

# 混凝土中氯离子时变扩散的边界元分析

杨绿峰<sup>a,b</sup>, 陈正<sup>a,b</sup>, 刘鸿亮<sup>a</sup>, 王焱<sup>a</sup>

(广西大学 a. 工程防灾与结构安全教育部重点实验室; b. 土木建筑工程学院, 南宁 530004)

**摘要:**氯离子在混凝土中的扩散是一个时变过程。考虑氯离子扩散系数的时间依赖性, 将时变扩散系数引入混凝土的氯离子扩散模型中, 通过变量代换, 给出了时变扩散条件下氯离子扩散方程的基本解, 并基于误差函数建立了氯离子扩散场补偿长度理论, 分析了散场补偿长度系数的取值, 在此基础上建立了时变扩散系数下混凝土中氯离子扩散分析的边界元法。通过算例分析验证了氯离子扩散场补偿长度理论对于氯离子扩散分析的数值方法的合理性, 证明了该法具有较高的计算精度和计算效率。

**关键词:**混凝土; 氯离子; 边界元; 时变; 扩散系数

中图分类号: TU528.07 文献标志码: A 文章编号: 1674-4764(2011)04-0073-07

## Boundary Element Method for Time-dependent Chloride Diffusion and the Chloride Distribution in Concrete

YANG Lu-feng<sup>a,b</sup>, CHEN Zheng<sup>a,b</sup>, LIU Hong-liang<sup>a</sup>, WANG Yi<sup>a</sup>

(a. Key Laboratory of Disaster Prevention and Structural Safety, Ministry of Education;

b. School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, P. R. China)

**Abstract:** The process of chloride diffusion in concrete is time-dependent. The boundary element method (BEM) with a time-dependent diffusion coefficient is presented for chloride diffusion in concrete based on the suitable transformation of variables. The fundamental solution of the partial differential equation for time-dependent chloride diffusion in concrete is developed, and the compensation length of the diffusion field is defined as well as the compensation coefficient. The scheme of BEM with a time-dependent diffusion coefficient is developed. Two examples are given to demonstrate the accuracy and efficiency of the presented method and the rationality and the importance of the compensation length for the method.

**Key words:** concrete; chloride; boundary element method (BEM); time-dependent; diffusion coefficient

与普通混凝土结构相比, 处于氯离子环境下的海洋混凝土结构往往由于钢筋的锈蚀而更早地破坏。普遍认为, 氯离子在混凝土中的扩散符合 Fick 第二定律<sup>[1-2]</sup>。在 Fick 第二定律的控制方程中, 氯离子扩散系数是一个非常重要的参数, 氯离子扩散

系数的大小直接关系到混凝土中氯离子扩散的快慢。在实际工程中, 氯离子在钢筋混凝土结构内部的扩散过程是一个复杂的物理化学过程, 在这个过程中, 其扩散系数并不是恒定的, 必然会随着环境条件和材料性质等因素的改变而变化。因而, 基于 Fick 第

收稿日期: 2010-11-30

基金项目: 国家自然科学基金(50768001)资助项目; 广西科技计划课题(桂科能 0992028-7); 广西自然科学基金重点项目(桂科自 0991020Z; 2011GXNSFB018013); 广西大学科研基金(XBZ100460)资助项目

作者简介: 杨绿峰(1966-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事工程结构的安全性和耐久性研究, (E-mail) lfyang@gxu.edu.cn。

陈正(通讯作者), 男, 副教授, 博士, 主要从事海洋混凝土结构的耐久性研究, (E-mail) chenzheng@gxu.edu.cn。

二定律的时变扩散系数的氯离子扩散模型来描述氯离子在混凝土中的扩散和积聚更加合理、有效。

Magge<sup>[3]</sup>、孙伟<sup>[4-6]</sup>、Tumidajski<sup>[7]</sup>、Tang<sup>[8]</sup>、Nilsson<sup>[9]</sup>、Liang<sup>[10]</sup>等人分别考虑了时间、氯离子结合能力、混凝土结构缺陷、温度、孔隙率、水泥水化产物等因素对氯离子在混凝土中的扩散系数的影响。鉴于过多的因素分析使氯离子扩散模型较为复杂,增加了预处理和计算过程的难度。因此,许多在相关领域的研究学者对影响混凝土中氯离子扩散的诸多因素进行分析和识别,将氯离子在混凝土中的扩散系数的时间依赖性列为其主要的影响因素之一<sup>[3,8]</sup>,并在此基础上建立了与时间相关的等效时变氯离子扩散模型。

Takewake 和 Mastumoto<sup>[11]</sup>提出混凝土的氯离子扩散系数随暴露时间的增长呈指数衰减的时变性质;Mangat 和 Molloy<sup>[12]</sup>建立了基于半无限大体假设的氯离子扩散分析的时变模型;Tang 和 Gulikers<sup>[8]</sup>通过对混凝土中氯离子扩散问题的分析和研究,建立了基于时变扩散系数的氯离子一维扩散模型并得到了解析解;杨绿峰、李冉等人对基于混凝土初始龄期及龄期衰减系数影响的氯离子二维扩散问题,研究建立了解析理论<sup>[13]</sup>和有限元方法<sup>[14]</sup>。

边界元法能够将待问题降低一个维数,具有良好的性能,与解析解相比边界元具有更强的适应性,可以用于非规则边界的氯离子扩散问题的分析和研究;而且与有限元相比,边界元在扩散问题的时间域内只需取很少的几个离散单元,在空间域内只需沿扩散场的边界进行离散,可以大大降低离散未知量,减少计算时间。杨绿峰、陈正等人提出了混凝土中氯离子扩散补偿长度理论,首次建立了混凝土中氯离子扩散分析的边界元法,据此研究了常扩散系数下混凝土中氯离子浓度分布及其耐久性<sup>[15-16]</sup>。

时变扩散过程分析是边界元法研究和应用中的难点和重点。文章在上述研究工作的基础上,进一步考虑氯离子扩散系数的时间依赖性,通过合理的变量代换,研究建立了时变扩散条件下氯离子扩散分析的边界元法,利用误差函数,建立了氯离子扩散场的补偿系数和补偿长度理论,据此建立了时变扩散条件下混凝土的氯离子扩散分析模型,并通过算例分析验证了基于时变扩散系数的边界元法具有较高的计算精度和计算效率。

## 1 时变扩散系数下的氯离子扩散

在研究海洋环境下混凝土结构的耐久性时,通常假设混凝土试件中的一个面直接暴露于海洋环境下,如图 1 中的 AD 面,将该试块其余的 5 个面都用环氧树脂密封,如图 1 中的 AB、BC 和 CD 面。

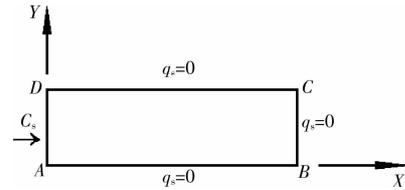


图 1 混凝土中氯离子的扩散

氯离子在混凝土中的扩散及其所形成的有势场可以通过 Fick 第二定律来进行描述:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \\ C(P \in \Gamma_1, t) &= C_s \\ q(P \in \Gamma_2, t) &= q_s \\ C(P \in \Omega, t=0) &= C_0 \\ C(x=\infty, t) &= C_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $D$  表示混凝土中氯离子的扩散系数;  $t$  表示混凝土持续暴露于海洋或其它含氯盐环境中的时间;  $C$  表示混凝土中某点  $P(x, y)$  在  $t$  时刻的氯离子浓度;  $C_s$  表示混凝土的表面氯离子浓度;  $C_0$  表示混凝土的初始氯离子浓度;  $q$  表示混凝土中氯离子浓度梯度,且:

$$q = \frac{\partial C}{\partial n} \quad (2)$$

式中,  $n$  表示混凝土试件边界的外法线方向。

由于混凝土的氯离子扩散系数随扩散时间和扩散深度而变化,且与氯离子浓度有关,所以在相当长的时间内氯离子在混凝土中的迁移都表现为复杂的非稳态扩散过程。为了简化求解,通常将扩散系数简单表示为时间函数  $D = D(t)$ ,即采用等效扩散系数  $D(t)$  来代替常扩散系数  $D$ ,等效扩散系数表示混凝土从开始暴露于海洋或氯盐环境,到进行氯离子含量检测时混凝土中氯离子扩散系数的等效值,且近似服从下式的关系

$$D(t) = D_0 \left( \frac{t_0}{t} \right)^n \quad (3)$$

式中,  $t_0$  表示混凝土初始暴露于海洋或其它氯盐环境下的龄期,亦称初始龄期;  $D_0$  表示混凝土在初始龄期  $t_0$  时刻的氯离子扩散系数;  $t'$  表示混凝土的龄期;  $D(t)$  表示混凝土暴露于海洋或其它氯盐环境下  $t = t' - t_0$  时间的扩散系数;  $n$  表示龄期衰减系数,是通过试验结果拟合得到的试验常数,龄期衰减系数与混凝土材料组分、水灰比、矿物掺合料的类型与掺量等因素有关<sup>[17-18]</sup>。

用等效扩散系数  $D(t)$  来代替常扩散系数  $D$ ,将式(3)代入式(1),得

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4)$$

其边界条件和初始条件如式(1)所示。式(4)即

为考虑时间依赖性的氯离子扩散方程。

令等效扩散系数  $D(t)$  为变量  $T(t)$  的一阶导数,即

$$D(t) = \frac{dT(t)}{dt} \quad (5)$$

整理式(5)并将等式两边在时间域  $[t_0, t_0 + t]$  上进行积分,得

$$T = \int_{t_0}^{t_0+t} D(t) dt = \frac{D_0 \cdot t_0^n}{1-n} [(t+t_0)^{1-n} - (t_0)^{1-n}] \quad (6)$$

利用分部积分,可得:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial T} \cdot \frac{dT(t)}{dt} = D(t) \frac{\partial C}{\partial T} \quad (7)$$

将式(7)代入式(4),整理,得

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (8)$$

其边界条件和初始条件为:

$$\left. \begin{aligned} C(P \in \Gamma_1, T) &= C_s \\ q(P \in \Gamma_2, T) &= q_s \\ C(P \in \Omega, T=0) &= C_0 \\ C(x=\infty, T) &= C_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(8)即为变量代换后的时变扩散系数下混凝土中氯离子扩散的基本方程,容易看出,该方程为常系数微分方程。据此可得时变扩散条件下混凝土中氯离子浓度分布的解析表达式<sup>[8,14,19]</sup>:

$$C = C_0 + (C_s - C_0) \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{T}} \right) = C_0 + (C_s - C_0) \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{D_a t}} \right) \quad (10)$$

式中,  $\operatorname{erf}(y)$  为误差函数:

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx \quad (11)$$

式中  $D_a$  表示时变扩散系数,且:

$$D_a = \frac{D_0}{1-n} \left[ \left( 1 + \frac{t_0}{t} \right)^{1-n} - \left( \frac{t_0}{t} \right)^{1-n} \right] \left( \frac{t_0}{t} \right)^n \quad (12)$$

## 2 时变扩散系数下氯离子扩散场的补偿长度理论

根据式(1)和(9)中定义的边界条件可知,远端边界被假象地置于无穷远处 ( $x = \infty$ ),而且式(10)给出的解析确实能够精确满足该边界条件:

$$C(x = \infty, T) = C_0 \quad \text{或} \quad C(x = \infty, t) = C_0$$

该解析解成立的关键是误差函数满足:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{T}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{D_a t}} \right) = 1 \quad (13)$$

为了便于建立数值分析模型,通常要求将计算模型的远端边界取在有限远处,为此需要针对下图所示的误差函数的取值规律:

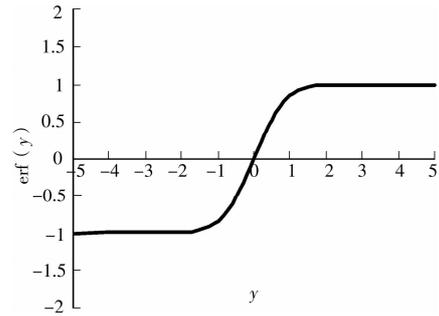


图 2 误差函数  $\operatorname{erf}(y)$

从图 2 中可以看出,当变量  $y \geq 2.25$  时,误差函数的值趋近于 1。所以对于式(13),只有当:

$$\frac{x}{2\sqrt{T}} = \frac{x}{2\sqrt{D_a t}} = \frac{k}{2} \geq 2.25 \quad (14)$$

时,式(10)给出的解析解仍能近似满足远端边界条件。因此,扩散场的计算长度  $L$  应取为:

$$L \geq L_c = k\sqrt{T} = k\sqrt{D_a t} \quad (15)$$

其中

$$k = 4.5 \quad (16)$$

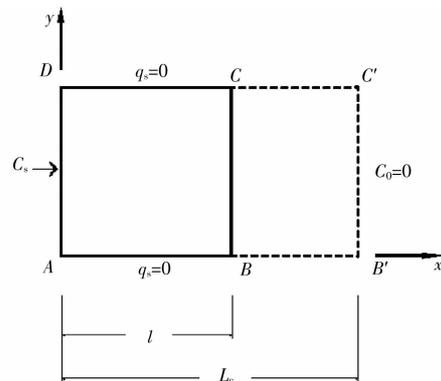


图 3 基于补偿长度理论的混凝土中氯离子扩散计算模型

因此,在利用包括边界元在内的数值分析方法研究混凝土中氯离子的扩散问题时,计算模型的长度应不小于  $L_c$ ,称  $L_c$  为混凝土的氯离子扩散场补偿长度, $k$  为补偿长度系数。混凝土中氯离子扩散场补偿长度理论基于以下原则:如果混凝土试件或结构在氯离子扩散方向(如图 3 中  $x$  轴正方向)的实际长度  $l$  不小于式(15)所确定的扩散场补偿长度  $L_c$ ,则应该按照构件或结构的实际尺寸建立混凝土中氯离子扩散的数值分析模型(如图 3 中实线所示的  $ABCD$  区域);反之,如果  $l < L_c$ ,则需要将混凝土试件或结构沿氯离子扩散方向虚拟地扩展至不小于补偿长度  $L_c$ (如图 3 中将  $BC$  边补偿延伸至  $B'C'$ ),据此建立新的氯离子扩散场(如图 3 中按照虚线建立新的扩散场  $AB'C'D$ )以及混凝土的氯离子扩散分析数值模型,扩散系数及边界条件等同于原来的

混凝土构件。

### 3 时变扩散系数下的基本解和边界元法

根据式(8),由加权余量法得

$$\int_{T_0}^{T_\tau} \iint_{\Omega} \left( \nabla^2 C - \frac{\partial C}{\partial T} \right) C^* \, d\Omega dT = \int_{T_0}^{T_\tau} \int_{\Gamma_2} (q - q_s) C^* \, d\Gamma dT - \int_{T_0}^{T_\tau} \int_{\Gamma_1} (C - C_s) q^* \, d\Gamma dT \quad (17)$$

式中,  $C^*$  和  $q^*$  是氯离子扩散问题式(8)的基本解,它分别表示激励点  $i(x_i, y_i)$  (driving-point, 也称源点 source point) 在某一时刻  $t$  的单位氯离子浓度, 经过一段时间的扩散, 在  $\tau$  时刻 ( $\tau > t$ ) 时对响应点  $j(x, y)$  (response point, 也称场点 field point) 的氯离子浓度和氯离子浓度梯度的影响。常扩散系数下混凝土中氯离子扩散方程的基本解为<sup>[15-16]</sup>:

$$C^* = \frac{1}{4\pi D(\tau-t)} \exp\left(-\frac{r^2}{4D(\tau-t)}\right) \quad (18)$$

$$q^* = \frac{\partial C^*}{\partial n} = -\frac{r}{8\pi D^2(\tau-t)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4D(\tau-t)}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \quad (19)$$

据此,容易建立时变扩散系数下混凝土中氯离子扩散问题的基本解:

$$C^* = \frac{1}{4\pi(T_\tau-T)} \exp\left(-\frac{r^2}{4(T_\tau-T)}\right) \quad (20)$$

$$q^* = \frac{\partial C^*}{\partial n} = -\frac{r}{8\pi(T_\tau-T)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4(T_\tau-T)}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \quad (21)$$

式(20)、(21)中,  $r$  表示激励点  $i(x_i, y_i)$  到响应点  $j(x, y)$  的距离, 即

$$r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (22)$$

$n$  表示积分单元外法线的方向, 如图 4 所示。

容易验证, 式(20)、(21) 给出的表达式满足基本解的两个性质:

$$1) \nabla^2 C^* + \frac{\partial C^*}{\partial T} = 0 \quad \in \Omega \quad [T_0, T_\tau] \quad (23)$$

2) 在  $T = T_\tau$  时:

$$\iint_{\Omega} C^* \, d\Omega = \begin{cases} 0 & \text{当 } r \neq 0 \\ 1 & \text{当 } r = 0 \end{cases} \quad (24)$$

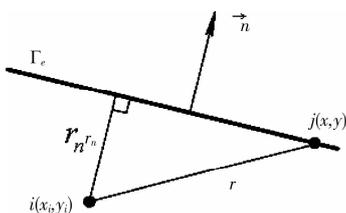


图4 激励点与响应点关系示意图

由此证明了式(20)、(21)给出的时变扩散系数下混凝土中氯离子扩散方程的基本解是正确的。

由第二格林公式和式(23), 对式(17)中等号左边的 2 项进行整理:

$$\int_{T_0}^{T_\tau} \iint_{\Omega} \nabla^2 C \cdot C^* \, d\Omega dT = \int_{T_0}^{T_\tau} \iint_{\Omega} C \cdot \nabla^2 C^* \, d\Omega dT - \int_{T_0}^{T_\tau} \int_{\Gamma} (Cq^* - C^*q) \, d\Gamma dT \quad (25)$$

$$\int_{T_0}^{T_\tau} \iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial T} C^* \, d\Omega dT = C_i - \iint_{\Omega} C \cdot C^* \, d\Omega \Big|_{T_0} - \int_{T_0}^{T_\tau} \iint_{\Omega} C \frac{\partial C^*}{\partial T} \, d\Omega dT \quad (26)$$

将式(25)、(26)代入式(17), 整理可得混凝土中氯离子时变扩散问题的积分方程:

$$C_i + \int_{\Gamma} \left( \int_{T_0}^{T_\tau} q^* \, dT \right) \cdot C d\Gamma = \int_{\Gamma} \left( \int_{T_0}^{T_\tau} C^* \, dT \right) \cdot q d\Gamma + \iint_{\Omega} C \cdot C^* \, d\Omega \Big|_{T_0} \quad (27)$$

令:

$$C_T^* = \int_{T_0}^{T_\tau} C^* \, dT = \frac{1}{4\pi} E_i(b)$$

$$q_T^* = \int_{T_0}^{T_\tau} q^* \, dT = -\frac{1}{2\pi r} \exp\left(-\frac{r^2}{4(T_\tau-T_0)}\right) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (28)$$

其中,  $E_i(b)$  为指数积分, 当  $b < 8$  时

$$E_i(b) = -c - \ln b + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{b^n}{n \cdot n!} \right) \quad (29)$$

当  $b \geq 8$  时

$$E_i(b) = \frac{e^{-b}}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{b^n} \quad (30)$$

将将域内激励点  $i(x_i, y_i)$  移动到边界上, 此时式(27)即成为边界积分方程:

$$A_i C_i + \int_{\Gamma} q_T^* C d\Gamma = \int_{\Gamma} C_T^* q d\Gamma + \iint_{\Omega} C \cdot C^* \, d\Omega \Big|_{T_0} \quad (31)$$

式中,  $A_i$  表示积分系数, 且:

$$A_i = \begin{cases} 1/2 & i \in \Gamma \quad \text{当结点 } i \text{ 处于光滑边界上} \\ \beta/2\pi & i \in \Gamma \quad \text{当结点 } i \text{ 处于非光滑边界上} \end{cases} \quad (32)$$

其中  $\beta$  表示结点  $i$  两侧边界的切线之间的夹角。

根据氯离子扩散场的补偿长度理论, 沿着混凝土构件的实际尺寸  $ABCD$  或补偿扩散场  $AB'C'D$  将连续边界离散为  $n$  个线性单元。对于图 5 所示的典型单元  $e$ , 长度为  $2l$ , 单元上的浓度及浓度梯度可用线性函数近似表示为:

$$\begin{cases} C^e = [N] \{a\}^e \\ q^e = [N] \{b\}^e \end{cases} \quad (33)$$

其中:  $[N]$  为形函数矩阵,  $\{a\}^e, \{b\}^e$  分别为边界元结点浓度列阵和浓度梯度列阵, 且

$$\begin{aligned}
 [N] &= [N_1, N_2], \{a\}^e = [C_1^e, C_2^e]^T, \\
 \{b\}^e &= [q_1^e, q_2^e]^T \\
 N_1 &= \frac{1-\xi}{2}, N_2 = \frac{1+\xi}{2}, \xi = \frac{x-l}{l}
 \end{aligned} \quad (34)$$

其中:下标 1、2 分别对应线性单元的左、右节点。

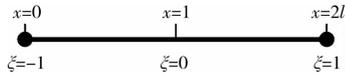


图5 边界单元  $e$  及结点坐标

以边界上的离散节点  $j$  为激励点,按照式(31)可以形成  $n$  个边界单元积分方程:

$$A_j C_j + \sum_{e=1}^n [H]_j^e \{a\}^e = \sum_{e=1}^n [G]_j^e \{b\}^e + \int_{\Omega} C \cdot C^* d\Omega|_{\tau_0} \quad (35)$$

$j = 1, 2, \dots, n$

式中

$$[H]_j^e = [H_{1j}^e \quad H_{2j}^e], [G]_j^e = [G_{1j}^e \quad G_{2j}^e] \quad (36)$$

其中

$$H_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} q_i^* N_j d\Gamma, G_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} C_i^* N_j d\Gamma \quad (37)$$

由于每个节点上都有一个浓度或浓度梯度的未知量,因此,式(31)中共有  $n$  个未知量、 $n$  个方程形成一个线性代数方程组,并且可集成表示为:

$$[H]\{a\} = [G]\{b\} + \int_{\Omega} C \cdot C^* d\Omega|_{\tau_0} \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \{a\} &= [C_1, C_2, \dots, C_n]^T, \\
 \{b\} &= [q_1, q_2, \dots, q_n]^T
 \end{aligned} \quad (39)$$

这里,  $C_i$  和  $q_i$  分别为边界节点  $i$  上的浓度值和浓度梯度值。进一步地可以根据边界单元节点上的氯离子浓度值和浓度梯度值,求得域内任意一点  $t$  时刻的浓度值。

## 4 算例分析

算例 1:一个普通的混凝土试块,其尺寸为  $150 \text{ mm} \times 150 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$ ,如图 3 所示,当混凝土龄期为 28 d 时将其中的 5 个面用环氧树脂封闭,沿厚度方向留下  $AD$  面暴露在含氯离子的人工海水环境中。混凝土的暴露面  $AD$  上氯离子浓度  $C_s$  为 0.8%,混凝土初始扩散系数  $D_0$  为  $2 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s} = 63.072 \text{ mm}^2/\text{a}$ ,衰减系数  $n$  为 0.3。这里首先利用本文建立的氯离子时变扩散分析的边界元模型,分别计算氯离子扩散 10 a、30 a、50 a 和 100 a 后混凝土试块中氯离子分布规律,并和精确解(简记为 CFS)相比较。

首先根据氯离子扩散场补偿长度理论确定氯离

子扩散场长度,当混凝土试块暴露于海水环境的时间分别为 10 a、30 a、50 a 和 100 a 时,根据式(15)计算得到的扩散场长度  $L_c$  分别为 113 mm、196 mm、253 mm 和 357 mm。可以看出,当混凝土试件暴露于海水环境 10 a 时,  $L_c < l = 150$ ,根据氯离子扩散场补偿长度理论,此时应该按照混凝土试块的实际边长建立边界元法计算模型;当暴露时间分别为 30 a、50 a 和 100 a 时,扩散场长度都大于混凝土试块的实际长度  $l = 150 \text{ mm}$ ,因此,根据氯离子扩散场补偿长度理论,应将混凝土试件延伸至不小于补偿长度  $L_c$  处(如图 3 中将  $BC$  边延伸至  $B'C'$ ),建立新的氯离子扩散场(如图 3 中按照虚线建立新的扩散场  $AB'C'D$ )和边界元法计算模型。该模型中,在空间域上沿扩散场边界取 10 mm 的离散网格,在时间域上划分为 4 个时间步长,并将计算结果与不采用补偿长度理论,而是按照实际试件长度建立计算模型的边界元法(简记为 BEM-N)的计算结果相比较,详见图 6。图中,“50 a CFS、50 a BEM-CL 和 50 a BEM-N”分别表示混凝土暴露于氯盐环境 50 a 后,试件中氯离子浓度的精确解、文中建立的基于扩散场补偿长度理论的边界元法计算结果和不应用扩散场补偿长度理论的传统边界元法计算结果。其他图标可类推。图中解析解用曲线表示,边界元计算结果用点表示。

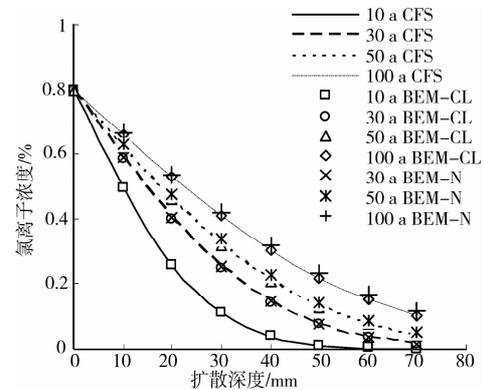


图6 混凝土中氯离子浓度分布(算例 1)

从图中可以看出,混凝土试件暴露于氯盐环境中不同时间后,本文建立的边界元法所得结果与解析解吻合较好,具有很高的计算精度;反之,不应用扩散场补偿长度理论的边界元法的计算结果与解析解不完全吻合,有一定偏差。而且可以看出,试件浸泡时间越久,试件实际长度与补偿长度的差别越大,是否采用补偿长度理论对计算结果的影响就越显著。

与有限元法相比较,由于有限元法需要在时间域上进行细密离散,计算时间较长。而边界元法离散模型在时间域上仅需要很少的几个离散子域,所以计算效率比有限元法高得多。

算例 2: Tang 和 Gulikers 对利用抗硫酸盐高性能混凝土(水灰比为 0.3)制备的混凝土板进行一维氯离子扩散实验<sup>[8]</sup>,如图 3 所示,当混凝土龄期为 0.03 a 时将其中的 5 个面用环氧树脂封闭,沿厚度方向留下 AD 面暴露在海洋环境下,经测定和分析,混凝土的暴露面 AD 上氯离子浓度  $C_s$  为 3.09%,混凝土初始扩散系数  $D_0$  为  $2.5 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s} = 78.84 \text{ mm}^2/\text{a}$ ,衰减系数  $n$  为 0.3。Tang 和 Gulikers 测定了暴露于海洋环境下 1 a 和 10 a 后混凝土板中不同深度处的氯离子浓度。

利用本文建立的时变扩散系数下氯离子扩散边界元模型计算氯离子扩散 1 a 和 10 a 后混凝土板的氯离子扩散和分布规律。首先根据式(15)和式(16)计算氯离子扩散 1 a 和 10 a 时的扩散场补偿长度分别为 40 mm、126 mm。根据氯离子扩散场补偿长度理论,按照混凝土板的补偿长度建立边界元法计算模型,并沿 AB、BC、CD、DA 4 条边离散,每个边离散为 20 个线性边界单元;将时间域划分为 4 个子域,并将边界元法计算结果与实验值相比较,如图 7 所示。图中,1 a test data 和 10 a test data 分别表示暴露 1 a 和 10 a 后混凝土板中氯离子浓度分布的实验值;1a BEM-t 和 10a BEM-t 分别表示根据时变扩散系数的边界元法计算暴露 1 a 和 10 a 后混凝土板中氯离子的浓度分布;1 a BEM-c 和 10 a BEM-c 分别表示根据常扩散系数的边界元法计算暴露 1 a 和 10 a 后混凝土中氯离子浓度分布所得到的结果。图中边界元计算结果用曲线表示,实验值用点表示。

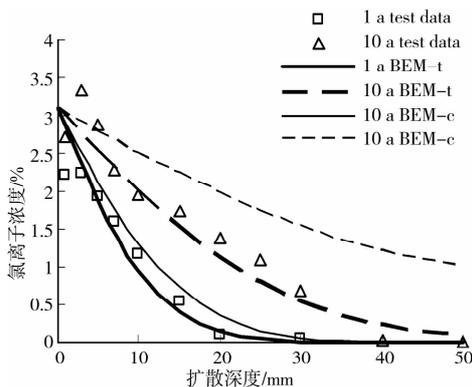


图 7 混凝土中氯离子浓度分布(算例 2)

从图中可以看出混凝土试件暴露于氯盐环境中不同时间后考虑时变扩散系数的边界元法得到的混凝土中氯离子浓度分布与实验值吻合较好,而没有考虑扩散系数时变性质的边界元法得到的混凝土中氯离子浓度分布与实验值有所偏离。而且,暴露时间越长,没有考虑扩散系数时变性质的边界元法计算结果与实验值的差别越大,是否考虑扩散系数时变性质对计算结果的影响就越明显。

## 5 结语

在基于常扩散系数氯离子扩散分析的边界元法基础上,将时变扩散系数引入混凝土的氯离子扩散模型中,并通过变量代换,研究建立了基于时变扩散系数的氯离子扩散分析的边界元法,由于系数矩阵不随时间而改变,所以具有很高的计算效率。

在对混凝土的氯离子扩散控制方程进行适当变换、消除 Fick 第二定律表达式中的时变系数基础上,通过对解析解中的误差函数建立了时变扩散系数条件下边界元法计算模型中的氯离子扩散场补偿长度和补偿系数,算例分析验证了本文方法具有很高的计算精度。

### 参考文献:

- [1] GOLTERMANN P. Chloride ingress in concrete structures: extrapolation of observations [J]. *ACI Materials Journal*, 2003, 100(2): 114-119.
- [2] MCGRATH P F, HOOTON R D. Influence of voltage on chloride diffusion coefficients from chloride migration tests [J]. *Cement and Concrete Research*, 1996, 26(8): 1239-1244.
- [3] MAAGE M, HELLAND S, POULSEN E, et al. Service life prediction of existing concrete structures exposed to marine environment [J]. *ACI Materials Journal*, 1996, 93(6): 602-608.
- [4] 余红发, 孙伟, 鄢良慧, 等. 混凝土使用寿命预测方法的研究 I——理论模型 [J]. *硅酸盐学报*, 2002, 30(6): 686-690.  
YU HONG-FA, SUN WEI, YAN LIANG-HUI, et al. Study on prediction of concrete service life i-theoretical model - I [J]. *Journal of The Chinese Ceramic Society*, 2002, 30(6): 686-690.
- [5] 余红发, 孙伟, 鄢良慧, 等. 混凝土使用寿命预测方法的研究 II——模型验证与应用 [J]. *硅酸盐学报*, 2002, 30(6): 691-695.  
YU HONG-FA, SUN WEI, YAN LIANG-HUI, et al. Study on prediction of concrete service life i-theoretical model - II [J]. *Journal of The Chinese Ceramic Society*, 2002, 30(6): 691-695.
- [6] 余红发, 孙伟, 鄢良慧, 等. 混凝土使用寿命预测方法的研究 III——混凝土使用寿命的影响因素及混凝土寿命评价 [J]. *硅酸盐学报*, 2002, 30(6): 696-701.  
YU HONG-FA, SUN WEI, YAN LIANG-HUI, et al. Study on prediction of concrete service life i-theoretical model - III [J]. *Journal of The Chinese Ceramic Society*, 2002, 30(6): 696-701.
- [7] 刘志勇, 孙伟, 杨鼎宜, 等. 基于氯离子渗透的海工混凝土寿命预测模型进展 [J]. *工业建筑*, 2004(6): 61-64.  
LIU ZHI-YONG, SUN WEI, YANG DING-YI, et al.

- Research and progress of modeling chloride ingress for corrosion risk prediction of marine concrete[J]. Chinese Journal of Industrial Construction, 2004(6):61-64.
- [8] TANG L P, J GULIKERS. On the mathematics of time-dependent apparent chloride diffusion coefficient in concrete[J]. Cement and Concrete Research, 2007, 37(4):589-595.
- [9] TANG L P, L O NILSSON. Chloride binding capacity and binding isotherms of OPC pastes and mortars[J]. Cement and Concrete Research, 1993(2):247-253.
- [10] LIANG M T, WANG K L, LIANG C H. Service life prediction of reinforced concrete structures[J]. Cement and Concrete Research, 1999, 29(9):1411-1418.
- [11] TAKEWAKE K, MASTUMOTO S. Quality and cover thickness of concrete based on the estimation of chloride penetration in marine environments [C]//V M MALHOTRA. Proc. 2nd Int. Conf. Concr. Marine Envir, 1988, ACI SP-109:381-400.
- [12] P MANGAT, B MOLLY. Prediction of long term chloride concentration in concrete [J]. Materials and Structures, 1994, 27:338-346.
- [13] 李冉, 杨绿峰, 冯庆革. 基于混凝土初始龄期及龄期衰减系数影响的氯离子二维扩散分析[J]. 混凝土, 2008(9):40-44.
- LI RAN, YANG LU-FENG, FENG QING-GE. Analysis of chloride diffusion in concrete based on the initial age of concrete and coefficient of attenuation age[J]. Chinese Journal of Concrete, 2008(9):40-44.
- [14] 杨绿峰, 李冉. 混凝土中氯离子二维扩散规律的解析研究[J]. 水利水电科技进展, 2009, 29(3):20-23.
- YANG LU-FENG, LI RAN. Analytical study of two-dimensional diffusion of chloride ion in concrete [J]. Chinese Journal of Advances in Science and Technology of Water Resources, 2009, 29(3):20-23.
- [15] 杨绿峰, 陈正, 王焱, 等. 混凝土中氯离子二维扩散分析的边界元法[J]. 硅酸盐学报, 2009, 37(7):1110-1117.
- YANG LU-FENG, CHEN ZHENG, WANG YI, et al. Boundary element method for analysis of two-dimensional chloride diffusion in concrete [J]. Journal of The Chinese Ceramic Society, 2009, 37(7):1110-1117.
- [16] 陈正, 杨绿峰, 冯庆革, 等. 高性能混凝土的氯离子扩散及服役寿命研究[J]. 建筑材料学报, 2010, 13(2):97-103.
- CHEN ZHENG, YANG LU-FENG, FENG QING-GE, et al. Study of chloride diffusion of high-performance concrete and its service life by the boundary element method [J]. Chinese Journal of Building Materials, 2010, 13(2):97-103.
- [17] 刘秉京. 混凝土结构耐久性设计[M]. 北京:人民交通出版社, 2007.
- [18] BAMFORTH P. Spreadsheet model for reinforcement corrosion in structures exposed to chlorides [M]//GJΦRV O, SAKAI K, BANTHIA N. Concrete Under Severe Conditions 2: Environment and Loading, London: E & FN Spon(1):64-75.
- [19] 姚诗伟, 吴萍. 氯离子扩散方程的解析解[J]. 港工技术与工程, 2006(5):1-7.
- YAO SHI-WEI, WU PING. Analytical solution to chloride diffusion equation [J]. Chinese Journal of Harbour Technology and Engineering, 2006(5):1-7.

(编辑 王秀玲)

(上接第72页)

- CAI XUE-FENG, ZHOU JI-ZHONG, ZHUANG JIN-PING. Joint slip resistance performance of fasteners in steel pipe formwork supports [J]. Civil Engineering Journal, 42(3):60-64.
- [18] 张卫红, 刘建民, 朱国卫. 基于整架试验的扣件式钢管脚手架半刚性节点计算方法[J]. 山东建筑大学学报, 2009, 24(1):38-42.
- ZHANG WEI-HONG, LIU JIAN-MIN, ZHU GUO-WEI. A semi-rigid node calculation method for steel tubular scaffold with complete based on back-analysis of scaffold load-bearing experiments results [J]. Journal of Shandong Jianzhu University, 24(1):38-42.
- [19] 胡长明, 董攀, 沈勤, 等. 扣件式钢管高大模板支架整体稳定性试验研究[J]. 施工技术, 2009, 38(4):70-72.
- HU CHANG-MING, DONG PAN, SHEN QIN, et al. Experimental research of global stability of fastener-style steel tubular high-formwork support [J]. Construction Technology, 2009, 38(4):70-72.

(编辑 胡玲)