

# 层状地基中群桩基础弹性理论解法及参数分析

曹明<sup>1,2</sup>, 陈胜立<sup>1</sup>

(1. 上海交通大学安全与防灾工程研究所, 上海 200240; 2. 上海电视大学, 上海 200433)

**摘要:**根据 Muki & Sternberg 的计算方法, 建立了层状地基中不同桩长、桩径、桩体材料情况下桩-桩间的相互作用系数, 利用叠加原理对层状地基中群桩基础进行计算分析, 通过与已有文献计算结果比较, 验证了计算方法的正确性, 并对层状地基中群桩基础的沉降以及各桩的荷载分担情况进行了参数分析。计算方法得到的相互作用系数可以考虑桩的“加筋效应”。能够用来分析大规模群桩基础, 具有一定的工程应用前景。

**关键词:**层状地基; 群桩; 相互作用系数; 荷载分担; 沉降

**中图分类号:** TU470    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1674-4764(2012)02-0001-06

## An Elastic Theory Approach and Parametric Analysis of Pile Group in Layered Soils

CAO Ming<sup>1,2</sup>, CHEN Sheng-li<sup>1</sup>

(1. Institute of Engineering Safety and Disaster Prevention, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, P. R. China; 2. Shanghai Television University, Shanghai 200433, P. R. China)

**Abstract:** Based on the technique proposed by Muki & Sternberg, a rigorous analytical method for calculating the interaction factor between two piles with different lengths, diameters and properties is presented. The pile group in layered soils is calculated by using the principle of superposition. The validity of the presented method has been verified through comparing with those from other existing solutions. A parametric analysis is made to study the pile group settlement and the loads shared by the individual pile. The proposed interaction factors of pile-pile can consider the strengthening effect of intervening piles. The proposed method can be used to analyze the large pile group.

**Key words:** layered soil; pile group; interaction factor; load sharing; settlement

对于层状地基中桩-土相互作用问题, 国内外学者采用有限单元法<sup>[1]</sup>和边界元法<sup>[2-4]</sup>进行了大量的研究, 此外还有 Zhang & Small<sup>[5]</sup>基于 Small & Booker<sup>[6-7]</sup>的有限层法与有限单元法结合分别对竖向荷载和水平向荷载下高承台群桩进行了研究; Southcott & Small<sup>[8]</sup>采用位移相互作用系数法与有限层方法相结合对双层地基中的群桩进行了计算分析。

但除有限元外, 上述方法在考虑桩-土相互作用的时候在理论上都具有近似性, 这些分析方法在实

际应用中都具有一定的局限性, 因此在目前的层状地基群桩分析理论中还没有一种理论被广泛接受。根据 Muki & Sternberg<sup>[9]</sup>提出的虚拟桩方法, Liang 等<sup>[10]</sup>和梁发云等<sup>[11]</sup>建立了层状地基中混合桩型复合地基分析方法; 通过与相互作用系数法结合, Cao<sup>[12-13]</sup>等建立了均质地基位移相互作用系数解法。采用虚拟桩求解方法计算桩-土相互作用, 充分考虑了桩土分离以后桩体孔洞的存在, 该方法是一种在理论上更为严格的弹性理论计算方法, 可以考虑桩

收稿日期: 2011-09-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(50478022); 上海市教委优青年教师课题(dsd08005); 上海市教育委员会科研创新项目(10YZ208)

作者简介: 曹明(1974-), 男, 博士, 主要从事桩基础、地基处理研究, (E-mail)mingcaoxh@hotmail.com。

的“加筋效应”<sup>[14]</sup>。本文在文献[12-13]的基础上,采用传递矩阵法求解层状地基中两根桩之间的位移相互作用系数,通过叠加原理求解层状地基群桩的工程性状,通过与已有文献求解结果的对比,对本文建立在虚拟桩基础上求解层状地基中群桩基础位移相互作用系数计算方法进行验证。

### 1 计算模型简介

图 1 所示为层状地基中竖向荷载作用下任意 2 根直径分别为  $d_1$ 、 $d_2$  弹性模量分别为  $E_{p1}$ 、 $E_{p2}$  和长度分别为  $L_1$ 、 $L_2$  的桩  $B'_1$  和  $B'_2$ , 2 根桩之间的桩心距为  $S$ , 桩体的横截面积分别为  $A_1$ 、 $A_2$ 。为了便于

说明,以 2 层地基为例,上部土层的弹性模量和泊松比分别为  $E_{s1}$  和  $\mu_{s1}$ , 土层的厚度为  $H_1$ ; 下部土层为半无限空间,土的弹性模量和泊松比分别为  $E_{s2}$  和  $\mu_{s2}$ 。设 2 根桩桩顶作用相等的竖向荷载  $P_0$ , 分析时按照 Muki & Sternberg 的计算方法,将真实桩分解为扩展土  $B$  和虚拟桩  $B_{*1}$ 、 $B_{*2}$ , 如图 1 所示。图 1 (c) 为 2 根虚拟桩,以第  $i$  根桩为研究对象,其弹性模量按层状地基的分界面相应的分为上下 2 部分,上截和下截的弹性模量分别为  $E_{*i}^1$  ( $i=1,2$ ) 和  $E_{*i}^2$  ( $i=1,2$ )。

$$\begin{aligned} E_{*i}^1 &= E_{pi} - E_{s1}; \\ E_{*i}^2 &= E_{pi} - E_{s2} \end{aligned} \quad (i=1,2) \quad (1)$$

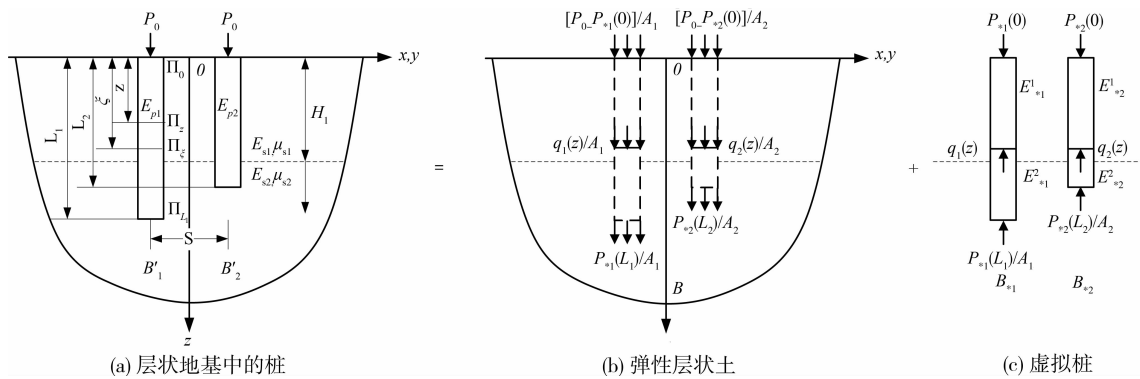


图 1 长短桩桩基础计算模型

第  $i$  根虚拟桩应力应变关系和平衡方程分别如下式

$$\frac{P_{*i}(z)}{A_i} = E_{*i}^1 \varepsilon_{*i}(z) \quad (0 \leq z < H_1) \quad (2a)$$

$$\frac{P_{*i}(z)}{A_i} = E_{*i}^2 \varepsilon_{*i}(z) \quad (H_1 < z \leq L_i) \quad (2b)$$

$$\frac{dP_{*i}(z)}{dz} + q_i(z) = 0 \quad (0 < z < L_i) \quad (2c)$$

其中:  $\varepsilon_{*i}(z)$  是第  $i$  根虚拟桩的竖向应变;  $P_{*i}(z)$  是第  $i$  根虚拟桩的轴力;  $q_i(z)$  是第  $i$  根虚拟桩上沿轴线的分布荷载。

第  $i$  根虚拟桩  $\Pi_z$  截面处的应变为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{*i}(z) &= \sum_{j=1}^2 \left\{ [P_0 - P_{*j}(0)] \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z,0) + \right. \\ &P_{*j}(L_j) \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z,L_j) + \int_0^{L_j} q_j(\xi) \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z,\xi) d\xi \left. \right\} \\ &(0 \leq z \leq L_i; z \neq \xi; i=1,2) \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z,\xi)$  表示第  $j$  根桩所在位置层状土中任意截面  $\Pi_\xi$  处作用合力为单位力的均布荷载时对第  $i$  根桩所在位置的弹性半空间土任意截面  $\Pi_z$  处的圆心所产生的竖向应变,其值可由 Mindlin<sup>[15]</sup> 基本解进行积分得到。

根据虚拟桩与层状土在桩身处竖向应变协调条件,式(2c)代入式(3),考虑  $\widehat{\varepsilon}^{(i,j)}(z,\xi)$  在  $\xi=z$  以及  $P_{*i}(z)$  在  $z=H_1$  处的间断性,并由式(2a、2b)可以得到

$$\begin{aligned} \frac{P_{*i}(z)}{E_{*i}^1 A} &= P_0 \sum_{j=1}^2 \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z,0) + P_{*i}(z) [\widehat{\varepsilon}_z^{(i,i)}(z,z^+) - \\ &\widehat{\varepsilon}_z^{(i,i)}(z,z^-)] + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_0^{H_1} P_{*j}(\xi) \frac{\partial \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z,\xi)}{\partial \xi} d\xi + \right. \\ &\left. \int_{H_1^+}^{L_j} P_{*j}(\xi) \frac{\partial \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z,\xi)}{\partial \xi} d\xi \right\} \quad (0 \leq z < H_1; z \neq \xi) \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{*i}(z)}{E_{*i}^2 A} &= P_0 \sum_{j=1}^2 \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z,0) + P_{*i}(z) [\widehat{\varepsilon}_z^{(i,i)}(z,z^+) - \\ &\widehat{\varepsilon}_z^{(i,i)}(z,z^-)] + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_0^{H_1} P_{*j}(\xi) \frac{\partial \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z,\xi)}{\partial \xi} d\xi + \right. \\ &\left. \int_{H_1^+}^{L_j} P_{*j}(\xi) \frac{\partial \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z,\xi)}{\partial \xi} d\xi \right\} \quad (H_1 < z \leq L_i; z \neq \xi) \end{aligned} \quad (4b)$$

其中,  $\widehat{\varepsilon}_z^{(i,i)}(z,z^+)$ 、 $\widehat{\varepsilon}_z^{(i,i)}(z,z^-)$  分别表示荷载作用在第  $i$  根桩截面  $\Pi_\xi$  分别从上侧和下侧无限趋近第  $i$  根桩  $\Pi_z$  截面时所引起的  $\Pi_z$  处圆心的竖向应变。

对式(4a、4b)进行整理可得求解层状地基中任

意2根非等长非等径桩问题所需要的桩-桩之间相互作用的第二类 Fredholm 积分方程。

$$\left[ \frac{1}{A_i E_{*i}} - \widehat{\varepsilon}^{(i,i)}(z, z^+) + \widehat{\varepsilon}^{(i,i)}(z, z^-) \right] P_{*i}(z) - \sum_{j=1}^2 \left[ \int_0^{H_1} P_{*j}(\xi) \frac{\partial \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z, \xi)}{\partial \xi} d\xi - \int_{H_1}^{L_j} P_{*j}(\xi) \frac{\partial \widehat{\varepsilon}_z^{(i,j)}(z, \xi)}{\partial \xi} d\xi \right] = P_0 \sum_{j=1}^2 \widehat{\varepsilon}_z^{(1,j)}(z, 0) \quad (0 \leq z < H_1; H_1 < z \leq L_i; z \neq \xi; i = 1, 2) \quad (5)$$

其中,  $\widehat{\varepsilon}^{(i,i)}(z, z^+) - \widehat{\varepsilon}^{(i,i)}(z, z^-)$  根据广义虎克定律有

$$\widehat{\varepsilon}^{(i,i)}(z, z^+) - \widehat{\varepsilon}^{(i,i)}(z, z^-) = -\frac{(1-2\mu_{s1})(1+\mu_{s1})}{E_{s1}(1-\mu_{s1})A_i} \quad (0bz < H_1; i = 1, 2) \quad (6a)$$

$$\widehat{\varepsilon}^{(i,i)}(z, z^+) - \widehat{\varepsilon}^{(i,i)}(z, z^-) = -\frac{(1-2\mu_{s2})(1+\mu_{s2})}{E_{s2}(1-\mu_{s2})A_i} \quad (H_1 < \xi \leq L_i; i = 1, 2) \quad (6b)$$

层状地基中第  $i$  根桩桩身各点处的位移  $w_i^{pp}(z)$  可以表示为

$$w_i^{pp}(z) = \sum_{j=1}^2 \left\{ [P_0 - P_{*j}(0)] \widehat{w}^{(i,j)}(z, 0) + P_{*j}(L_j) \widehat{w}^{(i,j)}(z, L_j) + \int_0^{L_j} q_j(\xi) \widehat{w}^{(i,j)}(z, \xi) d\xi \right\} \quad (0 \leq z < H_1; H_1 < z \leq L_i; i = 1, 2) \quad (7)$$

其中,  $\widehat{w}^{(i,j)}(z, \xi)$  表示作用于第  $j$  根桩  $\Pi_j$  截面上合力为单位力的均布荷载引起的第  $i$  根桩  $\Pi_i$  截面上中心点处的竖向位移, 可由层状地基中的基本解得到。式(2c)代入式(7)并进行分部积分可得

$$w_i^{pp}(z) = \sum_{j=1}^2 \left[ P_0 \widehat{w}^{(i,j)}(z, 0) + \int_0^{L_j} P_{*j}(\xi) \frac{\partial \widehat{w}^{(i,j)}(z, \xi)}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (0bz < H_1; H_1 < z \leq L_i; z \neq \xi; i = 1, 2) \quad (8)$$

式(8)给出了层状地基土中2根竖向荷载作用下非等长桩桩身位移的表达式。令式(8)中的  $z = 0$ , 则可得到第  $i$  根桩桩顶的位移为

$$w_i^{pp}(0) = \sum_{j=1}^2 \left[ P_0 \widehat{w}^{(i,j)}(0, 0) + \int_0^{L_j} P_{*j}(\xi) \frac{\partial \widehat{w}^{(i,j)}(0, \xi)}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

层状地基群桩中任意2根非等长的第  $j$  根桩对第  $i$  根桩的位移相互作用系数可以表示为

$$\alpha_{ij} = \frac{w_i^{pp}(0) - w_i^p(0)}{w_j^p(0)} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2; i \neq j) \quad (10)$$

其中,  $w_i^p(0)$  表示层状地基中第  $i$  根单桩在桩顶受到单位竖向荷载  $P_0$  作用下的竖向位移, 具体解答可参见文献[16]。2根桩的相互作用系数  $\alpha_{ij}$  与第  $i$  根桩对第  $j$  根桩的间距及2根桩的长度、半径和材料有关, 因此在一般情况下,  $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$ 。

根据叠加原理, 对于由  $n$  根几何参数不相同的桩组成的一般高承台群桩, 其中, 任意第  $k$  根桩桩顶的沉降量  $w_k(0)$  为

$$w_k(0) = w_k^p(0) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n P_{0j} \alpha_{kj} + w_k^p(0) P_{0k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

其中,  $P_{0j}$ 、 $P_{0k}$  分别为群桩中第  $j$  根桩和第  $k$  根桩的桩顶荷载。

由平衡条件, 各桩桩顶分担荷载  $P_{0j}$  之和应等于承台上作用的总荷载  $P_0$ 。

$$P_0 = \sum_{j=1}^n P_{0j} \quad (12)$$

由式(11)和式(12)构成的方程组有  $n+1$  个方程, 其中, 桩与桩间的相互作用系数  $\alpha_{ij}$  和单桩本身在单位竖向荷载作用下的竖向位移  $w_k^p(0)$  都是已知数, 方程组中有  $2n$  个未知数。对于刚性承台的长短桩桩基础, 所有桩的桩顶沉降都相等, 即有

$$w_c = w_i(0) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

其中,  $w_c$  为刚性承台的竖向位移。式(13)补充了  $n$  个约束条件, 由式(11—13)组成的方程组就可解得层状地基中竖向荷载作用下长—短桩桩基础的沉降以及每根桩的桩顶荷载。在实际情况下, 根据桩布置的对称性, 可以减少方程的数量, 从而提高计算效率。

## 2 算例验证及参数分析

### 2.1 算例验证

层状地基中群桩的工程性状分析一直是岩土工程界研究的热点和难点, EL Sharnouby & Novak<sup>[17]</sup> 通过 Mindlin 解对双层地基中的群桩进行了分析; Chin & Chow<sup>[18]</sup> 对双层地基中  $3 \times 3$  桩高承台桩基础进行了计算, 并与 Poulos & Davis<sup>[19]</sup> 基于 Mindlin 解的近似分析方法计算结果进行了比较。

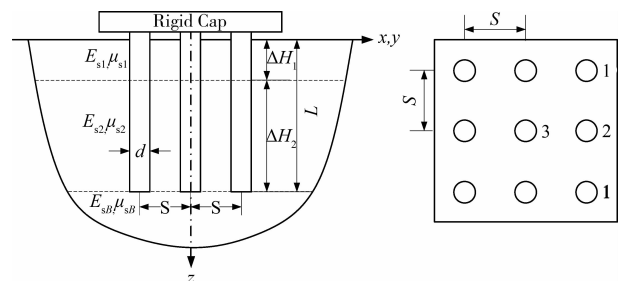


图2 3层地基中的桩基础

为了说明计算结果的正确性, 解答与 Poulos & Davis、EL Sharnouby & Novak 以及 Chin & Chow 双层地基中的群桩计算结果进行了比较。在本算例中  $3 \times 3$  桩桩基础的平面布置以及各桩的编号见图

2. 计算参数为:底层为半无限层,泊松比为  $\mu_{sB} = 0.49$ ; 设土层的弹性模量  $E_s = E_{s1} = E_{s2}$ , 桩土弹性模量比为  $E_p/E_s = 1\ 000$ , 土的泊松比为  $\mu_{s1} = \mu_{s2} = 0.49$ , 土层厚度分别为  $\Delta H_1 = 0.2 L, \Delta H_2 = 0.8 L$ , 桩长细比为  $L/d = 25$ ; 在图 3(a)中桩间距为  $S/d = 5$ , 在图 3(b)中桩间距为  $S/d = 4$ 。从图 3 可以看出,本文方法所求得的群桩折减系数与 Chin & Chow 的计算结果较接近,但比 Poulos & Davis 的计算结果明显要大。各桩的荷载分担比与 Chin & Chow 的计算结果较接近,但荷载在高承台  $3 \times 3$  桩群桩中各桩荷载分布的不均匀性,本文计算结果明显小于其他两种解法,这与其他 2 种计算方法所采用的不同桩-土相互作用计算模型有关。

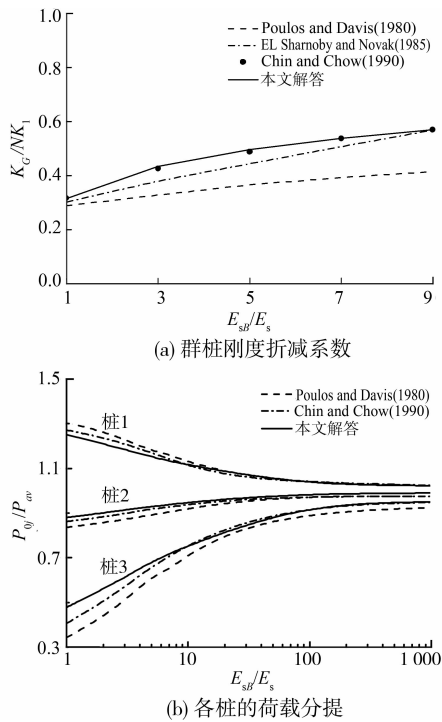


图 3 双层地基中群桩基础解答的对比

## 2.2 参数分析

本文分别针对 2 层和 3 层地基中  $3 \times 3$  桩高承台刚性承台群桩基础,分别计算了桩的长细比  $L/d$ 、桩间距  $S/d$  以及桩底土弹性模量比  $E_{sB}/E_{s1}$  对群桩沉降比以及群桩中各桩桩顶荷载分布  $P_{0j}/P_{av}$  的影响,其中,  $E_s = E_{s1}$ ,  $P_{av}$  为各桩桩顶平均荷载。对于 2 层和 3 层地基,桩端均落在底层土上,如图 2 所示。在下边的计算中,如无特殊说明,基本参数为:底层为半无限层,泊松比为  $\mu_{sB} = 0.3$ , 底层土弹性模量  $E_{sB}/E_s = 10$ ; 桩间距  $S/d = 4$ , 桩土弹性模量比  $E_p/E_s = 2\ 000$ , 土的泊松比为  $\mu_{s1} = \mu_{s2} = 0.3$ ; 在 3 层地基分析中  $\Delta H_1 = 0.2 L, \Delta H_2 = 0.8 L$ , 第

2 层土弹性模量为  $E_{s2}/E_s = 4$ ; 在 2 层地基分析中  $\Delta H_1 = L, \Delta H_2 = 0$ 。

### 1) 桩间距对层状地基中各桩荷载分担的影响

图 4(a),(b)中分别给出了不同桩长细比  $L/d=20$ 、30 其它参数不变的情况下,桩间距的变化对 2 层地基和 3 层地基中各桩桩顶荷载分布的影响,从图中可以得到如下一些结论。

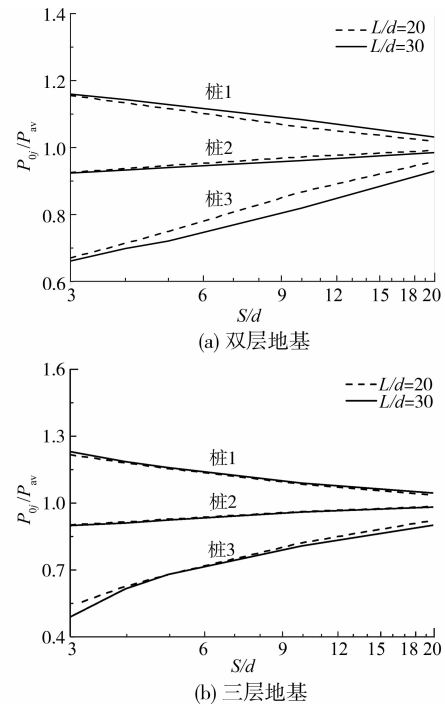


图 4 桩间距对群桩中各桩荷载分担的影响

从图 4(a)中可以看出,桩间距对群桩中各桩桩顶荷载分布的不均匀性有明显的影 响,随着桩间距的增大,群桩中各桩桩顶荷载分布的不均匀性明显减小。对于不同的桩长,群桩中各桩桩顶荷载分布的不均匀性随桩间距的变化情况基本相同。从图 4(a)、(b)中可以看出,双层地基和 3 层地基中群桩中各桩桩顶荷载分布的不均匀性随桩间距的变化规律基本相同,但 3 层地基中群桩中各桩桩顶荷载分担的不均匀性明显大于双层地基。

### 2) 桩底土刚度对层状地基中各桩荷载分担的影响

图 5(a)、(b)中分别给出了不同桩长细比  $L/d = 20, 30$  其它参数不变的情况下,桩底土弹性模量比  $E_{sB}/E_{s1}$  的变化对双层地基和 3 层地基中群桩各桩桩顶荷载分布的影响。从图中可以得到如下一些结论。

由图 5(a)、(b)可以看出,在双层地基和 3 层地基中群桩各桩桩顶荷载分布的不均匀性随着桩底土刚度  $E_{sB}/E_{s1}$  的增大而减小,但在双层地基中,当桩

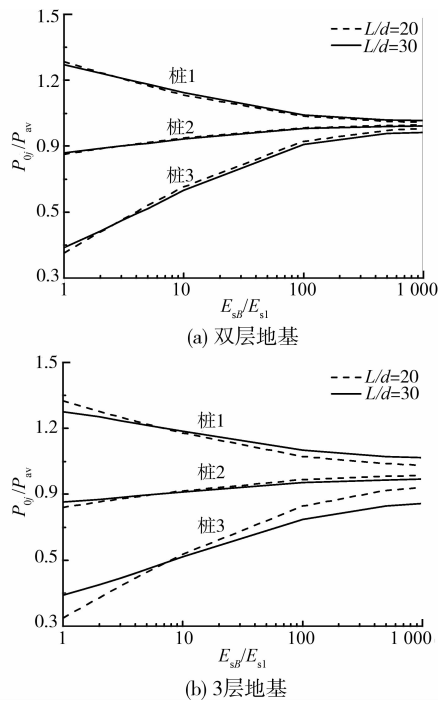


图5 桩底土刚度对群桩各桩荷载分担的影响

底土刚度  $E_{sB}/E_{s1} = 1000$ , 群桩中各桩桩顶荷载分担基本相等, 3层地基中群桩桩顶荷载分担的不均匀性明显大于双层地基。

#### 3) 桩间距对层状地基中群桩沉降比的影响

图6(a)、(b)中分别给出了不同桩长细比  $L/d = 20, 30$  其它参数不变的情况下, 桩间距的变化对两层地基和三层地基中群桩沉降比的影响, 从图中可以得到如下一些结论。从图6(a)中可以看出, 桩间距对群桩沉降比有明显的影响, 随着桩间距的增大, 群桩沉降比明显减小, 即群桩效应随着桩间距的增大而减小。对于不同的桩长, 群桩沉降比随桩间距的变化情况基本相同。从图6(a)、(b)中也可以看出, 双层地基和3层地基中群桩沉降比随桩间距的变化规律基本相同, 但3层地基中群桩的沉降比明显大于双层地基中群桩的沉降比。

#### 4) 桩底土刚度对层状地基中群桩沉降比的影响

图7(a)、(b)中分别给出了不同桩长细比  $L/d = 20, 30$  其它参数不变的情况下, 桩底土弹性模量比  $E_{sB}/E_{s1}$  的变化对2层地基和3层地基中群桩沉降比的影响。从图中可以得到如下一些结论。

由图7(a)可以看出, 随着桩底土刚度  $E_{sB}/E_{s1}$  的增大, 在双层地基中群桩的沉降比逐渐减小, 当桩底土刚度  $E_{sB}/E_{s1} = 1000$ , 群桩的沉降比接近于1, 即群桩效应基本消失。由图7(b)可以看出, 在3层地基中群桩沉降比随桩底土刚度的变化规律与双层地基中的基本相同, 但变化幅度比双层地基中的大。

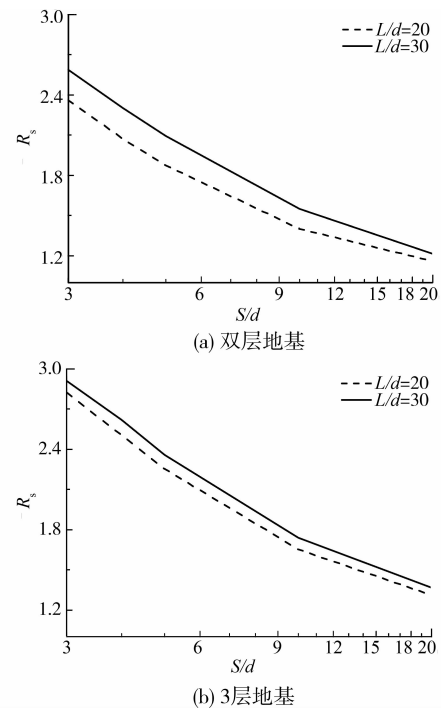


图6 桩间距对群桩沉降比的影响

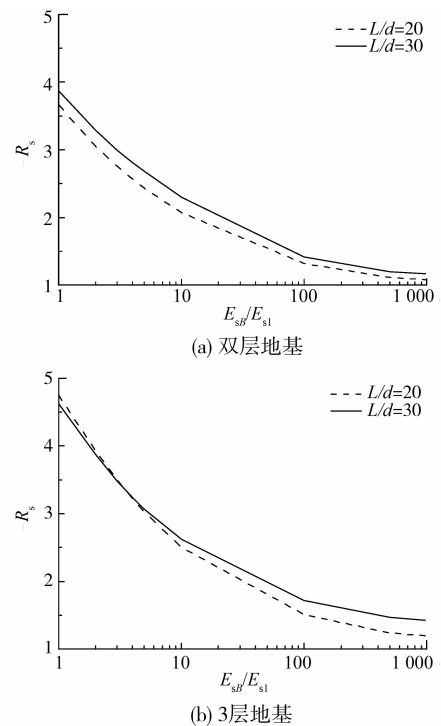


图7 桩底土刚度对群桩沉降比的影响

## 3 结论

将均质地基中的群桩位移相互作用分析方法推广到任意层状地基中的群桩问题, 用弹性理论方法计算桩-土相互作用, 采用传递矩阵法求解层状地基中任意两根非等长、非等径、非等刚度桩之间的相互作用系数, 最后通过叠加原理可以求解层状地基中

群桩的工程性状。采用虚拟桩的方法来计算桩-桩以及桩-土之间的相互作用,充分考虑了桩与土分离以后桩体孔洞的存在。通过与已有文献计算结果比较,验证了本文计算方法的合理性。计算方法不需要对群桩整体建立模型进行分析,因此,计算方法是 1 种计算效率高的层状地基中群桩基础分析方法。进行的参数分析可以为进一步的理论研究以及工程设计提供有益的依据。

#### 参考文献:

- [1] ZHENG J J, ABUSHARAR S W, WANG X Z. Three-dimensional nonlinear finite element modeling of composite foundation formed by CFG-lime piles [J]. *Computers and Geotechnics*, 2008, 35: 637-643.
- [2] AI Z Y, HAN J. Boundary element analysis of axially loaded piles embedded in a multi-layered soil [J]. *Computers and Geotechnics*, 2009, 36: 427-434.
- [3] ALMEIDA V S, PAIVA J B. Static analysis of soil/pile interaction in layered soil by BEM/BEM coupling [J]. *Advances in Engineering Software*, 2007, 38: 835-845.
- [4] 艾智勇, 成志勇. 层状地基中轴向受荷单桩的边界元法分析 [J]. *岩土力学*, 2009, 30(5): 1522-1526.  
AI ZHI-YONG, CHENG ZHI-YONG. Analysis of axially loaded pile in layered soils by boundary element method [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(5): 1522-1526.
- [5] ZHANG H H, SMALL J C. Analysis of capped pile groups subjected to horizontal and vertical load [J]. *Computers and Geotechnics*, 2000, 26: 1-21.
- [6] SMALL J C, BOOKER J R. Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach, Part 1-Strip loadings [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineerin*, 1984, 20: 1025-1037.
- [7] SMALL J C, BOOKER J R. Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach, Part 2 circular and rectangular loadings [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, 23: 959-978.
- [8] SOUTHCOFF P H, SMALL J C. Finite layer analysis of vertically loaded piles and pile groups [J]. *Computers and Geotechnics*, 1996, 18(1): 47-63.
- [9] MUKI R, STERNBERG E. Elastostatic load-transfer to a half-space from a partially embedded axially loaded rod [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1970, 6: 69-90.
- [10] LIANG F Y, CHEN L Z, HAN J. Integral equation method for analysis of piled rafts with dissimilar piles under vertical loading [J]. *Computers and Geotechnics*, 2009, 36(3): 419-426.
- [11] 梁发云, 陈龙珠, 李镜培. 层状地基中混合桩型复合地基的分析方法 [J]. *岩土工程学报*, 2007, 29(3): 379-384.  
LIANG FA-YUN, CHEN LONG-ZHU, LI JING-PEI. Study on the behavior of composite foundation with hybrid piles in layered soils [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, 29(3): 379-384.
- [12] CAO M, CHEN L Z. Analysis of interaction factors between two piles [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University: English Version*, 2008, 13(2): 171-176.
- [13] CAO M, CHEN L Z, CHEN S L. An innovative approach to evaluate the behaviour of vertically loaded pile groups based on elastic theory [J]. *Lowland Technology International*, 2007, 9(1): 1-10.
- [14] 梁发云, 陈龙珠, 李镜培. 加筋效应对群桩相互作用系数的影响 [J]. *岩土力学*, 2005, 26(11): 1757-1760.  
LIANG FA-YUN, CHEN LONG-ZHU, LI JING-PEI. Analysis of piles reinforced effects on interaction coefficients of piles [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(11): 1757-1760.
- [15] MINDLIN R D. Force at a point in the interior of semi-infinite solid [J]. *Physics*, 1936, 7: 195-202.
- [16] 梁发云, 陈龙珠, 李镜培. 层状地基中单桩性状的积分方程解法及其参数 [J]. *同济大学学报*, 2006, 34(9): 1159-1165.  
LIANG FA-YUN, CHEN LONG-ZHU, LI JING-PEI. An integral equation approach and parametric analysis for single pile in layered soil [J]. *Journal of Tongji University*, 2006, 34(9): 1159-1165.
- [17] EL SHARNOUBY B, NOVAK M. Static and low frequency response of pile groups [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1985, 22(1): 79-94.
- [18] CHIN J T, CHOW Y K. Numerical analysis of axially loaded vertical piles and pie groups [J]. *Computers and Geotechnics*, 1990, 9: 273-290.
- [19] POULOS H G, DAVIS E H. Pile foundation analysis and design [M]. New York: John Wiley and Sons, 1980.