

# FRP索与钢索的求解计算和极限跨度

齐玉军<sup>a</sup>, 冯鹏<sup>b</sup>, 叶列平<sup>a</sup>

(清华大学 a. 土木工程系 b. 土木工程安全与耐久教育部重点实验室, 北京 100084)

**摘要:**随着跨度的增大,自重对单索的影响就越明显,FRP(纤维增强复合材料)索的自重小,在大跨度结构中应用具有优势。单索的理论计算是索结构进行设计的基础。单索在自重作用下的求解,按照不同的假设,有弹性的悬链线解答、悬链线解答和抛物线解答。针对工程应用,以索端张拉轴力为已知量,推导了3种解答方法的求解方程,得到了关于张拉轴力的一元方程,方便了工程应用。另外,分别对斜拉索和水平索的悬链线解和抛物线解的精度进行了分析和比较,建议了2种近似求解方法的使用范围。根据求解结果,对FRP索和钢索的极限跨度进行了分析;结果表明FRP索有利于实现更大的跨度。FRP索的极限跨度可达钢索的4.4倍。

**关键词:**FRP索;斜拉索;抛物线解答;悬链线解答;有弹性的悬链线解答;极限跨度

**中图分类号:**TU312 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2011)04-0052-08

## Comparison of Theoretical Solutions and Ultimate Span-Length between FRP Cables and Steel Cables

QI Yu-jun, FENG Peng, YE Lie-ping

(a. Department of Civil Engineering, b. MOE Key Lab of Safety and Durability of Civil Engineering  
Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

**Abstract:** As the self weight of cable affects mechanical behavior obviously with the increase of span length. FRP (fiber reinforced polymer) cable that has the lighter weight than the conventional cables has advantage for long span structures. The analysis of single cable is the fundamental theory for the design of cable structures. Based on different considerations of gravity loads, the solutions of the single cable on gravity loads have three sets of solutions: parabola solution, catenary solution and elastic catenary solution. And the equations for the three sets of solutions are derived by taking the end tension force of cable as the control parameter. The comparison between FRP cables and steel cables is conducted by elastic catenary solution, and the results show that the larger span structure can be realized by FRP cables. The precision for the parabola solution and catenary solution is compared for stay cables and horizontal cables, and the proper ranges of both approximate methods are proposed. Based on the above methods, the ultimate span length of FRP cable and steel cable are analyzed. It is concluded that the ultimate span of FRP cable is 4.4 times larger than that of steel cable.

**Key words:** FRP cable; stay cable; parabola solution; catenary solution; elastic catenary solution; limit span

索作为一种柔性的受力构件,被广泛地使用于工程结构中,特别是斜拉桥、悬索桥和索网结构等大跨度结构中。目前工程中常用的索为高强度钢索,

近年来轻质高强的FRP(纤维增强复合材料)开始在土木工程中推广应用<sup>[1]</sup>,FRP索也开始在工程结构中应用。1987年就有学者提出设想采用FRP索建

收稿日期:2011-01-05

基金项目:国家自然科学基金项目(50608047);长江学者和创新团队发展计划项目(IRT00736)

作者简介:齐玉军(1983-),男,博士,主要从事复合材料研究,(E-mail)jyjz@mails.thu.edu.cn。

冯鹏(通讯作者),男,副教授,(E-mail)fengpeng@tsinghua.edu.cn。

造直布罗陀海峡大桥<sup>[2]</sup>,还有学者对采用FRP索的桥梁结构的静动力性能、安全性和经济性<sup>[3-6]</sup>进行了研究。FRP索还可以用于张拉结构中,如碳纤维索网结构<sup>[7-8]</sup>等。在FRP编织网结构<sup>[9-10]</sup>中,FRP以板条的形式应用,主要承受单向拉力,也可视为FRP索。常见的FRP索包括:CFRP(碳纤维复合材料)索、GFRP(玻璃纤维复合材料)索以及AFRP(芳纶复合材料)索等。索具有明显的几何非线性,FRP索的强度、刚度和比重与钢索均有较大的差别,这也使得分析求解出现了差异。

单索分析是索结构进行设计的基础。在计算中,对于索的自重有不同的处理方式,可分别得到有弹性的悬链线解、悬链线解和抛物线解<sup>[11-13]</sup>。其中第1种方法是精确解,后2种方法为近似解,后2种方法有各自的求解精度和适用范围。目前对于不同材质、跨度和索端高差的索的求解精度和适用范围的研究分析还较少。

探讨了单索的3种求解之间的本质联系,从理论分析和数值分析2方面分析了近似解法的求解精度;以典型的CFRP索为例与钢索进行了比较,分析了求解近似条件和理论极限跨度。

## 1 单索的基本力学方程

### 1.1 基本力学方程

如图1所示的无重力索,只承受沿水平跨度分布的竖向荷载 $q_z = q_z(x)$ ,设索曲线方程为 $z = z(x)$ ,两端点处的索力分别为 $T_A$ 和 $T_B$ ,索力的水平分量为 $H$ ,索力在两端点处的竖向分量分别为 $V_A$ 和 $V_B$ 。则索的基本平衡微分方程为<sup>[14]</sup>:

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} + q_z = 0 \quad (1)$$

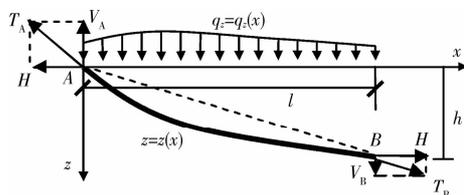


图1 单索受力分析简图

当考虑自重作用时,可将沿索曲线分布的重力荷载转换成沿跨度分布的竖向荷载 $q_z$ ,再将 $q_z$ 代入式(1)中,即可得到考虑自重作用下单索的基本力学方程,这时 $q_z$ 与索的几何形状有关。

设索材料的弹性模量为 $E$ ,无应力时的截面积为 $A_0$ 、自重荷载集度为 $q_0$ ;在自重荷载作用下,索的拉力为 $T$ ,自重荷载集度为 $q$ 。则可通过对索微元体

的分析,得到 $q_z$ 与 $q$ 的关系<sup>[3]</sup>和 $q$ 与 $q_0$ 的关系<sup>[11-13]</sup>:

$$q_z = q \times \sqrt{1 + \left(\frac{dz(x)}{dx}\right)^2} = q_0 \times \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz(x)}{dx}\right)^2}}{1 + \frac{T}{EA_0}} \quad (2)$$

将式(2)代入方程(1)中,得到

$$H = \frac{d^2 z(x)}{dx^2} + \frac{R_s}{R_e} q_0 = 0 \quad (3)$$

其中,

$$R_s = \sqrt{1 + \left(\frac{dz(x)}{dx}\right)^2} \quad (4)$$

$$R_e = 1 + \frac{T}{EA_0} = 1 + \epsilon_T \quad (5)$$

式(3)即为考虑自重作用的单索的基本力学方程。该方程考虑了索受荷载作用引起的自重荷载分布的不均匀,求得的曲线为索的真实线形,是单索考虑自重作用的精确解,其结果 $z(x)$ 为悬链线方程,称为弹性悬链线解<sup>[10,14]</sup>。可以看到,系数 $R_e$ 与索弹性变形有关, $R_s$ 与索的几何形状曲线方程有关。因此可将 $R_e$ 称为弹性变形影响系数, $R_s$ 称为形状影响系数。

### 1.2 弹性变形影响

索力引起索长变化,从而导致索重量集度的变化可由弹性变形影响系数 $R_e$ 反映。从式(5)中可以看出,其大小仅与索的轴向应变相关。表1中列出了几种常用索的性能参数。实际应用中,索的应变都小于其屈服应变或极限应变,通常钢索最大应变约为0.6~0.85倍屈服应变,FRP索约为0.4~0.7倍极限应变。因此对于这2类索 $R_e$ 一般不大于1.05,可认为弹性应变影响系数 $R_e$ 近似等于1.0。此近似相当于增大了索的自重,多数情况下对于工程应用偏于安全。

表1 常见索的性能参数

材料	密度/ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	拉伸强度/ MPa	弹性模量/ GPa	极限应变/ %
高强钢绞线	7 800	1 860	195	0.95
CFRP	1 600-1 900	1 600-2 600	147-165	0.97-1.77
GFRP	1 900-2 100	600-1 700	42-56	1.07-4.05
AFRP	1 700-1 900	1 200-2 100	49-125	0.96-4.29
尼龙	1 050-1 200	40-100	1.5-5	16-50
高强聚乙烯纤维	970	1 500-3 000	80-110	3.0-5.5

对于尼龙、高强聚乙烯纤维等材料,极限应变相对较大,当计算精度要求较高时需考虑 $R_e$ 的影响。但由于实际应变与受力有关,计算较为复杂,建议近似为定值,按下式确定:

$$R_e = 1 + \frac{f}{E} \quad (6)$$

式中  $f$  为索的强度设计值。

当  $R_e$  为定值时,方程(3)可得到简化,其解为标准的悬链线方程,称为悬链线解。

由于工程中常用索材在使用中的应变都不会太大,因此在多数情况下考虑弹性变形的悬链线解与悬链线解差别不大,采用近似为 1.0 或式(6)的方法分别为结果误差范围的上限和下限,可以获得较为合理的结果。

### 1.3 索形的影响

形状影响系数  $R_s$  与索几何形状相关。当索的垂度较小,即图 1 中索曲线与连接两端的直线接近,则索曲线上任意一点的斜率  $dz/dx$  可近似为常量,可得到

$$R_s = \sqrt{1 + (h/l)^2} \quad (7)$$

$R_s$  是与索的几何形状无关的常数,方程(3)能进一步简化,解得  $z(x)$  为抛物线方程,称为抛物线解。抛物线解可将索的自重荷载简化为沿跨度的均布荷载,既简化求解过程,又可将自重荷载当做普通的外荷载来处理,与其他外荷载进行叠加计算。但索垂度越大,抛物线解的误差就越大。对于垂度较大的索,不宜采用抛物线解进行求解。

工程应用中,索的垂度与索力、水平跨度、两端高差、结构外形等因素都有关系,应针对不同的应用情况进行分析。两端不等高的斜拉索和两端等高的吊索是最常见的 2 种形式,以下针对这 2 种条件下的索进行分析。

## 2 斜拉索的静力求解

斜拉索指索两端有一定高差的索。如图 1 中, A 端为索的锚固端, B 端为张拉端。在自重荷载作用下的斜拉索的力学解答已有较多研究<sup>[11-17]</sup>: 根据对自重荷载的不同假设,通过分析索微元体的受力平衡条件,建立了不同形式的基本力学方程,并推导了相应的求解公式。

斜拉索的物理状态是唯一确定的,但当采用不同的坐标系和求解参量,解答的表达式是不同的,对工程的适用性也不同。实际施工中,通常需要控制索端的张拉力,尤其是张拉端轴力  $T_B$ ,因此以  $T_B$  为已知参数来进行求解计算具有实际的工程参考价值。已研究中还未有以  $T_B$  为已知参数的解,该文在已有研究基础上给出。

### 2.1 弹性悬链线解

在如图 1 所示的坐标系中,式(3)以索上任意点

处的竖向张力  $V$  为参数的解为<sup>[4-5]</sup>:

$$\begin{cases} x = \frac{H(V_A - V)}{q_0 EA_0} + \frac{H}{q_0} \left[ \operatorname{arsh}\left(\frac{V_A}{H}\right) - \operatorname{arsh}\left(\frac{V}{H}\right) \right] \\ z = \frac{V_A^2 - V^2}{2q_0 EA_0} + \frac{H}{q_0} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H}\right)^2} \right) \end{cases} \quad (8)$$

其中  $H$  和  $V_A$  为待求量。引入已知量  $T_B$ , 将  $V_A^2 = T_A^2 - H^2$  和  $V_B^2 = T_B^2 - H^2$  代入方程(5)和方程(6)中,并且引入点 B 的边界条件  $x=l, z=h$ , 即可得到如下方程:

$$\begin{aligned} q_0 l = H \frac{(\sqrt{T_A^2 - H^2} \pm \sqrt{T_B^2 - H^2})}{EA_0} \\ + H \left[ \operatorname{arsh}\left(\frac{\sqrt{T_A^2 - H^2}}{H}\right) - \operatorname{arsh}\left(\frac{\pm \sqrt{T_B^2 - H^2}}{H}\right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$q_0 h = \frac{T_A^2 - T_B^2}{2EA_0} + (T_A - T_B) \quad (10)$$

由式(10)可解得

$$T_A = \sqrt{(T_B + EA_0)^2 + 2q_0 h EA_0} - EA_0 \quad (11)$$

将  $T_A$  代入式(8)中可以得到  $H$ , 进而可求得  $V_A$ , 将  $H$  和  $V_A$  代入参数式(8)中,即可得到以竖向张力  $V$  为参数的索曲线方程。

设索的最大垂度发生在点 F 处,则点 F 的切线与弦 AB 平行<sup>[19]</sup>,有

$$V_F = H \frac{h}{l} \quad (12)$$

将式(12)代入式(8)中,即可得到点 F 的坐标  $(x_F, z_F)$ 。于是可以通过下式求得最大垂度。

$$f_m = \frac{h}{l} x_F - z_F \quad (13)$$

### 2.2 悬链线解

悬链线解与有弹性的悬链线解的差别在于,前者没有考虑自重荷载引起的弹性变形对截面积的影响,反映在数学表达上,只需将参数式(8)中含  $EA_0$  的一项略去即可,即

$$\begin{cases} x = \frac{H}{q_0} \left[ \operatorname{arsh}\left(\frac{V_A}{H}\right) - \operatorname{arsh}\left(\frac{V}{H}\right) \right] \\ z = \frac{H}{q_0} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H}\right)^2} \right] \end{cases} \quad (14)$$

同理,可以引入梁端张拉控制轴力  $T_B$  和 B 点的边界条件,得

$$\begin{cases} q_0 l = H \left[ \operatorname{arsh}\left(\frac{\sqrt{T_A^2 - H^2}}{H}\right) - \operatorname{arsh}\left(\frac{\pm \sqrt{T_B^2 - H^2}}{H}\right) \right] \\ q_0 h = T_A - T_B \end{cases} \quad (15)$$

求解方程组(15),可以得到  $H$  和  $T_A$ , 从而得到

$V_A$ 。将  $H$  和  $V_A$  带入式(14)中即得以  $V$  为参数的索曲线方程。同理将式(12)代入式(14)中,得到最大垂度点  $F$  的坐标  $(x_F, z_F)$ ,再代入公式(13)中即可求得最大垂度  $f_m$ 。

2.3 抛物线解

进一步简化为抛物线解,基本方程为

$$H = \frac{d^2 z(x)}{dx^2} + \sqrt{1 + (h/l)^2} q_0 = 0 \quad (16)$$

引入边界条件  $x=0, y=0$  和  $x=l, y=h$  后,得到此方程的解为

$$z = \frac{-\sqrt{1 + (h/l)^2} q_0}{2H} x^2 + \left( \frac{h}{l} + \frac{\sqrt{l^2 + h^2} q_0}{2H} \right) x \quad (17)$$

在 B 点有

$$\frac{dz}{dx} \Big|_{x=l} = \frac{h}{l} - \frac{\sqrt{l^2 + h^2} q_0}{2H} = \frac{V_B}{H} \quad (18)$$

所以

$$T_B^2 = H^2 + \left( \frac{h}{l} H - \frac{\sqrt{l^2 + h^2} q_0}{2} \right)^2 \quad (19)$$

通过求解式(19)可以得到  $H$ ,代入式(17)中即得到抛物线形式的索曲线方程。

抛物线形式的索曲线,自重下的最大垂度发生在跨中<sup>[12]</sup>,为

$$f_m = \frac{\sqrt{l^2 + h^2} q_0 l}{8H} \quad (20)$$

2.4 斜拉 CFRP 索与钢索的比较

CFRP 索的自重、弹性模量都与钢索有较大的差别,因此使用中跨度、索内应力等也有一定差别。采用弹性悬链线解对两端施加张拉力仅受自重荷载的 2 种索进行比较,比较其最大索力以及可实现的极限跨度。通常在实际工程中,例如斜拉桥、FRP 编织网结构等,斜拉索的较低的端点 B 点一般为索曲线的最低点,计算中仅考虑此种索,而不考虑索中间点低于 B 点的情况,即取“—”的情况。

索的截面和材料参数见表 2,钢索和 CFRP 索具有相同抗拉承载力,分析参数见表 3。计算结果见表 4 和表 5。可以看到,在相同的条件下,CFRP 索的最大拉力约为钢索的 1/6.1,CFRP 索的应力约为钢索的 1/4.4,按照抗拉强度计算得到的最大水平跨度也远大于钢索,大约为钢索的 4.4 倍。因此 CFRP 索有利于实现更大的跨度。对 3 000 m 以上的超大跨度桥梁,CFRP 索应为首选。

表 2 CFRP 索与钢索

材料	截面积/ (mm <sup>2</sup> )	密度/ (10 <sup>3</sup> kg · m <sup>-3</sup> )	弹性模量/ GPa	抗拉强度/ MPa	轴向抗拉 承载力/kN
钢索	10 000	7.9	195	1 800	18 000
CFRP 索	7 200	1.8	160	2 500	

表 3 分析参数取值

参数	取值
索长 $l/m$	200,500,1 000,3 000,5 000
$l/h$	0.5,1.0,1.5
$f_m/l$	1%~47%

表 4 CFRP 索与钢索计算结果 ( $l/h=1.0$ )

$l$	$f_m/l/\%$	最大拉力		应力	
		CFRP	钢	CFRP	钢
200	1	660.81	4 022.23	91.78	402.22
	5	143.66	875.45	19.95	87.55
	10	79.99	487.54	11.11	48.75
	16	57.05	347.74	7.92	34.77
	22	47.38	288.80	6.58	28.88
	28	42.47	258.86	5.90	25.89
1 000	1	3 296.67	19 951.69	457.87	(1 995.17)
	5	717.98	4 370.15	99.72	437.02
	10	399.87	2 435.68	55.54	243.57
	16	285.22	1 737.75	39.61	173.77
	22	236.88	1 443.42	32.90	144.34
	28	212.32	1 293.86	29.49	129.39
5 000	1	16 303.40	96 115.03	2 264.36	(9 611.50)
	5	3 581.82	21 676.66	497.47	(2 167.67)
	10	1 997.07	12 128.52	277.37	1 212.85
	16	1 425.02	8 665.60	197.92	866.56
	22	1 183.74	7 202.38	164.41	720.24
	28	1 061.12	6 458.23	147.38	645.82

注:括号中数值表明已超过材料的抗拉强度。

表 5 CFRP 索与钢索最大理论跨度

最大垂跨比 $f_m/l/\%$	$h/l$	最大水平跨度 $l_m/m$	
		CFRP	钢
2	0.5	17 446.05	3 964.40
	1.0	10 833.03	2 461.73
	1.5	6 688.76	1 520.68
5	0.5	41 105.35	9 341.70
	1.0	25 414.77	5 776.13
	1.5	15 806.93	3 592.54
10	0.5	73 403.96	16 686.14
	1.0	45 580.45	10 362.24
	1.5	28 794.75	6 545.23

## 2.5 近似解的精度

对于上述 CFRP 索和钢索分别采用抛物线解和悬链线解进行求解,以弹性悬链线解为真实解进行对比,分析抛物线解和悬链线解的求解精度。

2.5.1 抛物线解的精度 图 2 所示为在不同垂跨比和水平跨度情况下,斜拉钢索最大轴力的相对误差(相对误差=(近似解-真实解)/真实解 $\times$ 100%)情况。由图可知,垂跨比  $f_m/l$  较小时,抛物线解的结果偏大;垂跨比较大时,抛物线解的结果偏小,且垂跨比越大,抛物线解偏小的越多。水平跨度对解的精度影响较小,而弦向斜率  $h/l$  对解的精度有一定影响:弦向斜率  $h/l$  的增大,会使相对误差有一个正的偏移。

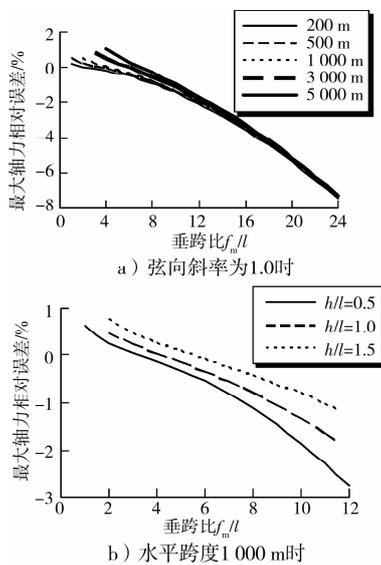


图 2 斜拉钢索抛物线解的精度

对于一般的斜拉钢索,当垂跨比小于 8% 的时候,其误差基本在 1% 以内,因此有的研究者将此作为钢索抛物线解的适用范围<sup>[19]</sup>。当弦向斜率  $f_m/l$  大于 1,水平跨度大于 1 000 m 时,进一步放宽抛物线解的适用范围,将垂跨比放宽到 10% 甚至 12%。但必须注意,这种近似得到的解是略小于真实解的,偏于不安全。

对于斜拉 CFRP 索,具有同样的变化规律,见图 3。将 CFRP 索与钢索比较可知(见图 4),抛物线解对于 2 种材质的斜拉索具有几乎相同的相对误差分布,即材质并不影响此索的求解精度,因此抛物线解

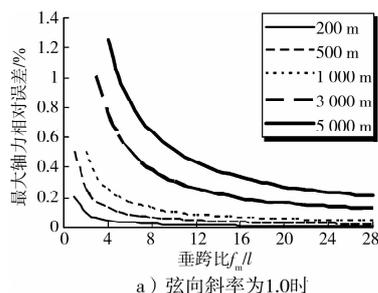


图 5 斜拉钢索悬链线解的精度

对斜拉 CFRP 索和钢索具有相同的适用范围。

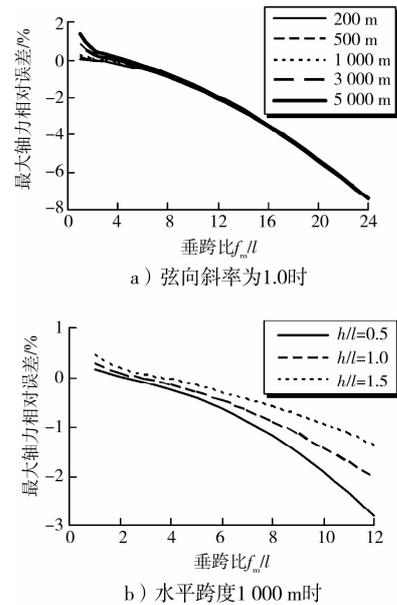


图 3 斜拉 CFRP 索抛物线解的精度

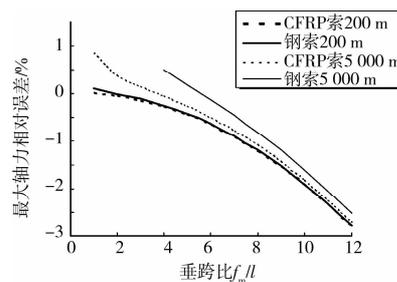


图 4 CFRP 索与钢索抛物线解的精度比较 ( $h/l=0.5$ )

2.5.2 悬链线解的精度 斜拉钢索采用悬链线解答的精度分析如图 5 所示。由图可知,悬链线解的结果大于真实解,说明求解结果是偏于保守的。随着垂跨比增大,悬链线解答的相对误差单调减小;水平跨度  $l$  和弦向斜率的增加,会使相对误差略有增加。一般来说对于水平跨度不大于 3 000 m 的斜拉索,悬链线解的相对误差均不大于 1%;当水平跨度为 5 000 m、弦向斜率大于 1.0 并且垂跨比较小的时候,悬链线解的相对误差稍大,最大值也只有 1.6% 左右。因此,悬链线解在相当大的参数范围内均具有较好的求解精度,对于常见的各种斜拉钢索均适用。

对于斜拉 CFRP 索,会得到同样的变化规律(见图 6)。将 CFRP 索与钢索比较可知(见图 7),悬链线解的误差与索的材料有关,CFRP 索的相对误差约为钢索的 1/3.5,但对于各种参数范围的 CFRP 斜拉索,均不超过 1%。因此悬链线解具有很好的精度。

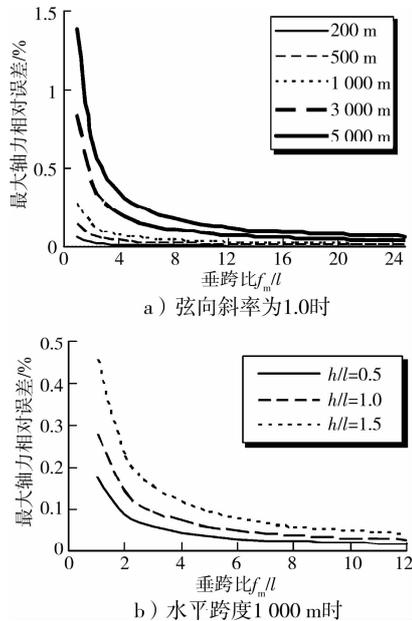


图6 斜拉 CFRP 索悬链线解的精度

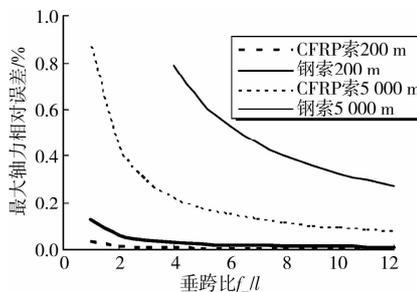


图7 斜拉 CFRP 索与钢索悬链线解的精度比较( $h/l=0.5$ )

2.5.3 小结 通过上述对 2 种近似解答的精度分析,可知抛物线解和悬链线解的精度与索的垂跨比、弦向斜率以及水平跨度有关,其中垂跨比的影响最为显著。抛物线解对于斜拉钢索和 CFRP 索具有几乎相同的相对误差范围,只有在垂跨比较小,因此抛物线解的适用范围较小。悬链线解大于真实解,并且相对误差均很小,特别是对于 CFRP 索,其相对误差均不超过 1%,约为钢索的 1/3.5。所以几乎对于工程中的所有斜拉索均可以采用悬链线解。

### 3 自重作用下水平吊索的解答

#### 3.1 水平吊索的求解方程

对于水平跨度为  $l$  的两端等高的水平吊索,自

重作用下为对称变形,因此可取出半跨进行分析,分析简图(图 8)与图 1 相似。与斜拉索的分析模型相比,在半跨模型中,A 端相当于塔顶固定端,并且  $T_A$  已知,跨中 M 点相当于梁端张拉端,并且  $T_M=H$ 、 $V_M=0$ 。此处的竖向挠度  $f$  为未知。类比斜拉索的求解结果表达式,将其中的  $l$  用  $l/2$  替换、将 B 点的物理量用 M 点的物理量替换、将  $T_M$  用  $H$  替换,即可得到水平索的求解结果。

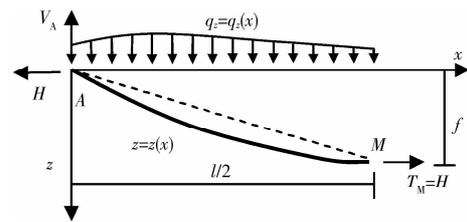


图8 水平索半跨分析模型

对于有弹性的悬链线解,有

$$q_0 l/2 = H \frac{\sqrt{T_A^2 - H^2}}{EA_0} + H \times \operatorname{arsh}\left(\frac{T_A^2 - H^2}{H}\right) \quad (21-a)$$

$$q_0 f = \frac{T_A^2 - H^2}{2EA_0} + (T_A - H) \quad (21-b)$$

对于悬链线解,有

$$q_0 l/2 = H \times \operatorname{arsh}\left(\frac{\sqrt{T_A^2 - H^2}}{H}\right) \quad (22-a)$$

$$q_0 f = T_A - H \quad (22-b)$$

对于抛物线解,有

$$H = \sqrt{T_A^2 - (q_0 l/2)^2} \quad (23-a)$$

$$f = \frac{q_0 l^2}{8H} \quad (23-b)$$

通过上述(21)–(23)中的(a)方程即可以先求得水平张力  $H$ ,从而可以求得 A 点的竖向分量  $V_A$ ,分别带入式(8)、(14)、(17)中,就可以得到对应的索曲线方程。另外将  $H$  代入(21)–(23)的式(b)中,可得到跨中垂度。

#### 3.2 水平 CFRP 索与钢索的比较

采用弹性悬链线解对水平 CFRP 索与钢索进行了比较,见表 6 和表 7。与斜拉索类似,水平 CFRP 索与钢索相比,垂跨比相同时,CFRP 索内最大拉力约为钢索的 1/4.4,最大拉应力约为钢索的 1/3.1,并且按照抗拉强度计算得到的 CFRP 索的最大跨度约为 4.4 倍。因此在实现更大跨度的结构时,CFRP 索比钢索更具有优势。

表 6 水平 CFRP 索与钢索计算结果

$l$	$f_m/l$	最大轴力		最大应力	
		CFRP	钢	CFRP	钢
200	1	441.29	1 935.39	61.29	193.54
200	7	65.87	289.09	9.15	28.91
200	13	39.25	172.24	5.45	17.22
1 000	1	2 204.02	9 638.92	306.11	963.89
1 000	7	329.32	1 444.60	45.74	144.46
1 000	13	196.22	860.93	27.25	86.09
5 000	1	10 960.26	47 286.74	1 522.26	(4 728.67)
5 000	7	1 645.28	7 202.38	228.51	720.24
5 000	13	980.65	4 297.78	136.20	429.78

注:括号中数值表明已超过材料的抗拉强度。

表 7 水平 CFRP 索与钢索最大理论跨度

垂跨比 $f_m/l$	CFRP 索/m	钢索/m
1	8 247.34	1 875.39
4	32 531.01	7 397.48
8	62 297.66	14 167.17
12	87 288.99	19 852.10
15	102 315.50	23 271.21

### 3.3 近似解法的精度

抛物线解和悬链线解对于不同水平跨度  $l$  和跨中垂度  $f$  的水平索的求解精度比较见图 9。从图中可以看到,近似解法对水平索的精度与斜拉索是相似的。

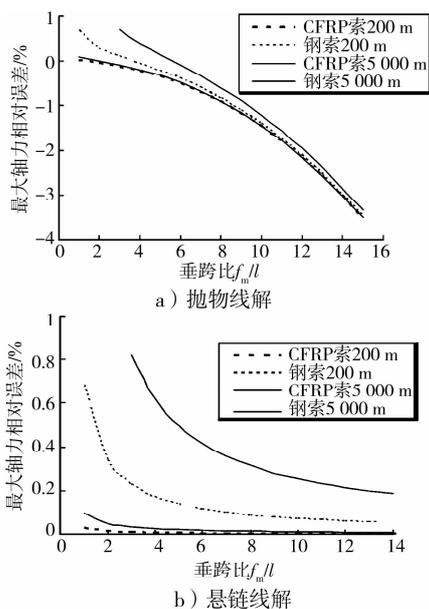


图 9 水平索解的误差

抛物线解随着垂跨比的增大,由大于真实解逐

渐转变为小于真实解,而且当垂跨比大于 8% 时,解的相对误差大于 1%。抛物线解对于钢索和 CFRP 索具有几乎相同的相对误差范围。

悬链线解大于真实解,是偏于保守的。结果的相对误差均小于 1%,并且相对误差随着垂跨比的增大而迅速减小。所以悬链线对于所有索均具有很好的精度,尤其是对于大垂度的索,解的精度非常高。

## 4 结语

对考虑自重荷载作用单索的 3 种求解方法:抛物线解答、悬链线解答和有弹性的悬链线解答进行了分析和研究,探讨了 3 种解答之间的本质联系,并且将实际工程中常用的索端张拉力作为已知量,推导了只含有 1 个未知量的求解方程,降低了各种参数方程的求解难度。通过对上述方程进行数值求解,分斜拉索和水平索 2 种情况,对 CFRP 索和钢索进行了对比分析,并且对近似解的精度进行了讨论,可以得到如下结论:

1) 对钢索和 CFRP 索进行了对比分析,表明自重对 CFRP 索轴力的影响远小于对钢索的影响。并且 CFRP 索的理论跨度远大于钢索,说明与钢索相比 CFRP 索有利于实现更大的跨度。

2) 抛物线解和悬链线解的精度与索的水平跨度、弦向斜率和垂跨比有关,其中垂跨比的影响最为显著。垂跨比较小时,抛物线解大于真实解,垂跨比较大时,抛物线解小于真实解,而悬链线解始终大于真实解。

3) 建议抛物线解的适用范围为垂跨比不大于 8% 的索,悬链线解则可用于工程中所有类型的索。

### 参考文献:

- [1] 叶列平,冯鹏. FRP 在工程结构中的应用与发展[J]. 土木工程学报, 2006, 3, 39(3): 24-36.  
YE LIE-PING, FENG PENG. Applications and development of fiber-reinforced polymer in engineering structures [J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 3, 39(3): 24-36.
- [2] MEIER U. Proposal for a carbon fibre reinforced composite bridge across the strait of Gibraltar at its narrowest site[C]//Proc. the Institution of Mechanical Engineers. Part B, Management and Engineering Manufacture, 1987, 201(2): 73-78.
- [3] 成锋,杨溢,杨健,等. 超大跨碳纤维索桁桥的静动力性能研究[J]. 中外公路, 2008, 28(2): 113-116.  
CHENG FENG, YANG YI, YANG JIAN, et al. Study on static and dynamic performance of ultra-length span cable-truss bridge with CFRP cables [J]. Journal of China & Foreign Highway, 2008, 28(2): 113-116.
- [4] WANG XIN, WU ZHI-SHEN. Evaluation of FRP and hybrid FRP cables for super long-span cable-stayed

- bridges[J]. Composite Structures, 2010, 92(10): 2582-2090.
- [5] XIN WANG, ZHISHEN WU. Integrated high-performance thousand-metre scale cable-stayed bridge with hybrid FRP cables[J]. Composites Part B-Engineering, 2010, 41(2): 166-175.
- [6] WU Z, WANG X. Investigation on a 1000-m scale cable-stayed bridge with fiber composite cables [C]//The Fourth international conference on FRP composites in civil engineering (CICE-4), Zurich, Switzerland, July 22-24, 2008.
- [7] 吴晓, 杨立军, 马建勋. 椭圆平面双曲抛物面碳纤维索网的非线性振动[J]. 北京工业大学学报, 2010, 36(1): 35-39.  
WU XIAO, YANG LI-JUN, MA JIAN-XUN. Nonlinear vibration of elliptic hyperbolic net using carbon fiber reinforced polymer[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2010, 36(1): 35-39.
- [8] 刘少斌. 主体结构位移激励下碳纤维索网的振动[J]. 兰州理工大学学报, 2009, 35(6): 114-118.  
LIU SHAO-BIN. Vibration of cable net made of carbon fiber cables under excitation of main structure displacement [J]. Journal of Lanzhou Science and Engineering, 2009, 35(6): 114-118.
- [9] PENG FENG, LIE-PING YE, et al. Large-span woven web structure made of fiber-reinforced polymer [J]. Journal of Composites for Construction, 2007, 3, 11(2): 110-119.
- [10] 冯鹏, 叶列平, 包睿, 等. FRP 编织网结构体系的概念、形式及基本受力分析[J]. 建筑结构学报, 2007, 8, 28(4): 109-116.  
FENG PENG, YE LIE-PING, BAO RUI, et al. Concepts, forms and basic analysis of FRP woven web structure[J]. Journal of Building Structures, 2007, 8, 28(4): 109-116.
- [11] 梅葵花, 孙胜江. 斜拉索的静力设计计算[J]. 中外公路, 2007, 8, 27(4): 121-124.  
MEI KUI-HUA, SUN SHENG-JIANG. Static analysis of stay cable[J]. Journal of China & Foreign Highway, 2007, 27(4): 121-124.
- [12] 张志国, 靳明君, 邹振祝. 自重荷载作用下悬索静力解析解[J]. 中国铁道科学, 2004, 25(3): 67-70.  
ZHANG ZHI-GUO, JIN MING-JUN, ZOU ZHEN-ZHU. Static solution of suspension cables under tare load[J]. China Railway Science, 2004, 25(3): 67-70.
- [13] 魏建东, 赵人达, 车惠民. 斜拉桥中拉索的静力设计[J]. 桥梁建设, 1999(2): 21-23.  
WEI JIAN-DONG, ZHAO REN-DA, CHE HUI-MIN. Static design of cable in cable-stayed bridge[J]. Bridge Construction, 1999(2): 21-23.
- [14] 沈世钊, 徐崇宝, 赵臣等. 悬索结构设计[M]. 2版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006.
- [15] 魏建东, 车惠民. 斜拉索静力解及其应用[J]. 西南交通大学学报, 1998, 33(5): 539-543.  
WEI JIAN-DONG, CHE HUI-MIN. Static solutions to stay cables and their applications [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 1998, 33(5): 539-543.
- [16] 程伟, 易伟健, 刘光栋. 斜拉桥柔性索线形分析及快速迭代计算方法[J]. 公路, 1998(6): 8-11.  
CHENG WEI, YI WEI-JIAN, LIU GUANG-DONG. Line type analysis and fast iteration calculational method of flexible cables in cable-stayed bridge [J]. Highway, 1998(6): 8-11.
- [17] 李强兴. 斜拉索静力解[J]. 桥梁建设, 1996(3): 21-24.  
LI QIANG-XING. Static force solution to stayed cables [J]. Bridge Construction, 1996(3): 21-24.
- [18] 单圣涤, 李飞云, 陈洁余, 等. 悬索曲线理论及其应用[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1983.

(编辑 胡玲)

(上接第41页)

- [16] IBC2006 International Building Code[S]. Country Club Hills, Illinois, USA; International Code Council, INC., 2006.
- [17] ACI 318-08 Building code requirements for structural concrete and commentary [S]. Farmington Hills, Michigan, USA; American Concrete Institute, 2007.
- [18] LEE H S, WOO S W. Effect of masonry infill on seismic performance of a 3-storey RC frame with non-seismic detailing [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2002, 31(2): 353-378.
- [19] FREDERIC LEGERON, PATRICK PAULTRE. Behavior of high-strength concrete columns under cyclic flexure and constant axial load[J]. ACI Structural Journal, 2000, 97(4): 591-601.
- [20] CARDONE D. Nonlinear static methods vs. experimental shaking table test results [J]. Journal of Earthquake Engineering, 2007, 11(6): 847-875.

(编辑 胡英奎)