

FRP 约束混凝土柱轴心受压应力-应变模型

王 伟¹, 许顺德^{1,2}, 周爱兆³, 张 芳¹

(1. 绍兴文理学院 土木工程系, 浙江 绍兴 312000; 2. 广东工业大学 土木交通学院, 广州 510006;
3. 江苏科技大学 土木工程与建筑学院, 江苏 镇江 212003)

摘 要: FRP 约束混凝土的应力-应变曲线模型是土木工程的一个重要课题。结合第 1 段斜率、转折点坐标、第 3 段斜率等数学特征分析了应力-应变曲线的发展过程, 指出理想模型需满足的条件, 并指出传统模型的不足。提出了一个复合指数-直线模型, 该模型对强化型和软化型曲线都适用, 满足理想模型条件, 克服了传统模型的缺陷。给出了模型参数的求解思路。对比分析表明新模型拟合结果与实测数据吻合良好, 具有广泛的适用性。

关键词: FRP; 约束混凝土; 应力-应变; 数学模型

中图分类号: TU375.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2012)01-0017-04

Stress-Strain Model of FRP-Confined Concrete Column under Axial Compression

WANG Wei¹, XU Shun-de^{1,2}, ZHOU Ai-zhao³, ZHANG Fang¹

(1. Department of Civil Engineering, Shaoxing University, Shaoxing 312000, Zhejiang, P. R. China; 2. School of Civil Engineering and Transportation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, P. R. China; 3. School of Civil Engineering and Architecture, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, Jiangsu, P. R. China)

Abstract: Stress-strain mathematical model of FRP-confined concrete plays an important role in civil engineering, and it should be well understood. Based on first region slope, turning point coordinate and third region slope, the development of stress-strain curve of FRP-confined concrete column is analyzed, and conditions which ideal mathematical model need to meet are point out. A new composite exponent-line model is proposed, which overcomes the weakness of conventional model and is available for both hardening and softening type stress-strain curves. Approaches to determine parameters of the proposed model are presented. Finally, the capability and accuracy of the proposed model in predicting the complete stress-strain process of FRP-confined concrete under axial compression are demonstrated through comparisons between predictions of the proposed model and test results.

Key words: FRP; confined concrete; stress-strain; mathematical model

纤维增强复合材料(FRP)具有高强、轻质、耐腐蚀和施工方便等优点,近年来已引起工程界的广泛关注并在实际工程中开始得到应用,尤其在柱的抗震加固方面^[1-4]。在 FRP 加固柱的设计中,一个关键的问题是如何确定可靠的 FRP 约束混凝土的应

力-应变($\sigma-\epsilon$)关系^[5-7]。为此,一些学者开展了一系列的研究^[8-9]。

目前学者们针对 FRP 约束混凝土柱的研究已取得了丰硕成果,提出了许多 FRP 约束混凝土柱的应力-应变模型。这些模型中绝大多数都是强化模

收稿日期:2011-05-20

基金项目:江苏教育厅自然科学基金(08KJB130001);江苏省国土资源厅自然科学基金(2009D15)

作者简介:王 伟(1977-),男,博士,副教授,主要从事土的基本性质、土与结构共同作用研究,(E-mail)wellsking.wang@gmail.com。

型,只能用于强约束的情况,而在实际工程中应力-应变曲线经常会出现软化段。例如加固矩形混凝土柱中,破坏通常表现为角部 FRP 拉断,应力-应变曲线容易出现下降段^[10-11],在桥墩中柱截面尺寸往往很大,外包 FRP 量受到各种因素的限制不可能很多,其应力-应变曲线往往是有软化段的^[8]。因此现有的强化模型不能满足实际工程需要。现有研究中仅有少数学者提出了适用于有软化段的模型,如文献[10]和文献[11]各提出了一个分段式模型,模型采取了曲线与直线相连接的方式,但在转折点处没有采用光滑连接,这与实测曲线不符。已有的模型绝大多数都为分段式模型,这也造成了拟合上的困难。鉴于此,很有必要对 FRP 约束混凝土柱的应力-应变曲线进行深入研究。

本文结合 FRP 约束混凝土的试验实测应力-应变全曲线与曲线控制量,分析了应力-应变曲线发展的全程。在此基础上从曲线的数学性质出发,考虑了曲线各段的控制量,提出了一个整体式的应力-应变指数模型,该模型即可用于强化型也可用于软化型,具有广泛适用性。

1 FRP 约束混凝土应力-应变曲线发展全过程

大量实验结果表明 FRP 约束混凝土柱的应力-应变曲线呈双直线型,如图 1 所示。从图中可知全过程曲线可分为 3 个阶段,第 1 阶段(*Oa*)为弹性阶段,曲线基本呈线性关系;第 2 阶段(*ab* 或 *ac*)为弹塑性阶段;第 3 阶段(*bd* 或 *ce*)为弹性阶段,约束弱时呈现软化型即 *ce* 段,约束强时呈现强化型即 *bd* 段。

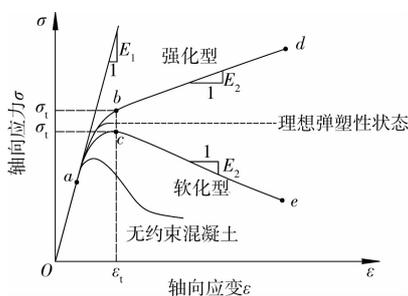


图 1 FRP 约束混凝土典型应力-应变关系曲线

弹性阶段(*oa*):应力-应变大致成线性关系。在此段,由于素混凝土的应力-应变呈线性关系,在线性段时,混凝土侧向应变小使得 FRP 约束材料的强度未能充分发挥,因此 FRP 约束混凝土柱的 *oa* 段可近似等同于素混凝土的工作,弹性阶段斜率主要取决于混凝土的弹性模量 E_c 。

弹塑性阶段(*ab* 或 *ac*):混凝土裂缝迅速发展,混凝土侧向应变迅速增大。FRP 约束材料与混凝土侧向应变相同,FRP 材料的约束作用明显增大。在混凝土与 FRP 约束材料的共同作用下,此段呈曲线上升。定义转折点(ϵ_i, σ_i)为第 2 段向第 3 段过渡的点,转折点应变值 ϵ_i 和取应力值 σ_i 取决于混凝土与 FRP 的共同作用。

弹性阶段(*bd* 或 *ce*):FRP 材料充分发挥约束作用,约束力随 FRP 应变增加而线性增大直至 FRP 材料破坏。随 FRP 约束刚度和 FRP 强度的不同第 3 阶段可呈软化型或强化型,其斜率也随之变化。强约束时,混凝土的侧向变形受到的有效约束,由于 FRP 的应力-应变呈线性增长直至破坏,此段再次呈现线性强化状。破坏时,最大应力点对应 FRP 断裂,故最大应力值主要与侧向约束强度有关^[13]。弱约束时,混凝土发挥主要作用,破坏过程接近于非约束混凝土,但剩余强度更接近于线性退化^[14]。轴向应力达到峰值时,FRP 未断裂,故峰值应力主要与侧向约束刚度有关^[13]。应力约束由弱到强变化时,此段也由软化逐渐向强化过渡。

由全曲线发展过程可以看出,在轴压作用下,随混凝土强度、FRP 约束刚度及 FRP 强度的变化,其应力-应变曲线呈双直线型且可为强化型和软化型。大量研究表明 FRP 约束混凝土应力-应变曲线中第一段斜率 E_1 、转折点(ϵ_i, σ_i)坐标和第 3 段斜率 E_2 均和混凝土强度、FRP 约束刚度、FRP 强度有良好的回归关系^[11-14]。考虑应力-应变曲线的性质与大量试验数据回归分析的结果,本文采用 E_1 、 ϵ_i 和 E_2 3 个控制量对其进行分析,理想的模型应保证 3 个控制量独立才能反应混凝土强度、FRP 约束刚度和 FRP 强度等因素的影响。

2 传统模型分析

2.1 传统模型

传统模型有使用上的限制。绝大多数都是分段式的,采用一条曲线和一条直线相连接,人为规定了转折点为连接点,且大都为强化型。

Samaan 基于 FRP 管约束混凝土的研究,提出一个以下模型,表达式如下:

$$\sigma = \frac{(E_1 - E_2)\epsilon}{[1 + (\frac{E_1 - E_2}{f_0}\epsilon)^n]^{1/n}} + E_2\epsilon \quad (1)$$

其中: $n = 1.5$; E_1 、 E_2 、 f_0 为待定参数。

金熙男^[7]等根据不同纤维包裹的短柱轴压试验结果提出了一个分段式模型,表达式如下:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{A + B\varepsilon + C\varepsilon^2} \quad (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t) \quad (2)$$

$$\sigma = \sigma_t + E_2(\varepsilon - \varepsilon_t) \quad (\varepsilon_t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu}) \quad (3)$$

其中: A 、 B 、 C 为待定参数; 转折点 $\varepsilon = \varepsilon_t$ 处边界条件为: 强化型 $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E_2$, 软化型 $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = 0$ 。

2.2 缺陷分析

分析以上传统模型知, Samaan 提出的模型只能表示强约束时的强化模型。金熙男模型为分段式的由一曲线和直线相接组成。在表示强化关系时, 转折点处斜率为 E_2 , 曲线与直线为光滑连接。表示软化关系时, 没有考虑各种复杂因素的影响, 人为地规定在曲线导数为 0 处相连, 这导致了曲线与直线为非光滑连接, 与实际不符, 软化段离散性较大。而将曲线与直线连接成整体分析, 其在转折点 $(\varepsilon_t, \sigma_t)$ 导数不存在, 又与它边界条件相矛盾。综合以上分析可知传统模型存在缺陷, 或只能模拟强化型, 或 3 个控制量不独立, 需分段拟合, 不能反映实际应力-应变曲线变化, 适用性受到限制。

3 复合指数模型

为了克服传统模型的不足, 笔者建议采用一复合指数模型来表达 FRP 约束混凝土应力-应变曲线, 表达式如下

$$\sigma = a(1 - e^{-k\varepsilon}) + c\varepsilon \quad (4)$$

其中 a 、 b 、 c 为 3 个待定参数, 且 $a > 0$ 、 $b > 0$ 。

3.1 模型性质

对(4)式求一阶导数可得

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = abe^{-k\varepsilon} + c \quad (5)$$

参数 $c < 0$ 时, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} < 0$ 模型为软化型; 参数

$c > 0$ 时, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} > 0$ 模型为强化型; 参数 $c = 0$ 时,

$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$, 模型为理想弹塑性状态。

取 E_1 、 ε_t 、 E_2 为控制量, 式(4)中的参数 a 、 b 、 c 需满足以下边界条件:

1) 曲线过 $(0, 0)$ 点;

2) $\varepsilon = 0_t$ 时, $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_1$;

3) $\varepsilon = \varepsilon_t$ 时, $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_2$;

4) 曲线过 $(\varepsilon_t, \sigma_t)$ 点。

其中 1) 自动满足, 将边界条件 2)、3)、4) 式代入式(5)得

$$\begin{cases} E_1 = ab + c \\ E_2 = abe^{-k\varepsilon_t} + c \\ \sigma_t = a(1 - e^{-k\varepsilon_t}) + c\varepsilon_t \end{cases} \quad (6)$$

由式(6)可求出参数 a 、 b 、 c 的值, 3 个方程解出 3 个参数, 分析知 3 个控制量相互独立, 随控制参数的变化可以分别表示强化和软化模型。模型为整体式的, 转折点实现光滑连接, 转折点坐标可在复杂因素的影响下动态修正。

由以上分析可知, 随着控制参数的变化, 模型既可以模拟软化型应力-应变曲线又可以模拟强化型应力-应变曲线。这就使模型具有广泛的适用性。图 2 为参数 a 和 b 固定时, 模型随 c 的变化示意图。从图中可以看出, 随着参数 c 的变化, 曲线从软化型过渡到强化型, 曲线的双直线性明显。模型可以考虑复杂因素的影响, 动态修正转折点坐标。

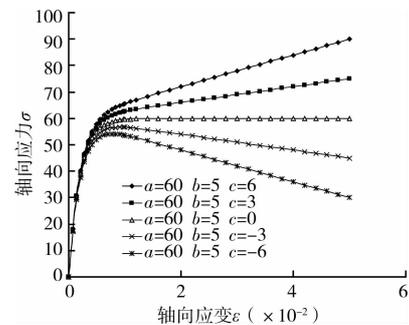


图 2 指数适用性示意图

3.2 参数求解

指数模型中有 3 个参数, 为了较好的应用, 必需建立模型参数的确定方法。设有 n 组观测样本 $(\varepsilon_1, \sigma_1)$ 、 $(\varepsilon_2, \sigma_2)$ 、 \dots 、 $(\varepsilon_i, \sigma_i)$ 、 \dots 、 $(\varepsilon_n, \sigma_n)$, 需要根据这些样本确定模型的待定参数。根据最小二乘原理求解, 预测样本 $\sigma_{(i)}$ 与观测样本 σ_i 之间的误差平方和 Q 最小, 即:

$$Q = \sum_{i=1}^n (\sigma_{(i)} - \sigma_i)^2 = \min \quad (7)$$

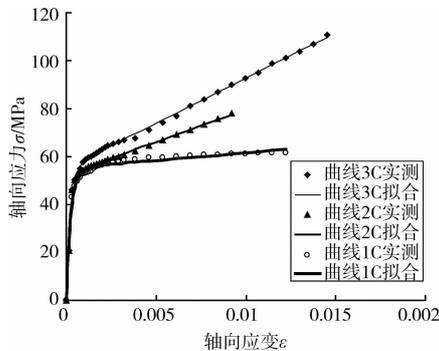
基于此基本思想, 可以通过对(7)式求偏导数进行求解, 但工作量较大; 由于目前如 Fortran、Matlab 等数学软件已比较成熟, 笔者在使用过程中采用 Fortran 软件进行最小二乘求解, 并进行动态修正。

求解过程中可参考文献[10-12]通过回归分析得到 E_1 、 $(\varepsilon_t, \sigma_t)$ 坐标和 E_2 的值, 代入方程(6)求解可得到 3 个参数的初值 (a_0, b_0, c_0) , 确定参数初值后, 便可通过软件程序寻找参数最优解。

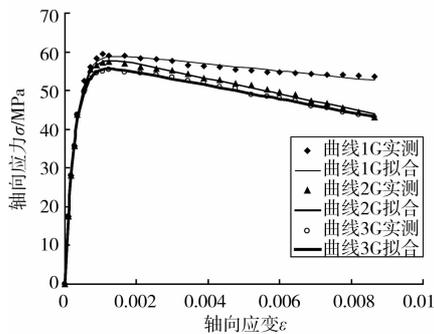
3.3 模型验证

为验证模型的精度, 对笔者收集到的部分 FRP 约束混凝土轴心受压应力-应变实测曲线进行了拟

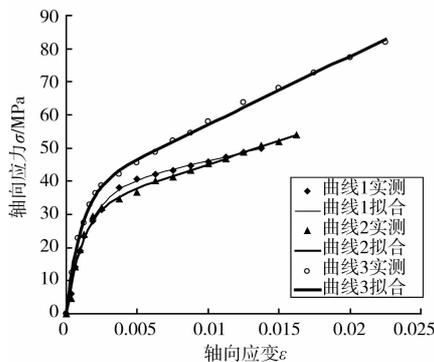
合。从文献[11]选取了 6 条应力-应变曲线,其中 3 条强化型、3 条软化型;从文献[15]选了 3 条强化型曲线,将本文模型与其试验曲线拟合结果如图 3 所示。从图中可以看出本文模型与实测应力-应变曲线拟合结果很好。



(a) 与文献 [11] 实测强化曲线拟合



(b) 与文献 [11] 实测软化曲线拟合



(c) 与文献 [15] 实测强化曲线拟合

图 3 指数模型与实测数据拟合

4 结论

分析了 FRP 约束混凝土应力-应变全曲线的发展过程,并提出了理想模型需满足的条件。指出了传统模型的使用限制,并建立了一个整体式的 FRP 约束混凝土应力-应变指数模型,可得以下结论:

1) 理想模型为双直线式,且需能模拟强化型和软化型曲线,3 个控制参数相互独立。

2) 传统 FRP 约束混凝土应力-应变模型存在诸多缺陷,如需分段拟合,或控制量不独立,非光滑连

接不能反映实际曲线等,应用范围受到限制。

3) 提出了一个 FRP 约束混凝土的应力-应变指数模型,分析表明指数能很好反应曲线性质,对强化型和软化型曲线都适用,具有广泛的适用性。对比分析表明指数模型拟合结果与实测数据吻合良好。

参考文献:

- [1] WU G, WU Z S, LU Z T. Design-oriented stress-strain model for concrete prisms confined with FRP composites[J]. Construction and Building Materials, 2007, 21 (5): 1107-1121.
- [2] DE LUCA ANTONIO, NARDONE FABIO, MATTIA FABIO, et al. Structural evaluation of full-scale FRP-confined reinforced concrete columns[J]. Journal of Composites for Construction, 2011, 15(1): 112-123.
- [3] DONGSHENG G U, GANG WU, ZHISHEN WU, et al. Confinement effectiveness of FRP in retrofitting circular concrete columns under simulated seismic load[J]. Journal of Composites for Construction, 2010, 14 (5): 531-540.
- [4] 王震宇, 王代玉, 吕大刚. FRP 约束混凝土圆柱应力-应变分析模型[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2010, 42 (2): 200-206.
WANG ZHEN-YU, WANG DAI-YU, LÜ DA-GANG. Stress-strain analytical model for FRP-confined concrete circular column[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2010, 42 (2): 200-206.
- [5] WANG HUAN-ZI, BELARBI ABDELJELIL. Ductility characteristics of fiber-reinforced-concrete beams reinforced with FRP rebars[J]. Construction and Building Materials, 2011, 25(5): 2391-2401.
- [6] LAM L, TENG J G. Stress-strain model for FRP-confined concrete under cyclic axial compression[J]. Engineering Structures, 2009, 31(2): 308-321.
- [7] 顾冬生, 吴刚, 吴智深, 等. FRP 加固钢筋混凝土圆柱侧向变形能力研究[J]. 土木建筑与环境工程, 2011, 33(1): 17-23.
GU DONG-SHENG, WU GANG, WU ZHI-SHEN, et al. Deformation capacity of FRP confined reinforced concrete circular columns under simulated seismic loading[J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2011, 33(1): 17-23.
- [8] LAM L, TENG J G. Stress-strain model for FRP-confined concrete under cyclic axial compression[J]. Engineering Structures, 2009, 31(2): 308-321.
- [9] YAN Z, PANTELIDES C P. Concrete column shape modification with FRP shells and expansive cement concrete[J]. Construction and Building Materials, 2011, 25(1): 396-405.

(下转第 41 页)

- LI XIAO-YAN, WANG ZONG-MING, SONG KAI-SHAN, et al. Establishment of spatial distribution models and grid information system for climate data in Songnen plain[J]. Chinese Journal of Agrometeorology 2007,28(1):76-79.
- [10] 王宗明,宋开山,张柏,等. 东北地区农业气候资源空间分布模型的建立[J]. 中国农学通报, 2007,23(11):351-357.
- WANG ZONG-MING, SONG KAI-SHAN, ZHANG BAI, et al. Establishment of spatial distribution models for agricultural climate resources data in Northeast China[J]. Chinese Agricultural Science Bulletin, 2007, 23(11):351-357.
- [11] 蔡福,于贵瑞,祝青林,等. 气象要素空间化方法精度的比较研究—以平均气温为例[J]. 资源科学, 2005,27(5):173-179.
- CAI FU, YU GUI-RUI, ZHU QING-LIN, et al. Comparison of precisions between spatial method of climate factors: a case study on mean air temperature [J]. Resources Science, 2005,27(5):173-179.
- [12] PENTTALA V. Surface and internal deterioration of concrete due to saline and non-saline freeze-thaw loads [J]. Cement and Concrete Research, 2006,36(5): 921-928.
- [13] LINDVALL A. Modeling of the influence from environmental actions on the durability of reinforced concrete structures [C]//Proceedings of the 2nd International Conference on Concrete Repair, Rehabilitation and Retrofitting, Boca Raton: Crc Press-Taylor & Francis Group, 2009:145-146.
- [14] 李春秋,李克非,陈肇元. 混凝土中水分传输的边界条件研究[J]. 工程力学,2009,26(8):74-81.
- LI CHUN-QIU, LI KE-FEI, CHEN ZHAO-YUAN. On the boundary condition of moisture transport in concrete[J]. Engineering Mechanics, 2009,26(8):74-81.
- [15] CEB-FIP. CEB-FIP model code for concrete structures [S]. Lausanne, Switzerland: Thomas Telford, 1990.

(编辑 胡英奎)

(上接第 20 页)

- [10] 魏洋,吴刚,吴智深,等. FRP 约束混凝土矩形柱有软化段时的应力-应变关系研究[J]. 土木工程学报, 2008, 41(3): 21-28.
- WEI YANG, WU GANG, WU ZHI-SHEN, et al. Study on the stress-strain relationship for insufficient FRP-confined rectangular concrete columns[J]. China Civil Engineering Journal, 2008, 41(3):21-28.
- [11] 金熙男,潘景龙,刘广义. 增强纤维约束混凝土轴压应力-应变关系试验研究[J]. 建筑结构学报, 2003, 24(4): 47-53.
- JIN XI-NAN, PAN JING-LONG, LIU GUANG-YI, et al. Research of stress-strain curve of concrete confined by fiber referenced plastics under axial compression[J]. Journal of Building Structures, 2003, 24(4): 47-53.
- [12] MARWAN N Y, MARIA Q F, AYMAN S M. Stress-strain model for concrete confined by FRP composites [J]. Composites Part B-Engineering, 2007, 38(5/6): 614-628.
- [13] 吴刚,吴智深,吕志涛. FRP 约束混凝土圆柱有软化段时的应力-应变关系研究[J]. 土木工程学报, 2006, 39(11): 7-14.
- WU GANG, WU ZHI-SHEN, LÜ ZHI-TAO. Study of the stress-strain relationship of FRP-confined circular concrete column with a strain-softening response[J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 39(11): 7-14.
- [14] ZHANG DIAN-JIE, WANG YUAN-FENG. Compressive behaviour of FRP-confined square concrete columns after creep[J]. Engineering Structures, 2010, 32(8): 1957-1963.
- [15] 滕锦光,陈建飞,史密斯 S T,等. FRP 加固混凝土结构[M]. 李荣,滕锦光,顾磊. 译. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005.

(编辑 王秀玲)