

相对运动法与绝对位移直接求解法算法误差分析

李永华¹, 桂国庆^{1,2}

(1. 南昌大学 建筑工程学院, 南昌 330031; 2. 井冈山大学 工学院, 江西 吉安 343009)

摘要: 多点激励地震响应分析过程中, 相对运动法和绝对位移直接求解法分别假定阻尼与内部节点相对速度、绝对速度成比例, 由于阻尼假定的不一致, 计算结果可能存在误差。采用随机振动分析方法对瑞利阻尼模型下2种求解方法计算结果之间的误差进行了理论分析, 得出了2种算法下结构动态响应功率谱密度误差主要受激励频率与结构基频的比值、结构阻尼比影响的结论, 然后从概率统计意义上得出了2种算法下结构动态响应方差误差与结构阻尼比的关系, 并进行了相关算例数值论证。最后得出如下结论: 2种算法计算结果误差随阻尼比的减小而减小, 当结构阻尼比不大于5%时, 2种算法计算结果误差基本可忽略。

关键词: 多点激励; 相对运动法; 直接求解法; 随机振动; 误差分析

中图分类号: TU311.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2011)05-0083-07

Error Analysis between Relative Motion Solving Method and Absolute Displacement Direct Solving Method

LI Yong-hua¹, GUI Guo-qing^{2,1}

(1. School of Architecture and Civil Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, P. R. China;

2. School of Technology, Jinggangshan University, Ji'an 343009, Jiangxi, P. R. China)

Abstract: Under multi-support earthquake excitation, the damping is proportional to the relative velocity in relative motion method, While the damping is proportional to the absolute velocity in method of direct solving absolute displacement, and the damping assuming difference may cause the calculation errors on structural responses. The structural response errors of the dynamic component of power spectral density between the two solving methods are derived by random vibration theoretical analysis in Rayleigh damping model, which include damping ratio and the ratio between excitation frequency and fundamental frequency of the structures. Based on probability theory, the variation errors of dynamic component response between the two solving methods are also derived by theoretical analysis, and some numerical examples are provided to verify the error analysis. At last, it is pointed out that the calculation errors between the two solving methods decrease with damping ratio, and it is negligible when the damping ratio of structure is less than 5%.

Key words: multi-support excitations; relative motion method; direct solving method; random vibration; error analysis.

一致地震动作用下结构动力响应分析时, 通常采用相对运动法求解, 即固定支座节点, 将地震加速

收稿日期: 2011-03-01

基金项目: 国家自然科学基金项目(51068008、51168037); 江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ10354); 江西省自然科学基金项目(2009GZW0011)

作者简介: 李永华(1972-), 男, 博士, 主要从事结构工程、随机振动、计算力学研究, (E-mail) lyhlez@163.com。

度激励作用于结构内部节点上,以内部节点与支座节点间的相对位移为基本变量建立动力平衡方程,阻尼通常假定与内部节点与支座节点间的相对速度成比例。

多点激励地震响应分析中,动力方程求解可采用相对运动法、绝对位移直接求解法2种,相对运动法将结构内部节点绝对位移分解成拟静力位移和动态相对位移(后面简称动态位移)2部分,分别进行求解,在动态位移求解过程中,阻尼仍假定与相对速度成比例,这与传统的一致激励下阻尼假定相一致,但该方法在通用有限元软件中实现起来比较繁琐^[1]。绝对位移直接求解法直接对支座节点输入地震激励,在绝对坐标系下对内部节点的绝对位移进行直接求解,求解过程中阻尼假定与绝对速度成比例,在多点激励分析时,该方法由于在通用有限元软件中实现起来相当方便,所以在时域分析中广为应用^[2-7],绝对位移直接求解法根据加载方式的不同可分为大质量法、大刚度法和直接输入位移法等,但本质上都是绝对位移直接求解。从数学角度讲,2种算法阻尼假定的不同肯定会引起计算结果误差,工程界也注意到这一问题,但研究方法多为采用几个算例来证明这2种求解方法计算结果误差很小^[1-2],鲜有文献对这2种阻尼假定不同可能引起的计算结果误差进行理论分析。

随机振动方法由于较充分地考虑了地震发生的统计概率特性,被日益广泛地认为是一种较为先进合理的分析方法,并开始被我国抗震规范所采用,如2008年颁布的《公路桥梁抗震设计细则》就明确将随机振动分析方法纳入规程^[8]。采用随机振动分析方法对2种算法下结构响应功率谱密度进行分析,将有助于得出2种求解算法下结构响应功率谱密度之间的误差与频率、阻尼之间的关系,也有利于从概率统计意义上得出2种算法下结构响应方差误差与阻尼比的关系。基于以上分析,拟采用随机振动方法,从频域对相对运动法和位移输入模式绝对位移直接求解法计算结果之间的误差进行分析,从数学上澄清2种计算方法可能造成的计算结果误差。

1 多点激励基本方程求解方法

考虑多点激励的动力平衡方程如下所示^[9-11]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ss} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{bb} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_s \\ \ddot{\mathbf{y}}_b \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sb} \\ \mathbf{C}_{bs} & \mathbf{C}_{bb} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_s \\ \dot{\mathbf{y}}_b \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_s \\ \mathbf{y}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_b \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中, \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 分别为结构质量、阻尼、刚度矩阵;下标s、b分别表示内部节点、支座节点, \mathbf{y}_s 、 \mathbf{y}_b 分别表示内部节点、支座节点绝对位移; \mathbf{F}_b 为支座节点力。

1.1 相对运动法

结构在承受随时间变化的支座移动时,内部节点绝对位移 \mathbf{y}_s 来源于2个部分:支座移动引起的内部节点位移,称为拟静力位移;支座移动加速度导致的惯性力引起的内部节点位移,称为动态位移,因此,可将内部节点绝对位移表示为:

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_s \\ \mathbf{y}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_d \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{y}_b \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中, \mathbf{u}_d 为动态位移, \mathbf{u}_s 为拟静力位移。

相应的拟静力位移、动态位移求解方程为:

$$\mathbf{u}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sb} \mathbf{y}_b = \mathbf{R} \mathbf{y}_b \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_{ss} \ddot{\mathbf{u}}_d + \mathbf{C}_{ss} \dot{\mathbf{u}}_d + \mathbf{K}_{ss} \mathbf{u}_d = -\mathbf{M}_{ss} \ddot{\mathbf{y}}_b = -\mathbf{M}_{ss} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{y}}_b \quad (4)$$

式中, \mathbf{R} 为拟静模态矩阵。应注意的是,式(4)在推导过程中重新假定了阻尼力与内部结点相对速度成比例,而不是与绝对速度成比例,即忽略了阻尼力项 $-\mathbf{C}_{ss} \dot{\mathbf{u}}_s$ 、 $-\mathbf{C}_{sb} \dot{\mathbf{y}}_b$ ^[9]。

1.2 绝对位移直接求解法

绝对位移直接求解法就是直接对式(1)进行求解,将式(1)按第一行展开,则可得出下列基本方程:

$$\mathbf{M}_{ss} \ddot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{C}_{ss} \dot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{K}_{ss} \mathbf{y}_s = -\mathbf{C}_{sb} \dot{\mathbf{y}}_b - \mathbf{K}_{sb} \mathbf{y}_b \quad (5)$$

式(5)就是位移输入模式的绝对位移直接求解法基本方程。

2 2种求解方法在随机振动中的实现

2.1 基于相对运动法的随机振动虚拟激励法

2.1.1 算法原理 假定输入地震动自谱密度 $S_{FF}(\omega)$ 相同,只存在由于行波效应所引起的相位差,构造虚拟地面加速度激励^[9]:

$$\ddot{\mathbf{u}}_b = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\omega t_2} \\ \vdots \\ e^{-i\omega t_n} \end{Bmatrix} \sqrt{S_{FF}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (6)$$

将构造的虚拟地面加速度激励作为 $\ddot{\mathbf{y}}_b$ 代入方程(4),可得:

$$\mathbf{M}_{ss} \ddot{\mathbf{u}}_d + \mathbf{C}_{ss} \dot{\mathbf{u}}_d + \mathbf{K}_{ss} \mathbf{u}_d = -\mathbf{M}_{ss} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{u}}_b \quad (7)$$

求解式(7)的稳态解可得虚拟动态位移 $\ddot{\mathbf{u}}_d$ 。

由虚拟加速度激励可得虚拟地面位移激励^[9,11]:

$$\ddot{\mathbf{u}}_b = -\frac{1}{\omega^2} \ddot{\mathbf{u}}_b \quad (8)$$

将虚拟地面位移激励 \bar{u}_b 作为 y_b 代入方程(3), 可得:

$$\bar{u}_s = \mathbf{R}\bar{u}_b \quad (9)$$

求解式(9)的稳态解可得虚拟拟静位移 \bar{u}_s 。

2.1.2 算法实现 从基于相对运动法的随机振动虚拟激励算法求解过程可以看出,在由式(9)求解虚拟拟静位移的过程中,需提取结构拟静模态矩阵(提取内部节点刚度矩阵求逆生成);在由式(7)求解虚拟动态位移的过程中,需提取结构内部节点质量矩阵及拟静模态矩阵,当结构自由度较大时,提取整体结构质量、刚度矩阵这一过程相当繁琐^[12],所以一般须编制专用求解程序。

2.2 基于绝对位移直接求解法的虚拟激励法

2.2.1 算法原理 由于基于相对运动法的虚拟激励算法在构建虚拟激励的过程中比较繁琐,本文提出一种位移输入模式的绝对位移直接求解的虚拟激励算法,相关原理如下:

将式(8)构造的虚拟位移激励 \bar{u}_b 及由虚拟加速度激励生成的速度激励 $\dot{\bar{u}}_b$ 分别作为 y_b 、 \dot{y}_b 直接代入式(5),可得:

$$\mathbf{M}_{ss}\ddot{\bar{y}}_s + \mathbf{C}_{ss}\dot{\bar{y}}_s + \mathbf{K}_{ss}\bar{y}_s = -\mathbf{C}_{sb}\dot{\bar{u}}_b - \mathbf{K}_{sb}\bar{u}_b \quad (10)$$

求解式(10)即可直接求得虚拟绝对位移响应 \bar{y}_s 。

2.2.2 算法实现 在具有位移输入功能的有限元软件中实现式(10)十分方便,根本不需提取 \mathbf{K}_{sb} 、 \mathbf{C}_{sb} 矩阵,只需释放支座加载方向自由度约束,对支座节点直接施加式(8)构造的虚拟位移激励,在动力分析时,软件会自动由输入虚拟位移生成虚拟速度,当阻尼模型确定后就可自动生成阻尼项 $-\mathbf{C}_{sb}\dot{\bar{u}}_b$,然后按式(10)进行求解。比如在 ANSYS 谐响应分析模块中实现可采用如下命令: D, NODE, Lab, VALUE, VALUE2, 式中 D 为位移加载命令; NODE 支座节点号; Lab 为位移加载方向; VALUE 为虚拟位移激励实部; VALUE2 为虚拟位移激励虚部。

3 误差分析

在位移输入模式中, Wilson、Hsiang-Chuan 认为^[14-15]:由于激励是以广义集中力形式作用在与基础紧邻的节点上,因此,将激发出很多高频率振型,而且需要大量的高阶振型才能达到需要的计算精度。由于需要大量的高阶振型才能达到需要的计算精度,这时采用振型分解法来求解也失去了应用意义,因此,计算阻尼模型一般不采用模态阻尼,而多采用瑞利阻尼,下面分析采用瑞利阻尼时 2 种算法可能引起的误差。

3.1 瑞利阻尼模型下阻尼误差项 $-\mathbf{C}_{ss}\dot{u}_s$ 、 $-\mathbf{C}_{sb}\dot{y}_b$ 的表现形式

当采用瑞利阻尼时,阻尼误差项 $-\mathbf{C}_{ss}\dot{u}_s$ 可表示为:

$$-\mathbf{C}_{ss}\dot{u}_s = -\alpha\mathbf{M}_{ss}\dot{u}_s - \beta\mathbf{K}_{ss}\dot{u}_s \quad (11)$$

将式(3)代入式(11),并注意到 $\mathbf{R} = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sb}$, 可得:

$$-\mathbf{C}_{ss}\dot{u}_s = -\alpha\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}\dot{y}_b + \beta\mathbf{K}_{sb}\dot{y}_b \quad (12)$$

当采用集中质量矩阵时,阻尼误差项 $-\mathbf{C}_{sb}\dot{y}_b$ 可表示为:

$$-\mathbf{C}_{sb}\dot{y}_b = -\beta\mathbf{K}_{sb}\dot{y}_b \quad (13)$$

从式(12)、式(13)可以看出,由于 $-\mathbf{C}_{ss}\dot{u}_s$ 中的 $\beta\mathbf{K}_{sb}\dot{y}_b$ 和 $-\mathbf{C}_{sb}\dot{y}_b$ 中的 $-\beta\mathbf{K}_{sb}\dot{y}_b$ 2 项对消,所以支座位移输入模式的绝对位移直接求解法没有 β 阻尼项误差,只有 α 阻尼项误差 $-\alpha\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}\dot{y}_b$ 。

现关键问题是分析 $-\alpha\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}\dot{y}_b$ 阻尼误差项对结构动力响应的影响,也即 $-\alpha\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}\dot{y}_b$ 阻尼误差项引起的结构动力响应与惯性力项 $-\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}\ddot{y}_b$ 所引起的结构动力响应之间的相对大小。

3.2 随机振动误差分析

如直接从式(4)、式(5)出发,从理论上去推导 2 种算法之间的计算结果误差很麻烦,可以换一种思维方式来分析:绝对位移直接求解法与相对运动法之间的差别就在于阻尼模型的不同,惯性力项 $-\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}\ddot{u}_b$ 作用下的结构动态位移,即为相对运动法下的结构虚拟动态位移,惯性力项 $-\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}\ddot{u}_b$ 和阻尼误差项 $-\alpha\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}\dot{u}_b$ 共同作用下的结构动态位移,即为绝对位移直接求解法下的结构虚拟动态位移,两者之间的比值即可反应误差大小。

先求解惯性力项 $-\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}\ddot{u}_b$ 作用下的虚拟动态位移,将虚拟动态位移 \bar{u}_d 写成如下形式:

$$\bar{u}_d = \sum_{j=1}^q \{\varphi_j\} x_j(t) = [\varphi] \{x(t)\} \quad (14)$$

式中, $[\varphi]$ 为振型向量, $\{x(t)\}$ 为振型坐标向量,也叫广义坐标向量。

将式(14)代入式(7),并将 $[\varphi]^T$ 左乘公式各项,则式(7)可写为:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{x}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{x}} + \bar{\mathbf{K}}\bar{x} = -[\varphi]^T \mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}_{sb}\ddot{\bar{u}}_b \quad (15)$$

式中, $\bar{\mathbf{M}}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}$ 、 $\bar{\mathbf{K}}$ 分别为广义质量、阻尼及刚度矩阵,由于瑞利阻尼矩阵为比例阻尼矩阵,式(15)可分解为多个互相独立的方程,每一个方程都具有和单自由度系统运动方程相同的方程形式:

$$\ddot{\bar{x}}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{\bar{x}}_j + \omega_j^2\bar{x}_j = \frac{\{\varphi_j\}^T \mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}_{sb}}{M}\ddot{\bar{u}}_b = -\sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}\ddot{u}_i \quad (16)$$

式中, Γ_{lj} 为第 j 个振型在第 l 个支座激励作用时的振型参与系数, 将式(6)代入式(16), 可得:

$$\ddot{\tilde{x}}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{\tilde{x}}_j + \omega_j^2\tilde{x}_j = -\sqrt{S_{FF}(\omega)}\sum_{l=1}^n\Gamma_{lj}e^{i\omega(t-t_l)} \quad (17)$$

式(17)为第 j 个非耦联方程在 n 个不同支座激励下的结构动力响应方程。

式(17)是单自由度简谐振动方程, 其稳态解为:

$$\tilde{x}_j = -\frac{\sqrt{S_{FF}(\omega)}}{[(1-r^2) + 2\xi_j i]\omega_j^2}\sum_{l=1}^n\Gamma_{lj}e^{i\omega(t-t_l)} \quad (18)$$

式中, $r = \frac{\omega}{\omega_j}$ 。

下面分析阻尼误差项 $-\alpha\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}\dot{\mathbf{u}}_b$ 作用下的结构虚拟动态位移, 相应的动力响应方程可表示为:

$$\ddot{\tilde{z}}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{\tilde{z}}_j + \omega_j^2\tilde{z}_j = -\sum_{l=1}^n\alpha\Gamma_{lj}\dot{\mathbf{u}}_l \quad (19)$$

相应的虚拟激励方程式为:

$$\ddot{\tilde{z}}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{\tilde{z}}_j + \omega_j^2\tilde{z}_j = -\frac{\alpha}{i\omega}\sqrt{S_{FF}(\omega)}\sum_{l=1}^n\Gamma_{lj}e^{i\omega(t-t_l)} \quad (20)$$

式(20)的稳态解为:

$$\tilde{z}_j = -\frac{\alpha\sqrt{S_{FF}(\omega)}}{\omega_j^2[(1-r^2)i - 2\xi_j]} \sum_{l=1}^n\Gamma_{lj}e^{i\omega(t-t_l)} \quad (21)$$

\tilde{x}_j 即为相对运动法下的结构虚拟动态位移振型坐标向量, $\tilde{x}_j + \tilde{z}_j$ 为惯性力项和阻尼误差项共同作用下的虚拟动态位移振型坐标向量(因为稳态响应计算属弹性分析范畴, 可采用叠加原理), 即绝对位移直接求解法下的结构虚拟动态位移振型坐标向量。

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j + \tilde{z}_j &= -\frac{\sqrt{S_{FF}(\omega)}}{\omega_j^2[(1-r^2) + 2\xi_j i]}\sum_{l=1}^n\Gamma_{lj}e^{i\omega(t-t_l)} - \\ &\frac{\alpha\sqrt{S_{FF}(\omega)}}{\omega_j^2[(1-r^2)i - 2\xi_j]}\sum_{l=1}^n\Gamma_{lj}e^{i\omega(t-t_l)} \\ &= -\frac{1 - (\alpha/\omega)i}{(1-r^2) + 2\xi_j i} \times \frac{\sqrt{S_{FF}(\omega)}}{\omega_j^2}\sum_{l=1}^n\Gamma_{lj}e^{i\omega(t-t_l)} \quad (22) \end{aligned}$$

令相对运动法下结构虚拟动态位移为 \tilde{u}_{d1} , 绝对位移直接求解法作用下结构虚拟动态位移为 \tilde{u}_{d2} , 则:

$$\tilde{u}_{d1} = \sum_{j=1}^q\{\varphi_j\}x_j \quad (23)$$

$$\tilde{u}_{d2} = \sum_{j=1}^q\{\varphi_j\}x_j + \sum_{j=1}^q\{\varphi_j\}z_j = \sum_{j=1}^q\{\varphi_j\}(x_j + z_j) \quad (24)$$

2种算法下结构虚拟动态位移响应幅值比为:

$$\frac{|\tilde{u}_{d2}|}{|\tilde{u}_{d1}|} = \sqrt{(1 + (\alpha/\omega)^2)} \quad (25)$$

相应的动态位移响应功率谱密度相对误差为:

$$\frac{S_{u_{d2}} - S_{u_{d1}}}{S_{u_{d1}}} = (\alpha/\omega)^2 \quad (26)$$

当采用瑞利阻尼时, 瑞利阻尼系数 α 、 β 可按第 i 阶、第 j 阶自振圆频率确定, 当各阶模态阻尼比 ξ 相等时, α 、 β 可按下式计算:

$$\alpha = \frac{2\xi\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j}; \beta = \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j} \quad (27)$$

当瑞利阻尼系数 α 、 β 由第 1 阶、第 2 阶自振圆频率确定时, 将 α 阻尼系数代入方程(26), 可得:

$$\frac{S_{u_{d2}} - S_{u_{d1}}}{S_{u_{d1}}} = \left[\frac{2\xi\omega_1\omega_2}{\omega(\omega_1 + \omega_2)} \right]^2 \quad (28)$$

由于 $\omega_1 < \omega_2$, 所以 $\omega_2/(\omega_1 + \omega_2) \in (0.5, 1)$, 现分析 $2\xi\omega_1/\omega$ 项对误差的影响, 可从中得出 2 点结论:

1) 阻尼比 ξ 越大, 2 种算法由于阻尼假定项不同所引起的功率谱密度误差越大。

2) 假定 $\omega = \omega_1$ 时的误差为基准相对误差, 基准相对误差表达式为 $[2\xi\omega_2/(\omega_1 + \omega_2)]^2$, 当激励频率 ω 大于 ω_1 时, 频率比 ω_1/ω 对基准相对误差起缩小作用, 且 ω 越大, 误差越小; 当激励频率 ω 小于 ω_1 时, 频率比 ω_1/ω 对基准相对误差起放大作用, 且 ω 越小, 误差越大。

从随机振动虚拟激励求解过程来看, 其实质是以一系列离散频率点为激励频率分别构造虚拟谐波激励, 连接各个离散激励频率点下的结构响应, 便可得出响应的功率谱密度曲线。从误差分析角度来说, 如果地震激动输入功率谱采用单位白噪声, 则 2 种算法下的响应功率谱曲线则可反应出在不同的激励频率情况下, 2 种求解方法计算结果之间的误差, 这有助于得出 2 种求解方法计算结果之间的误差与激励频率及阻尼之间的一般关系, 且所得结果具有普遍性。

上面分析了 2 种算法在单一激励频率作用下结构动态响应功率谱密度误差, 然而, 实际地震动频率非常丰富, 不可能是单一频率, 且各个频率点上的谱强度不相同, 所以不能通过某个单一的激励频率点的功率谱密度误差去估计实际地震动作用下 2 种算法计算结果误差, 而必须从概率统计意义上估计, 这就需要从结构响应方差或响应极大值均值去估计 2 种算法的误差^[9], 响应方差表达式为 $\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega)d\omega$, 物理意义就是响应的功率谱密度曲线与频率轴线所围成的面积。

4 算例论证

上面从理论角度, 较为详细地分析了多点激励

下相对运动法与绝对位移直接求解法之间的计算结果误差,下面进行多点激励算例数值论证。

结构模型取一多跨刚构桥(图1),几何尺寸为15 m+20 m+20 m+15 m,采用ANSYS建模,桥墩及桥梁均采用Beam3梁单元。结构前二阶自振频率分别为0.80 Hz、2.73 Hz,阻尼模型采用瑞利阻尼,瑞利阻尼系数按式(27)得出。

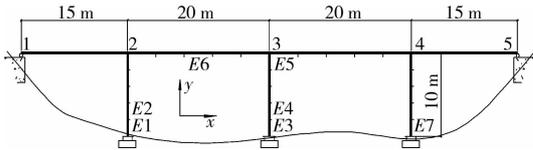
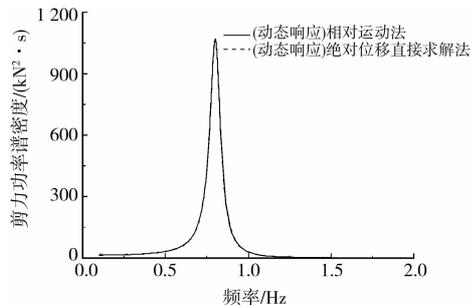


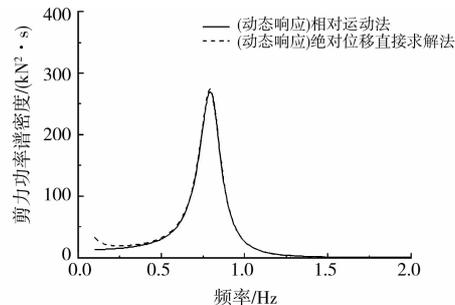
图1 多跨刚构桥模型

1) 白噪声激励

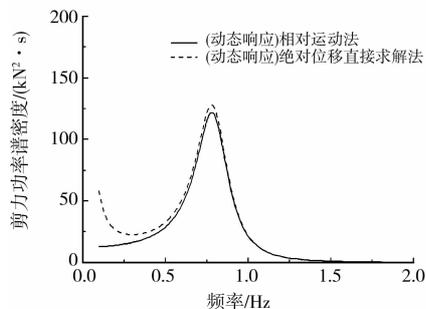
为了验证前面的误差理论分析,采用有限带宽



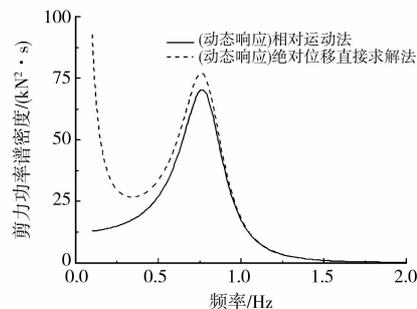
(a) E1单元动态剪力响应功率谱($\xi=5\%$)



(b) E1单元动态剪力响应功率谱($\xi=10\%$)



(c) E1单元动态剪力响应功率谱($\xi=15\%$)



(d) E1单元动态剪力响应功率谱($\xi=20\%$)

图2 白噪声激励下E1单元动态剪力响应功率谱密度对比

由式(28)的理论分析可以得出,在阻尼比为20%工况下,当激励频率 $\omega = \omega_1$ 时,2种算法下动态剪力响应功率谱相对误差为9.56%;当激励频率为0.1 Hz时,动态剪力响应功率谱相对误差为612%,从图2(d)数值算例计算结果可以得出:当激励频率 $\omega = \omega_1$ 时,2种算法下动态剪力响应功率谱相对误差为9.2%;当激励频率为0.1 Hz时,动态剪力响应功率谱相对误差为616%,与理论分析结果基本一致。

2) Clough地震功率谱模型激励

由于单位白噪声夸大了地震动低频能量,而实

际地震动在频率为零时谱强度为零,然后逐渐增大,当频率接近场地的卓越频率时,谱强度达到最大值,然后随着频率变大强度逐渐减小,所以采用单位白噪声激励去评估2种算法下结构地震响应方差误差是不合适的,必须采用与真实地震动相符的地震动模型。

采用文献[16]建议的基于新抗震规范的Clough地震功率谱模型再次进行行波地震激励分析,视波速及阻尼比取值同前,2种算法下的结构主要部位动态内力、位移响应方差相对误差见表1。

表 1 2 种算法下结构动态内力、位移响应方差相对误差/%

阻尼比	弯矩			剪力			位移
	E1	E5	E6	E1	E5	E6	3 号节点
5	0.51	0.53	0.57	0.5	0.53	0.59	0.58
10	2.0	2.12	2.2	2.0	2.17	2.15	2.23
15	5.6	5.3	5.3	5.5	5.4	5.45	5.20
20	11.6	11.5	11.9	11.2	11.7	11.5	10.8

在小阻尼比的情况下,可采用基准相对误差 $[2\xi\omega_2/(\omega_1 + \omega_2)]^2$ 来近似估计结构动态响应方差,因为当结构阻尼比较低时,结构响应功率谱曲线一般为窄带曲线,响应方差的主要贡献来自以结构前几阶自振频率为中心的一段很窄的频率区间,在以 ω_1 为中心的很窄频率区间, ω_1/ω 接近于 1,所以频率比项 ω_1/ω 的影响很小;当 $\omega \ll \omega_1$ 时,这时虽然频率比项影响相对较大,但由于该频率段区间结构响应功率谱绝对量值一般很小,所以对结构动态响应方差的影响还是很小;当 $\omega \gg \omega_1$ 时,频率比项对基准相对误差起缩小作用,这有可能造成结构响应方

差相对误差小于基准相对误差,比如当结构响应方差贡献主要来自某高阶振型时。当然在大阻尼的情况下,近似采用基准相对误差去估计结构响应方差最大误差就可能偏于不安全。

在阻尼比分别为 5%、10%、15%、20% 的情况下,本算例由式 $[2\xi\omega_2/(\omega_1 + \omega_2)]^2$ 计算出来的响应方差相对误差分别为 0.59%、2.39%、5.4%、9.56%,数值算例中 E1、E5、E6 及 3 号节点的动态弯矩、剪力及位移响应方差相对误差见表 1,从计算结果可以看出,在小阻尼比工况下,理论分析与数值算例结果还是很接近,在阻尼比为 20% 工况下,理论结果略小于数值算例结果,这主要是因为在大阻尼比情况下,结构响应不是窄带响应。

下面给出 E1 单元动态剪力响应、总剪力响应功率谱密度对比(图 3),从图 3 可以看出,在 Clough 地震动模型激励下,同样是随着阻尼比的增大,2 种算法下结构总剪力响应、动态剪力响应功率谱密度误差越来越大。

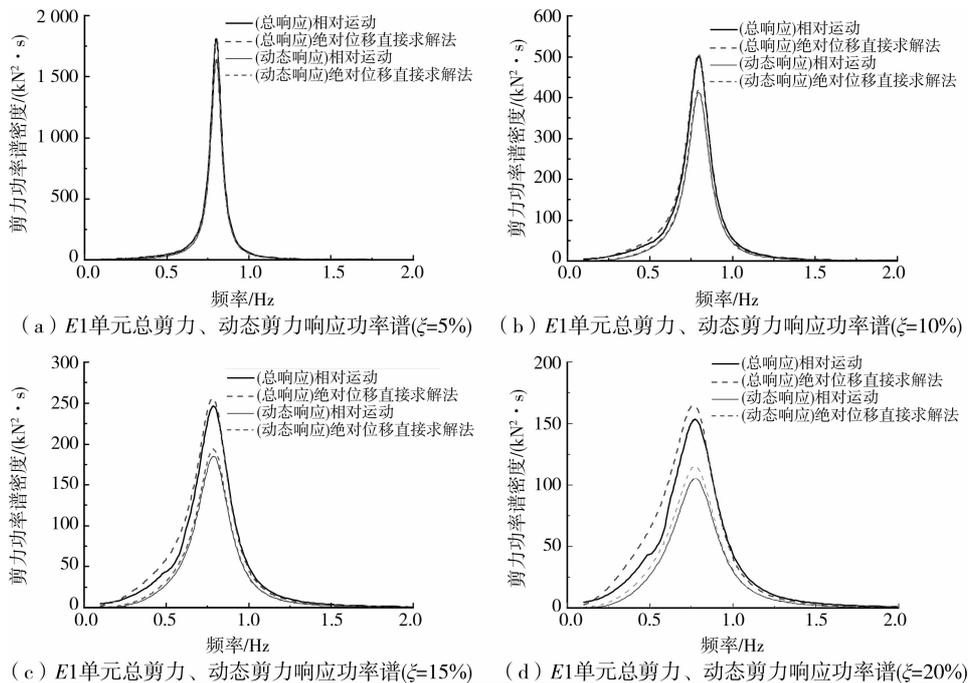


图 3 Clough 地震动模型激励下 E1 单元总剪力、动态剪力响应功率谱密度对比

结构总响应方差包括拟静力部分、动态部分及两者间的协方差部分,从虚拟激励计算过程可看出^[9],2 种算法下虚拟动态位移响应的误差也会引起协方差误差,但由于协方差占总响应方差的比例一般很小^[17],所以可近似认为 2 种算法下协方差误差对结构总响应方差误差影响不会很大。从图 3 可以得出,在 4 种阻尼比工况下,2 种算法下 E1 单元总剪力响应方差相对误差分别为 0.9%、2.6%、

7.1%、12.7%,从算例来看,E1 单元总剪力响应方差相对误差与动态剪力响应方差相对误差还是比较接近。

5 结 论

采用随机振动分析方法,对由于阻尼假定的不同,相对运动法和绝对位移直接求解法之间可能引起的计算结果误差进行了分析,得出如下结论:

1) 2种算法下结构动态响应功率谱密度误差主要受结构阻尼比、激励频率与结构基频比值 ω/ω_1 影响。阻尼比越大,功率谱密度误差就越大; ω/ω_1 比值越大,功率谱密度误差就越小。

2) 2种算法下结构响应方差误差与结构的阻尼比成正比关系,阻尼比越低,误差越小。从理论分析和算例结果来看,当结构阻尼比不大于5%时,2种算法所引起的结构响应方差误差很小,基本可忽略。

参考文献:

- [1] 刘文华. 大跨复杂结构在多点地震动激励作用下的非线性反应分析[D]. 北京: 北京交通大学, 2008.
- [2] 谢开仲, 秦荣, 韦立林, 等. 大跨度CFST拱桥行波效应的地震反应分析[J]. 桂林工学院学报, 2005, 25(4): 455-459.
- XIE KAI-ZHONG, QIN RONG, WEI LI-LIN, et al. Seismic response analysis of long span CFST arch bridge under the action of traveling waves[J]. Journal of Guilin University of Technology, 2005, 25(4): 455-459.
- [3] LOU L, ZERVA A. Effects of spatially variable ground motions on the seismic response of a skewed, multi-span, RC highway bridge[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2005, 25(7): 729-740.
- [4] 杨庆山, 刘文华, 田玉基. 国家体育场在多点激励作用下的地震反应分析[J]. 土木工程学报, 2008, 41(2): 35-41.
- YANG QING-SHAN, LIU WEN-HUA, TIAN YU-JI. Response analysis of National Stadium under specially variable earthquake ground motions[J]. China Civil Engineering Journal, 2008, 41(2): 35-41.
- [5] 刘枫, 肖从真, 徐自国, 等. 首都机场3号航站楼多维多点输入时程地震反应分析[J]. 建筑结构学报, 2006, 27(5): 56-63.
- LIU FENG, XIAO CONG-ZHEN, XU ZI-GUO, et al. Time-history analysis of terminal 3 of the Capital Airport under multi-support and multi-dimension seismic excitation[J]. Journal of Building Structures, 2006, 27(5): 56-63.
- [6] 黄明开. 非一致激励下大跨空间结构地震反应分析[D]. 上海: 同济大学, 2009.
- [7] 赵灿晖, 周志祥. 大跨度钢管混凝土拱桥非线性地震响应分析[J]. 重庆建筑大学学报, 2006, 28(2): 47-51.
- ZHAO CAN-HUI, ZHOU ZHI-XIANG. Nonlinear seismic response analysis of long-span CFST arch bridge[J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2006, 28(2): 47-51.
- [8] 中华人民共和国交通运输部. JTG/T B02-01-2008公路桥梁抗震设计细则[S]. 北京: 人民交通出版社, 2008.
- [9] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [10] 徐培福, 傅学怡, 王翠坤, 等. 复杂高层建筑结构设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005.
- [11] ZHANG Y H, LI Q S, LIN J H, et al. Random vibration analysis of long-span structures subjected to spatially varying ground motions[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2009, 29(4): 620-629.
- [12] 李永华, 李思明. 绝对位移直接求解的虚拟激励法[J]. 振动与冲击, 2009, 28(10): 185-190.
- LI YONG-HUA, LI SI-MING. Pseudo excitation method based on solving absolute displacement [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(10): 185-190.
- [13] 胡聿贤. 地震工程学[M]. 2版. 北京: 地震出版社, 2006.
- [14] WILSON E L. Static and dynamic analysis of structures; A physical approach with emphasis on earthquake engineering [M]. Berkley, California; Computers and Structures Inc, 2004.
- [15] HSIANG-CHUAN TSAI. Modal superposition method for dynamic analysis of structures excited by prescribed support displacements[J]. Computers and Structures, 1998, 66(5): 675-683.
- [16] 薛素铎, 王雪生, 曹资. 基于新抗震规范的地震动随机模型参数研究[J]. 土木工程学报, 2003, 36(5): 5-10.
- XUE SU-DUO, WANG XUE-SHENG, CAO ZI. Parameters study on seismic random model based on the new seismic code[J]. China Civil Engineering Journal, 2003, 36(5): 5-10.
- [17] SEVKET ATES, AYDIN DUMANOGLU A, ALEMDAR BAYRAKTAR. Stochastic response of seismically isolated highway bridges with friction pendulum systems to spatially varying earthquake ground motion [J]. Engineering Structures, 2005, 27(13): 1843-1858.

(编辑 胡英奎)