial x} \right] = n \frac{\partial S_r}{\partial u} \frac{\partial u_w}{\partial t} - S_r \eta \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \epsilon_v - \frac{(1+\mu)(u_a - u_w)}{(1-\mu)H} \right] \right\} = 0 \quad (4)$$

式(4)中,应变是 $u_w$ 的函数,而 $u_w$ 是随时间而变,因而应变也是时间的函数。

土-水特征曲线对于研究非饱和土水力学性质是非常重要的。Van Genuchten模型是一种常见的模型。该模型不仅拟合效果较好,并能和土的性质联系起来,从土本身特性上找到其含义,而得到广泛应用。Van Genuchten模型的表达式为<sup>[10]</sup>:

$$\theta = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (au_w)^n]^m} \quad (5)$$

式中: $\theta$ 为土的体积含水量; $\theta_r$ 和 $\theta_s$ 分别为土的残余和饱和体积含水量; $a$ 和 $n$ 均为经验拟合参数, $m = 1 - \frac{1}{n}$ 。

饱和度的函数为:

$$S_r(u_w) = \frac{\theta}{\theta_s} = \frac{\theta_r}{\theta_s} + \frac{1 - \frac{\theta_r}{\theta_s}}{[1 + (au_w)^n]^m} \quad (6)$$

相对应的非饱和土导水率为

$$k = k_s S_e^{\frac{1}{2}} [1 - (1 - S_e^{\frac{1}{2}})^m]^2 \quad (7)$$

式中: $k$ 为非饱和水力传导系数; $S_e = \frac{1}{[1 + (au_w)^n]^m}$ ,为有效饱和度。 $k_s$ 为饱和水力传导系数,严格的说, $k_s$ 不是一个定值<sup>[11]</sup>:

$$k_s = k_{s0} \frac{(1 + \frac{\epsilon_v}{n_0})^3}{1 + \epsilon_v} \quad (8)$$

其中, $k_{s0}$ 是个恒定的值。

孔隙率也是应变的函数

$$n = \frac{n_0 + \varepsilon_v}{1 + \varepsilon_v} \quad (9)$$

假定土层均一,对于一维问题,沿着  $x$  轴,长度为  $l$ 。非饱和土渗流-变形耦合问题通常涉及初始条件和边界条件。初始的孔隙水压力和应变表达为

$$u_w(x, 0) = u_i(x) \quad (10)$$

$$\varepsilon(x, 0) = \varepsilon_i(x) \quad (11)$$

式中:  $u_i$  为初始的孔隙水压力,与  $x$  位置有关。 $\varepsilon_i(x)$  为初始应变。

边界条件由底部和地表边界条件组成,底部边界的表达式为

$$u_w(0, t) = u_0 \quad (12)$$

$$\varepsilon(0, t) = \varepsilon_0(0, t) \quad (13)$$

底部边界通常位于固定的地下水水位,即  $u_0 = 0$ ;  $\varepsilon_0 = 0$ 。上边界通常分为流量和压力边界。地表边界的应变为自由边界。这里仅考虑了流量边界,其表达式为

$$\left[ \frac{k(u_w)}{\gamma_w} \frac{\partial u_w}{\partial x} + k(u_w) \right]_{x=l} = q(x, t) \quad (14)$$

其中:  $q$  可为常量,也可为变量,须满足  $q < k_s$ 。当  $q > k_s$  时,式(14)变成孔隙水压力边界。

## 2 验算

为了验证 PDE 软件计算非饱和土渗流-渗流耦合模型的精度,采用了解析解与数值解进行比较。Van Genuchten 模型虽然应用广泛,而对于获取耦合控制方程的解析解却有局限,将其代入耦合方程难于获取解析解。这里利用指数函数以及 Kirchhoff 变换,假定进气值  $\phi_{ae} = 0$  kPa, Gardner 的非饱和土渗透系数可表示为<sup>[12]</sup>

$$k(u_w) = k_s e^{\alpha u_w} \quad (15)$$

式中  $k_s$  为饱和土的渗透系数(为了解析需要,假定为常数);  $\alpha$  为去饱和系数。

根据 Boltzman 模型<sup>[13]</sup>, 体积含水率与土吸力之间的关系,基于体积含水率与饱和度的关系  $S_r = \theta(u_w)/\theta_s$ , 则得到

$$S_r(u_w) = e^{\alpha u_w} \quad (16)$$

将式(15)、(16)代入式(1)、(2),采用 Fourier 积分变换,可获得耦合控制方程的解析解。

表 1 非饱和入渗分析的参数值

$q/k_s$	$k_s/(m \cdot s^{-1})$	$\alpha/kPa^{-1}$	$n$	$H/kPa$	$\theta_s$
0.9	$3 \times 10^{-5}$	0.01	0.4	$2 \times 10^4$	0.4

长度  $l$  为 10 m, 初始孔隙水压力分布用式(10)定义,可为任意分布,这里为线性分布。底部边界为

稳定的地下水水位,即  $u_0 = 0$ 。地面边界的降雨强度为  $q$ 。相应参数见表 1。图 1 是解析解与数值解的比较。数值解是采用 PDE 软件分析的,将式(15)、(16)代入耦合控制方程(1)、(2)而得到的数值解。在 4、12 h 时的数值解与解析解的差值均小于 1%。图 1 表明 Flex PDE 软件计算非饱和土渗流-变形问题有较好的准确性。用 PDE 软件分析非饱和土渗流-变形耦合控制方程,具有较强的适宜性。不仅适用于 Gardner 模型,还适用于其他模型。且能考虑到饱和时渗透系数是变量。

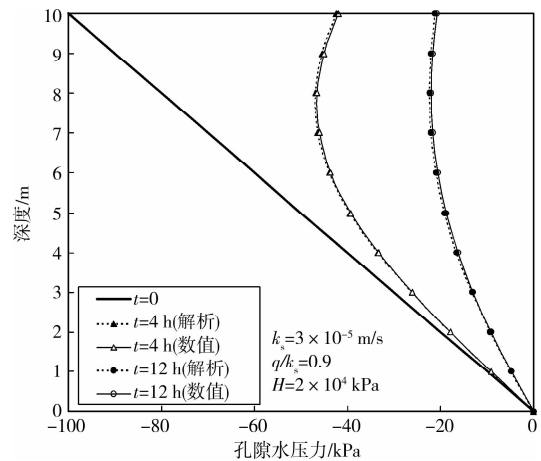


图 1 数值解与解析解的孔隙水压力比较

## 3 算例分析

解析方法适用范围有限,对于 Van Genuchten 模型无法获得解析解,因而,这里采用 PDE 软件分析基于 Van Genuchten 模型的耦合方程组。表 1 为计算的参数值。Van Genuchten 模型参数分别为:  $\alpha = 0.01$  kPa<sup>-1</sup>,  $\theta_s = 0.4$ ,  $\theta_r = 0.05$ 。初始位移为零,下边界为  $u_0 = 0$ 。上边界为降雨流量边界。其他参数与验算例子的参数相同。下面分别研究非饱和土的渗流-变形耦合的作用。

图 2 显示了非饱和土渗流-变形耦合作用下孔隙水压力的分布图。图 2 中参数分别为:  $H = 2 \times 10^4$  kPa,  $k_{s0} = 3 \times 10^{-5}$  m/s。在降雨初期,表层的孔隙水压力变化幅度较大,底部的孔隙水压力仍保持不变,因为入渗初期湿润锋从地表慢慢下移,未达到底部。当降雨持续到一定阶段后,孔隙水压力变化速度开始慢下来,  $t = 50$  min 时的孔隙水压力为 -8.87 kPa, 而  $t = 100$  min 时的孔隙水压力为 -7.35 kPa。  $t = 50$  min 与  $t = 100$  min 时地表的孔隙水压力差为 0.52 kPa; 然而  $t = 10$  min 与  $t = 50$  min 地表孔隙水压力相差 31.50 kPa。这个表明降雨入渗 50 min 后孔隙水压力分布基本接近了稳定状态。

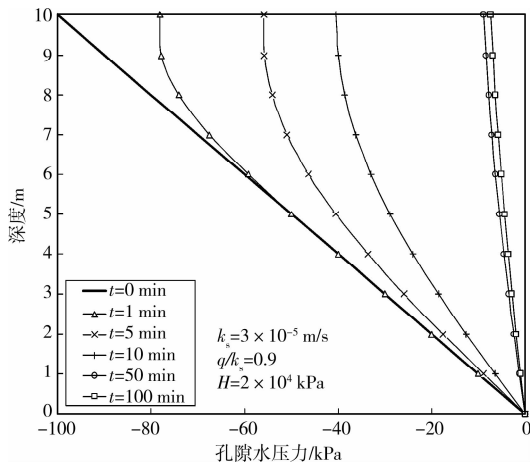


图 2 非饱和土渗流-变形耦合下孔隙水压力分布

图 3 为非饱和土渗流-变形耦合作用下位移分布图。图 3 显示了,降雨初期阶段,位移随着时间明显增大,地表出现下沉。这是由于  $H$  大于 0<sup>[4]</sup>。随着降雨持续时间的增大,地表下沉的速度减缓,到一定值后,变形开始稳定。位移的变化快慢与孔隙水压力变化情况相同。从图 2 可看出,降雨诱发的地表下沉最终估算量约为 0.004 3 m。地表沉降量还与初始孔隙水压力分布有关,还与非饱和土的  $H$  值密切相关。

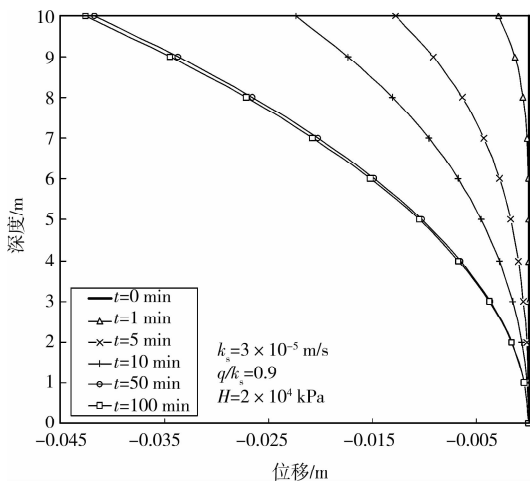


图 3 非饱和土渗流-变形耦合下位移分布

图 4 为非耦合与耦合 2 种情况下孔隙水压力随时间的变化图。参数不变,耦合情况是考虑饱和渗透系数与孔隙均变化的情况,即式(8)、(9)。图 4 显示耦合效应非常显著,在降雨持续 1 min 时不考虑渗流-变形耦合的情况下地表孔隙水压力为 -78.09 kPa,湿润锋已快速移动到  $x=10$  m 位置;而此时若考虑耦合作用,则地表的孔隙水压力为 -43.08 kPa,湿润锋移动至约  $x=5$  m 处。在  $t=1$  min 时非耦合与耦合之间的孔隙水压力差最大达到 35.4 kPa。当  $t=10$  min 时湿润锋均已到达土层底部,其耦合效应也非常突出,耦合与非耦合 2 种情况下的孔隙水压力差高达 31.1

kPa。在图 4 中,由于  $H$  值为正值,考虑耦合效应的孔隙水压力总是慢于非耦合情况。在降雨入渗过程中应考虑土体渗流-变形耦合的影响。

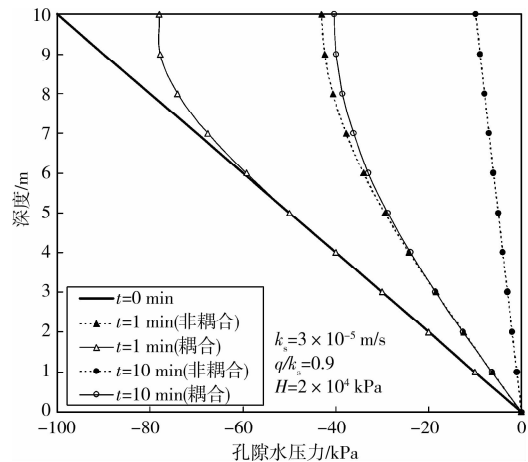


图 4 耦合与非耦合的孔隙水压力比较

表 2 非耦合与耦合作用下孔隙水压力分布的比较 (200 min)

$x/m$	孔隙水压力/kPa		
	不考虑耦合	耦合 ( $k_s, n$ 不变)	耦合 ( $k_s, n$ 变化)
1	-0.999	-0.268	-0.975
2	-1.999	-0.528	-1.900
3	-2.996	-0.852	-2.773
4	-3.990	-1.239	-3.593
5	-4.981	-1.661	-4.359
6	-5.968	-2.193	-5.070
7	-6.949	-2.828	-5.723
8	-7.924	-3.533	-6.321
9	-8.892	-4.366	-6.859
10	-9.853	-5.317	-7.340

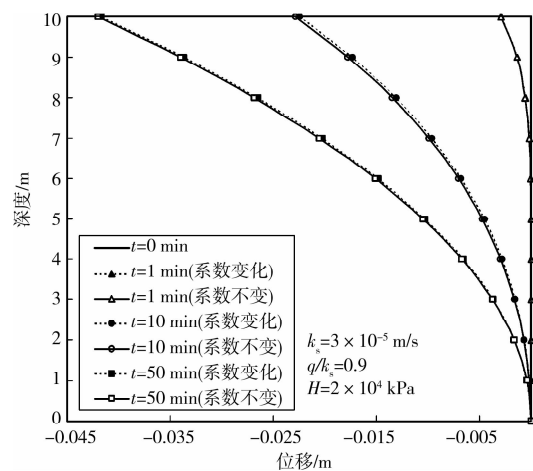


图 5 非饱和土渗流-变形耦合情况下位移变化图

表 2 显示了  $t=200$  min 时的孔隙水压力分布。此时不考虑耦合效应地表的孔隙水压力为 -9.853 kPa。若考虑耦合效应,当  $k_s, n$  均不变的情况下,孔隙水

压力-5.317 kPa,当 $k_s$ 、 $n$ 均是变量的情况下,地表的孔隙水压力-7.340 kPa。这些表明耦合效应对孔隙水压力分布产生显著作用,且饱和时的渗透系数以及孔隙率对非饱和土降雨入渗产生影响,其值的变化也影响到稳态流的分布。

图5展示了耦合情况下位移随着时间的变化图。在图5中,虚线表示 $k_s$ 、 $n$ 不变;而实线表示 $k_s$ 、 $n$ 为变量。在降雨初始阶段, $k_s$ 、 $n$ 是否变化对位移影响不大,尔后时段两种工况下位移的差异微弱增大。总体上 $k_s$ 、 $n$ 是否变化对非饱和土土体变形产生的影响微弱。

## 4 结 论

1)研究表明 Flex PDE 软件计算非饱和土渗流-变形耦合问题的可行性。在降雨入渗过程中非饱和土渗流-变形的耦合效应非常显著,需考虑土体渗流-变形耦合的影响。

2)降雨初期阶段,位移随着时间明显增大,地表出现下沉,这是由于 $H$ 大于0。随着降雨持续时间的增大,地表下沉的速度减缓,到一定值后,变形开始稳定。地表沉降量还与初始孔隙水压力分布有关,还与非饱和土的 $H$ 值密切相关。孔隙水压力变化快慢规律与位移的变化情况近似。

3)饱和状态时的渗透系数是变量,其变化对非饱和土降雨入渗产生影响,也影响到稳态流的分布;但对非饱和土土体变形产生的影响微弱。

致谢:本文在完成过程中得到了香港科技大学土木工程系张利民(Limin Zhang)教授的指导,在此向他表示衷心的感谢!

### 参考文献:

- [1] ZHANG L L, ZHANG L M, TANG W H. Rainfall-induced slope failure considering variability of soil properties[J]. *Geotechnique*, 2005, 55(2): 183-188.
- [2] 徐炎兵,韦昌富,李幻,等. 非饱和土渗流与变形耦合问题的有限元分析[J]. *岩土力学*, 2009, 30(5): 1490-1496.  
XU YAN-BING, WEI CHANG-FU, LI HUAN, et al. Finite element analysis of coupling seepage and deformation in unsaturated soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(5): 1490-1496.
- [3] 白冰. 循环温度荷载作用下饱和多孔介质热-水-力耦合响应[J]. *工程力学*, 2007, 24(5): 87-92.  
BAI BING. Thermo-hydro-mechanical responses of saturated porous media under cyclic thermal loading[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(5): 87-92.
- [4] 吴礼舟,张利民,黄润秋,等. 非饱和土中变形与渗流耦合的一维解析及其参数分析[J]. *岩土工程学报*, 2009, 31(9): 1450-1455.  
WU LI-ZHOU, ZHANG LI-MIN, HUANG RUN-QIU, et al. One-dimensional analytical analysis of coupled deformation and seepage in unsaturated soil and its parameter study[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, 31(9): 1450-1455.
- [5] 张玉军. 核废料处置概念库近场热-水-应力耦合模型及数值分析[J]. *岩土力学*, 2007, 28(1): 17-22.  
ZHANG YU-JUN. Coupled thermo-hydro-mechanical model and relevant numerical analysis for near field of conceptual nuclear waste repository[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2007, 28(1): 17-22.
- [6] KIM J M. A fully coupled finite element analysis of water-table fluctuation and land deformation in partially saturated soils due to surface loading[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 49: 1101-1119.
- [7] THOMAS H R, HE Y. Analysis of coupled heat, moisture and air transfer in a deformable unsaturated soil[J]. *Geotechnique*, 1995, 45: 677-689.
- [8] 廖红建,姬建,曾静. 考虑饱和-非饱和渗流作用的土质边坡稳定性分析[J]. *岩土力学*, 2008, 29(12): 3229-3234.  
LIAO HONG-JIAN, JI JIAN, ZENG JING. Stability analysis of soil slopes considering saturated and unsaturated seepage effect[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(12): 3229-3234.
- [9] 卢再华,陈正汉,方祥位,等. 非饱和膨胀土的结构损伤模型及其在土坡多场耦合分析中的应用[J]. *应用数学和力学*, 2006, 27(7): 781-788.  
LU ZAI-HUA, CHEN ZHENG-HAN, FANG XIANG-WEI, et al. Structural damage model of unsaturated expansive soil and its application in multi-field couple analysis on expansive soil slope[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(7): 781-788.
- [10] VAN GENUCHTEN M T. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, 44: 892-898.
- [11] 陈成意,宋修海. 各向异性弹性孔隙介质中的热-流-变形耦合模型[J]. *兰州理工大学学报*, 2009, 35(4): 70-73.  
CHEN CHENG-YI, SONG XIU-HAI. Coupled models of heat-flow-deformation for porous medium with anisotropical elasticity [J]. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2009, 35(4): 70-73.
- [12] GARDNER W R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table[J]. *Soil Science*, 1958, 85: 228-232.
- [13] MCKEE C, BUMB A. The importance of unsaturated flow parameters in designing a hazardous waste site [C]// *Hazardous Wastes and Environmental Emergencies (Hazardous Materials Control Research Institute National Conference)*. Houston, TX, March 1984:50-58.