

# 开口薄壁杆的板件面内拉弯综合抗力体系

金 声<sup>a,b</sup>, 李开禧<sup>a</sup>, 戴国欣<sup>a,b</sup>

(重庆大学 a. 土木工程学院; b. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045)

**摘要:**针对薄壁杆件力学分析较为复杂的问题, 讨论了一种把开口薄壁杆的分析拆分为2个较简单部分的方法。针对薄壁中面内荷载效应的分析问题, 首先在适当简化基本应力应变条件的基础上, 按平面应力问题分析单肢板件面内荷载效应, 然后对其进行向量综合, 得到反映开口薄壁杆轴向伸缩、弯曲及翘曲性质的“板件面内拉弯综合抗力体系”及其变形方程; 探讨了刚度方程的建立及其计算特点, 并与经典理论进行对比。分析表明, 在板件面内弯矩定义中引入板件间纵向相互作用力, 可简化该体系分析过程和结论, 使之具备与平面弯曲问题一致的形式。作为应用举例, 推导了求解薄壁截面主轴方向、主轴惯性矩、弯心坐标、主扇性惯性矩的线性方程组, 剖析了经典理论中这些截面几何特性对于计算的意义及其效率。

**关键词:**薄壁结构; 单肢解析化方法; 翘曲; 扭转; 扇性惯性矩; 刚度矩阵

中图分类号: TU392.5; O342 文献标志码: A 文章编号: 1674-4764(2012)03-0058-07

## Slabs' In-plane Tension-bending Resistance System of Thin-walled Open-profile

JIN Sheng<sup>a,b</sup>, LI Kaixi<sup>a</sup>, DAI Guoxin<sup>a,b</sup>

(a. College of Civil Engineering; b. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

**Abstract:** In order to simplify the analyses of thin-walled open-profile bars, a thin-walled bar was split into two parts which were dominated by in-plane and out-plane loading effects respectively. The in-plane loading effects were focused. On the basis of appropriate simplified stress and strain conditions, each plate was analyzed and the results were integrated into vectors, resulting in the *slabs' in-plane tension-bending resistance system* of thin-walled open-profile bars, which reflects their axial stretch/compression, bending and warping properties. And then the deformation equation and the stiffness equation were set up. Because longitudinal interaction forces between plates were introduced in the definition of the plates' in-plane bending moments, the deduction and conclusions here were consistent in form with those in bending theory. Principal axes' directions, shear center's coordinates, principal inertia moments and sectorial inertia moment of thin-walled open sections can be deduced by the slabs-disassembled method proposed here. Lateral deformed bars' analysis based on those sectional parameters in classical theory is proved to be inefficient, where additional "rigid contour hypothesis" has to be introduced.

**Key words:** thin-walled structures; slabs-disassembled method; warping; torsion; sectorial inertia moment; stiffness matrix

收稿日期: 2011-09-30

基金项目: 中央高校基本科研业务费资助项目(CDJRC10200004、CDJZR10200019); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20110191120034)

作者简介: 金 声(1975-), 男, 博士, 主要从事薄壁钢结构计算理论研究, (E-mail) jsatcq@163.com。

Vlasov<sup>[1]</sup>针对开口薄壁杆件所提出的经典理论通过引入扇性几何特性和广义力(双力矩),反映不均匀翘曲对扭转的显著影响,未考虑翘曲剪应变及截面的畸变。包世华等<sup>[2]</sup>, Bencoter<sup>[3]</sup>, Kollbrunner等<sup>[4]</sup>采用翘曲函数 $\theta(z)$ 代替扭率 $\varphi'(z)$ 表征翘曲沿杆长的分布,以计及翘曲剪应变对扭转的影响,对闭口截面杆件而言,该修正是必要的。文献<sup>[5]</sup>研究了薄壁几何特征参数对 Уманский 理论准确性的影响。文献<sup>[6]</sup>基于 Kollbrunner-Hajdin 理论,提出薄壁杆件扭转刚度矩阵,其扭角位移为双曲函数。文献<sup>[7]</sup>考虑沿壁厚均匀分布的正应变、剪应变(弯曲、翘曲及 Bredt 剪应变)以及沿壁厚线性分布的 St. Venant 剪应变,推导了弯扭联合作用下不对称截面薄壁梁四阶变形微分方程,并建立有限元模型。文献<sup>[8]</sup>通过构造位移函数列向量,对薄壁杆件的复杂变形微分方程进行降阶,并利用求系数矩阵特征值和特征向量的方法求解方程,得到位移的精确插值函数。文献<sup>[9]</sup>基于薄壁杆件理论,通过构建相容于 Timoshenko 梁理论(转角位移与侧向位移相互独立)、相容于 Kollbrunner-Hajdin 假定(扭转位移与翘曲位移相互独立)的插值多项式,建立薄壁杆件单元的刚度矩阵。文献<sup>[10]</sup>研究了开口薄壁型钢檩条在偏心横向荷载及复杂约束条件下考虑扭转的杆件内力简化计算方法。文献<sup>[11]</sup>将图论引入薄壁杆件结构计算,导出了计算扇性坐标、Bredt 剪应力流、二次剪应力流及弯曲剪应力流的矩阵方程式。文献<sup>[12]</sup>据此编制计算程序,验证了其结论的正确性。上述研究均假设横截面周线不变形,近年来,考虑截面畸变的计算理论,如广义梁理论<sup>[13]</sup>、有限条法<sup>[14]</sup>等发展迅速。因薄壁杆件的变形及力因素均较多,不论考虑畸变与否,分析理论的建立过程均较复杂、抽象,例如通常需引入新的广义力,需采用能量法建立变形方程等。分析理论的抽象性不利于对薄壁杆件力学特点的深入把握,限制了其应用水平<sup>[15]</sup>。对于薄平板,可以将其所受到的一般荷载分解为作用在中面之内的荷载和垂直于中面的荷载,分别按平面应力问题和薄板弯曲问题进行计算<sup>[16]</sup>。

受此启发,本研究将薄壁杆件的分析拆分为分别以中面内和中面外荷载效应为主导的2个相互独立的部分,在分析中,对2部分分析的应力、应变和变形条件分别予以充分简化,并采用静力平衡法进行推导,以形成对薄壁杆件力学性质较为具体、直接的认识。本文探讨组成开口薄壁杆件的各薄平板在中面内荷载作用下的荷载效应,利用矩阵运算将单肢板件的分析综合为薄壁杆件的分析。结合分析,探讨了开口薄壁杆件翘曲性质及其计算特点。作为

应用举例,提出了一种建立线性方程组求解薄壁截面几何特性的方法。由于在分析中不将内力向中轴线凝聚,因此无需引入“刚周边假定”,不排斥截面畸变变形可能。在引入板件面外荷载效应后,研究自然深化为考虑畸变的开口薄壁杆件分析。

## 1 分析模型及简化假定

图1(a)所示开口薄壁杆由 $n$ 个板件组成,编号分别为 $1, 2, \dots, n$ ,分别交于 $n-1$ 个脊线;该杆横截面详图1(c),截面中线上共 $n+1$ 个关键节点,编号分别为 $(1), (2), \dots, (n+1)$ ,其中 $(2) \sim (n)$ 为板件截面中线交点;任意板件 $i$ 截面上包含关键节点 $(i)$ 和 $(i+1)$ ,中线方向由关键节点 $(i)$ 指向 $(i+1)$ 。

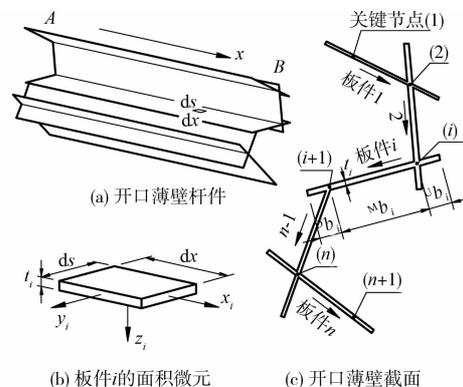


图1 开口薄壁杆件分析模型

在板件面内荷载作用下的平面应力问题分析中,参考已有实用计算理论,不计中面的剪切应变 $\gamma_{zs}^M$ 和横向拉伸应变 $\epsilon_s^M$ ,只计纵向拉伸应变 $\epsilon_s^M$ 。分析反映了板件纵向拉压和面内弯曲性能,在薄壁杆的各组成板件上分别实施并综合,得到其力学性能的一个重要组成部分,称之为开口薄壁杆的“板件面内拉弯综合抗力体系”。

在板件面外横向荷载作用下的薄板弯曲问题分析中,采用薄板小挠度弯曲理论的 Kirchhoff 假定:不计形变分量 $\epsilon_z$ 、 $\gamma_{sz}$ 、 $\gamma_{zx}$ ,即假设板件中面的法线在板件弯曲时保持不伸缩,且保持为中曲面的法线;不计应力分量 $\sigma_z$ 所引起的变形。将该分析应用于各板件并综合,则得到杆件力学性能的另一个重要组成部分——“板件面外弯曲综合抗力体系”,该体系的分析另文说明。

## 2 板件面内拉弯综合抗力体系的变形方程

### 2.1 横截面正应力场的等效合成和分解

在板件面内荷载作用效应分析中,由于只考虑沿板厚均匀分布的纵向拉伸应变,这个方向的应力

和应变分别简记为  $\sigma$  和  $\epsilon$ , 关系见式(1),

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (1)$$

其中  $E$  为材料的弹性模量。

薄壁杆件的尺寸特点之一是板件长度远大于宽度, 可假设  $\epsilon$  沿板件横截面宽度方向线性分布, 对于图 2 所示任意板件  $i$  的横截面, 若已知关键节点  $(i)$  和  $(i+1)$  处的正应力  $\sigma_{(i)}$ 、 $\sigma_{(i+1)}$ , 则可确定该截面正应力的分布, 而该正应力场可等效为作用在该板件 2 个关键节点上的轴向力  ${}^iN_{(i)}$  和  ${}^iN_{(i+1)}$ , 见式(2),

$$\begin{bmatrix} {}^iN_{(i)} \\ {}^iN_{(i+1)} \end{bmatrix} = {}^iJ_1 \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{(i)} \\ \sigma_{(i+1)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中  ${}^iJ_1$  由这 2 个力系的合力与合弯矩分别相等的条件得到确定, 其组成元素的取值取决于该板件的横截面尺寸。

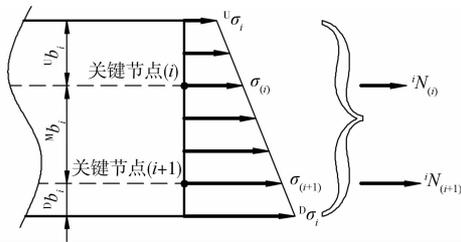


图 2 板件  $i$  截面正应力及其等效轴向力

同理, 对于由  $n$  个板件组成的开口薄壁杆截面, 若已知所有关键节点处的正应力  $\sigma$ , 则可确定该截面正应力的分布。将式应用于所有板件并综合, 得到该应力场所合成的作用在关键节点  $(1), (2), \dots, (n+1)$  的轴向力列向量, 见式(3),

$$\mathbf{N} = \mathbf{J}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{N} = (N_{(1)}, N_{(2)}, \dots, N_{(n+1)})^T$ ,  $\mathbf{J}_1$  是  $n+1$  阶对称阵,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \dots, \sigma_{(n+1)})^T$ 。

### 2.2 轴向力和轴向变形的分解

$\boldsymbol{\sigma}$  的合力值(也就是  $\mathbf{N}$  的各元素之和)见式(4),

$$\bar{N} = \mathbf{1}_{1 \times (n+1)} \cdot \mathbf{N} \quad (4)$$

其中, 形如  $\mathbf{1}_{i \times j}$  者为  $i$  行  $j$  列全 1 矩阵。

若  $\bar{N}$  作用于截面形心, 产生均匀正应力, 值见式(5),

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{A} = \mathbf{J}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (5)$$

其中,  $A$  为横截面面积,

$$\mathbf{J}_2 = \frac{1}{A} \cdot \mathbf{1}_{1 \times (n+1)} \cdot \mathbf{J}_1 \quad (6)$$

在截面正应力场  $\boldsymbol{\sigma}$  中扣除该均匀正应力场, 得到式(7)。

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{TR}} = \boldsymbol{\sigma} - \bar{\sigma} \cdot \mathbf{1}_{(n+1) \times 1} \quad (7)$$

$\boldsymbol{\sigma}^{\text{TR}}$  仍可等效为作用在  $n+1$  个关键节点上的轴

向力, 见式(8)。

$$\mathbf{N}^{\text{TR}} = \mathbf{J}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{TR}} \quad (8)$$

显然,  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{TR}}$  的合力(亦即  $\mathbf{N}^{\text{TR}}$  的各元素之和)为 0, 即式(9),

$$\mathbf{J}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{TR}} = 0 \quad (9)$$

式(4)~(9)表明: 横截面的轴向力  $\mathbf{N}$  可分解为  $\bar{N}$  和  $\mathbf{N}^{\text{TR}}$ , 其中  $\bar{N}$  作用在截面形心,  $\mathbf{N}^{\text{TR}}$  轴向合力为 0。该分解关系的数学形式见式(10)。

$$\mathbf{N} = \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{1}_{(n+1) \times 1} \cdot \bar{\sigma} + \mathbf{N}^{\text{TR}} = \mathbf{J}_2^T \cdot \bar{N} + \mathbf{N}^{\text{TR}} \quad (10)$$

对截面正应变  $\boldsymbol{\epsilon}$  执行与  $\boldsymbol{\sigma}$  相同的分解, 见式(11),

$$\boldsymbol{\epsilon} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{1}_{(n+1) \times 1} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{TR}} \quad (11)$$

其中,  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = (\epsilon_{(1)}, \epsilon_{(2)}, \dots, \epsilon_{(n+1)})^T$ 。均匀正应变  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  是  $\bar{N}$  作用下的截面应变, 因为根据式(5)和(1)可知:

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{J}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\bar{N}}{EA} \quad (12)$$

$\boldsymbol{\epsilon}^{\text{TR}}$  是  $\mathbf{N}^{\text{TR}}$  作用下的截面正应变,  $\boldsymbol{\epsilon}^{\text{TR}}$  满足:

$$\mathbf{J}_2 \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{\text{TR}} = 0, \quad (13)$$

截面轴向变形  $\mathbf{u}$  与正应变  $\boldsymbol{\epsilon}$  间具有微分关系:

$$\mathbf{u}' = \boldsymbol{\epsilon}, \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{u} = (u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n+1)})^T$ 。若记:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{J}_2 \mathbf{u} \quad (15)$$

则由式(15)、(14)和(12), 得到板件面内拉弯综合抗力体系的轴向变形方程见式(16)。

$$\bar{\mathbf{u}}' = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\bar{N}}{EA} \quad (16)$$

### 2.2 板件的面内弯矩定义推导

设开口薄壁杆各板件分别沿其横截面中线方向作用有横向荷载  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , 在  $x$  截面处截取长度为  $dx$  的微段杆件。根据荷载情况, 可知杆件任意横截面轴向力合力为 0, 因此, 该微段两端截面处的轴向力分别是:  $N^{\text{TR}}(x), N^{\text{TR}}(x+dx)$ 。从微段杆件中任取板件  $i$ , 该脱离体受力如图 3。直角坐标系  $xO_i y_i$  示于该图,  $x$  轴沿杆长方向,  $y_i$  轴沿横截面中线方向。

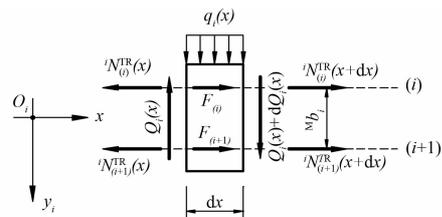


图 3 板件  $i$  微段脱离体受力分析

参照式(2), 在图 3 中, 脱离体两端截面的正应力分别以其等效集中力形式  ${}^iN_{(i)}^{\text{TR}}$  和  ${}^iN_{(i+1)}^{\text{TR}}$  表示。根据“板件面内拉弯综合抗力体系”的应力、应

假定,相邻板件间的相互作用力为脊线处的纵向剪力流,以分别作用在两脊线上的轴向力  $F_{(i)}$ 、 $F_{(i+1)}$  示于图 3,其值可根据相邻板件的  $x$  向平衡得到式(17)、(18)。

$$F_{(i)} = \sum_{j=1}^i [N_{(j)}^{TR}(x+dx) - N_{(j)}^{TR}(x)] - [{}^iN_{(i)}^{TR}(x+dx) - {}^iN_{(i)}^{TR}(x)] \quad (17)$$

$$F_{(i+1)} = \sum_{j=i+1}^{n+1} [N_{(j)}^{TR}(x+dx) - N_{(j)}^{TR}(x)] - [{}^iN_{(i+1)}^{TR}(x+dx) - {}^iN_{(i+1)}^{TR}(x)] \quad (18)$$

该脱离体所受  $x$  向力的合力为 0,合弯矩如式(19),

$${}^iM_{z^x}^E = {}^M b_i \cdot \{F_{(i)} + [{}^iN_{(i)}^{TR}(x+dx) - {}^iN_{(i)}^{TR}(x)]\} = M_i(x) - M_i(x+dx) \quad (19)$$

其中:

$$M_i(x) = -{}^M b_i \cdot \sum_{j=1}^i [N_{(j)}^{TR}(x)] \quad (20)$$

为  $x$  截面处开口薄壁杆板件  $i$  的中面内弯矩,该内力为正时,使板件  $i$  中取出的微段向  $y_i$  轴正向凸。

与杆件截面弯矩的传统定义不同,定义(20)不仅包含横截面正应力合弯矩,还反映了板件间纵向相互作用,可使薄壁杆分析得到简化。

根据  $y_i$  向力的平衡关系,可得式(21)。

$$q_i = -\frac{d}{dx} Q_i \quad (21)$$

根据脱离体的力矩平衡,并略去二阶项,得到式(22)。

$$Q_i = \frac{d}{dx} M_i \quad (22)$$

将式(21)和(22)应用于所有板件,并分别综合,得到式(23)、(24),

$$q = -\frac{d}{dx} Q \quad (23)$$

$$Q = \frac{d}{dx} M \quad (24)$$

其中,  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ 、 $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T$ 、 $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)^T$ 。

### 2.3 横向变形微分方程

板件  $i$  截面上的  $M_i$  可等效为一对作用在节点( $i$ )和( $i+1$ )的大小相等、方向相反的轴向力,如式(25)。

$$\begin{pmatrix} N_{(i)}^{TR} \\ N_{(i+1)}^{TR} \end{pmatrix}_{M_i} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{{}^M b_i} \\ \frac{1}{{}^M b_i} \end{pmatrix} \cdot M_i \quad (25)$$

式(25)应用于所有板件,并综合,得到式(26)。

$$N^{TR} = J_3 \cdot M \quad (26)$$

$N^{TR}$  的  $n+1$  个元素需满足和为 0 的条件,因此从  $N^{TR}$  到  $M$  的转换关系并不唯一,例如,不妨将式

(26)扩展为式(27),

$$N^{TR} = J_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ M \end{pmatrix} \quad (27)$$

其中  $J_4$  为  $n+1$  阶满秩矩阵:

$$J_4 = (-J_2^T \vdots J_3) \quad (28)$$

所以:

$$M = J_5 \cdot N^{TR}, \quad (29)$$

其中,  $J_5$  是  $J_4^{-1}$  的后  $n$  行元素所构成的  $n$  行  $n+1$  列矩阵。

任意板件  $i$ ,面内弯曲的曲率  $\rho_i$  满足式(30)。

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{(\epsilon_{(i)}^{TR} - \epsilon_{(i+1)}^{TR})}{{}^M b_i} \quad (30)$$

式(30)应用于所有板件并综合,并注意到板件  $i$  的横截面中线向位移  $v_i$  满足式(31)。

$$v_i'' \approx \frac{1}{\rho_i} \quad (31)$$

得到式(32),

$$v'' = -J_3^T \cdot \epsilon^{TR} \quad (32)$$

其中,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})^T$ 。

式(32)与式(31)联立,可解得  $\epsilon^{TR}$ ,见式(33)。

$$\epsilon^{TR} = -J_5^T \cdot v'' \quad (33)$$

综合式(29)、(3)和(33),得到式(34),

$$M = -E \cdot J \cdot v'' \quad (34)$$

其中:

$$J = J_5 \cdot J_1 \cdot J_3^T. \quad (35)$$

式(34)形式上与平面弯曲梁的挠曲线近似方程一致,因此参照后者,本文称  $J$  为开口薄壁截面的“板件面内弯曲综合惯性矩”, $J$  是对称矩阵。

综合式(23)、(24)和(34),得到面内拉弯综合抗力体系的横向变形微分方程见式(36)。

$$q = E \cdot J \cdot v^{IV} \quad (36)$$

### 3 与经典理论的实例对比

设有一槽钢杆件,截面如图 4 所示。根据各板件截面宽度与厚度,由式(35)算得式(37)。

$$J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0.12 & 0.24 & 0.04 \\ 0.24 & 1.12 & 0.24 \\ 0.04 & 0.24 & 0.12 \end{pmatrix} \times 10^9 \quad (37)$$

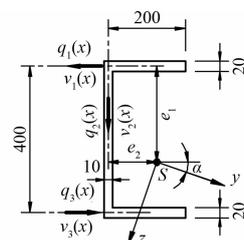


图 4 某槽钢截面

从而可根据式列出杆件横向变形微分方程如式(38)。

$$E \cdot J \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^{IV} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (38)$$

在截面上任意选取原点  $S$  和相互垂直的方向  $y, z$ , 建立平面直角坐标系  $ySz$ , 如图 4。为与经典理论进行比较, 假设杆件变形时横截面满足“刚周边假设”, 则截面上任意一点的横向位移是随  $S$  的  $y, z$  向平移  $v_y, v_z$  及绕  $S$  的  $x$  向转角  $\varphi$ , 因此:

$$(v_1 \ v_2 \ v_3)^T = \mathbf{T} \cdot (v_y \ v_z \ \varphi)^T \quad (39)$$

其中:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha & -e_1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -e_2 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & e_1 - 400 \end{pmatrix} \quad (40)$$

截面所受到的横向力亦可向  $S$  点等效, 得到  $y, z$  向力  $q_y, q_z$  及  $x$  向扭矩  $m$ , 关系如式(41)。

$$(q_y \ q_z \ m)^T = \mathbf{T}^T \cdot (q_1 \ q_2 \ q_3)^T \quad (41)$$

式(39)和(41)代入方程(38), 得到与(38)等效的方程见式(42),

$$E \cdot \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ v_z \\ \varphi \end{pmatrix}^{IV} = \begin{pmatrix} q_y \\ q_z \\ m \end{pmatrix} \quad (42)$$

其中:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T} \quad (43)$$

$\mathbf{D}$  为对称阵, 但通常并不是对角阵, 表现为组成方程组的 3 个方程间具有相关性, 不便于方程的求解。可通过指定特定的  $ySz$  坐标系, 使  $\mathbf{D}$  成为对角阵。此时  $\mathbf{D}$  的非对角元素需满足:

$$D_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (44)$$

求解方程(44), 且不妨限制  $\alpha$  的取值范围为:

$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 得到  $e_1, e_2$  及  $\alpha$  的唯一解:

$$\begin{cases} e_1 = 200 \\ e_2 = -85.714, \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad (45)$$

进而得到:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5.333 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 3.733 \times 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.524 \times 10^{12} \end{pmatrix} \quad (46)$$

对比文献[17]可知, 由式(45)所确定的点  $S$  是截面弯心、所确定的坐标方向是截面的主惯性轴方向; 此时  $\mathbf{D}$  的主对角线各元素分别是截面主惯性矩和主扇性惯性矩; 此时方程组(42)的 3 个方程分别

是: 杆件在 2 个主惯性平面内的弯曲方程和 1 个约束扭转方程(忽略了圣维南剪应力所对应的自由扭转刚度), 各方程间相互独立。

上述分析表明, 所提出的板件面内拉弯综合抗力体系反映了开口薄壁杆的弯曲、翘曲及轴向拉伸(见式(16))的性质。上述分析还给出了一种列线性方程组求解薄壁截面特性的方法, 该方法避免了复杂的积分步骤, 便于程序化实施。

对比还表明, 板件面内拉弯综合抗力体系的变形方程未反映自由扭转刚度的作用, 这是因为该体系中未包含相应应力项, 可通过 2 种措施解决: 1) 在“刚周边假设”前提下, 将纯扭矩内力项  $GI_k \varphi''$  加入方程(42), 或以其等效中面剪力形式加入方程(38), 即可得到与经典理论等效的变形方程, 见文献[18]; 2) 将板件面外弯曲综合抗力体系(另文讨论)与本文所讨论的板件面内拉弯综合抗力体系综合, 可全面反映荷载作用下薄壁杆件的拉压、弯曲、扭转、翘曲及畸变变形。

#### 4 板件面内拉弯综合抗力体系的单元刚度方程

所提出的横向变形方程组的系数矩阵虽然不具有对角化的形式, 然而目前已不成为计算困难, 而且该方程组在考虑了截面翘曲的情况下继承了平面弯曲问题的计算特点, 有利于从弯曲理论自然过渡到约束扭转理论, 下面以单元刚度方程的推导为例予以说明。

图 1 所示长度为  $l$  的开口薄壁杆,  $x$  轴沿杆长方向由  $A$  端指向  $B$  端。将式(34)应用于杆端, 可知支座弯矩反力:

$$\mathbf{M}_A = -E \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_A'', \quad \mathbf{M}_B = E \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_B'' \quad (47)$$

支座剪力反力是:

$$\mathbf{Q}_A = E \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_A''', \quad \mathbf{Q}_B = -E \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_B''' \quad (48)$$

根据式(36), 无结间横向荷载杆件的横向变形方程是:

$$E \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^{IV} = 0 \quad (49)$$

若已知杆件左、右端截面各板件中轴向位移  $v_A, v_B$  及作用在两端截面各板件中面上的弯矩  $\mathbf{M}_A, \mathbf{M}_B$ , 通过对式(49)的积分, 可确定  $v(x)$  及其各阶导数。例如:

$$E \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}'''(x) = -\frac{1}{l}(\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_B) \quad (50)$$

再如, 两端截面处各板件的中面内转角:

$$\begin{cases} v_A' = \frac{1}{3}i^{-1} \cdot \mathbf{M}_A - \frac{1}{6}i^{-1} \cdot \mathbf{M}_B + \frac{1}{l}(v_B - v_A) \\ v_B' = -\frac{1}{6}i^{-1} \cdot \mathbf{M}_A + \frac{1}{3}i^{-1} \cdot \mathbf{M}_B + \frac{1}{l}(v_B - v_A) \end{cases} \quad (51)$$

其中  $i$  为开口薄壁杆的板件面内弯曲综合线刚度,

$$i = \frac{E}{l} \cdot J. \quad (52)$$

解联立方程(51),得到杆端弯矩;根据杆端弯矩,由式(50)和(48),得到杆端剪力。另外,对式(16)沿杆

长积分,得到:

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_A \\ \bar{N}_B \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_A \\ \bar{u}_B \end{pmatrix} \quad (53)$$

综上,得到单元刚度方程,该方程具有熟悉的形式:

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_A \\ \mathbf{M}_A \\ \mathbf{Q}_A \\ \bar{N}_B \\ \mathbf{M}_B \\ \mathbf{Q}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 4i & \frac{6i}{l} & 0 & 2i & -\frac{6i}{l} \\ 0 & \frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} & 0 & \frac{6i}{l} & -\frac{12i}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 2i & \frac{6i}{l} & 0 & 4i & -\frac{6i}{l} \\ 0 & -\frac{6i}{l} & -\frac{12i}{l^2} & 0 & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_A \\ v_A' \\ v_A \\ \bar{u}_B \\ v_B' \\ v_B \end{pmatrix} \quad (54)$$

若嫌刚度方程(54)的杆端位移向量和力向量各元素意义不具体,可作进一步变换:

将式(26)代入(10),得到任意截面内力的2种表达方式间的转换关系:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{J}_2^T \quad \mathbf{J}_3) \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{N}} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} \quad (55)$$

将式(55)应用于杆件两端(注意内外力表达系统正方向约定的差异),得到杆端力的2种表达方式间转换关系:

$$\mathbf{N}_A = -\mathbf{J}_4 \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{N}}_A \\ \mathbf{M}_A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_B = -\mathbf{J}_4 \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{N}}_B \\ \mathbf{M}_B \end{pmatrix} \quad (56)$$

若已知任意截面关键节点的轴向位移  $\mathbf{u}$ ,则可确定该截面各板件在中面内的转角:

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{J}_3 \cdot \mathbf{u}$$

综合式(15)和(37),得到截面位移的2种表达方式间转换关系:

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} = -\mathbf{J}_4^T \cdot \mathbf{u} \quad (57)$$

式(58)可直接应用于杆件两端,并与式(56)一起代入方程,单元刚度方程的形式得到更新:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_A \\ \mathbf{Q}_A \\ \mathbf{N}_B \\ \mathbf{Q}_B \end{pmatrix} = \mathbf{K}_{\text{SITB}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_A \\ v_A \\ \mathbf{u}_B \\ v_B \end{pmatrix} \quad (59)$$

板件面内拉弯综合抗力体系的单元刚度矩阵  $\mathbf{K}_{\text{SITB}}$  为对称阵。方程(59)的杆端位移向量和力向量的各组成元素物理意义明确具体,利于应用。

## 5 结 论

采用单肢解析化方法分析了开口薄壁杆的板件面内拉弯综合抗力体系,采用静力平衡法推导了该体系的变形方程,与经典理论进行了实例对比。建立了开口薄壁杆件单元板件面内拉弯综合抗力体系的刚度方程,以利应用,并籍此探讨其计算特点。结论如下:

1)板件面内拉弯综合抗力体系反映开口薄壁杆件的拉压、弯曲和翘曲性质。基于此的单肢解析化方法可采用列线性方程组的方式求解弯心坐标、主扇性惯性矩等截面特性。

2)对比所提供的视角表明,剪力中心和扇性惯性矩是经典理论为方法的实用性所采取的措施和得到的结果。然而就目前的计算技术而言,意义已大为削弱,何况,系数矩阵对角化并不是求解线性方程组最具效率的数学措施。

3)在板件面内弯矩定义中考虑板件间纵向相互作用力,可使考虑翘曲的薄壁杆件计算继承平面弯曲的计算特点。

单肢解析化的板件面内拉弯综合抗力体系分析放弃了刚周边假定,是弯曲理论的自然发展,有良好的理论和计算表现,既能通过引入刚周边假定兼容经典理论,也可进一步深化,考虑截面畸变效应。

### 参考文献:

- [1] Vlasov V Z. Thin-Walled Elastic Beams [M]. 2nd ed. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1961.

- [2] 包世华, 周坚. 薄壁杆件结构力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006.
- [3] Bencoter S U. A theory for torsion and bending for multicell beams [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1954, 21: 25-34.
- [4] Kollbrunner C F, Basler K. *Torsion in Structures*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
- [5] 杨绿峰, 任晓军, 陈建芳, 等. 有限元法研究闭口薄壁杆件约束扭转[J]. *广西大学学报: 自然科学版*, 2008, 33(1): 1-4.  
YANG Lyufeng, REN Xiaojun, CHEN Jianfang, et al. Torsional analysis and application of thin walled bar with closed profile [J]. *Journal of Guangxi University: Natural Science Edition*, 2008, 33(1): 1-4.
- [6] Gunnlaugsson G A, Pedersen P T. A finite element formulation for beams with thin walled cross-sections [J]. *Computers & Structures*, 1982, 15(6): 691-699.
- [7] Hu Y R, Jin X D, Chen B Z. A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections [J]. *Computers & Structures*, 1996, 61(5): 897-908.
- [8] 汤建宏, 聂孟喜, 梁应辰. 考虑剪切变形效果的薄壁结构三维动力计算[J]. *水力发电学报*, 2007, 26(1): 77-83.  
TANG Jianhong, NIE Mengxi, LIANG Yingchen. 3-D dynamic computation of thin-walled structures with considering the effects of shear deformations [J]. *Journal of Hydroelectric Engineering*, 2007, 26(1): 77-83.
- [9] 王晓峰, 杨庆山. 基于 Timoshenko 梁理论的薄壁梁弯扭耦合分析[J]. *工程力学*, 2008, 25(5): 12-16, 21.  
WANG Xiaofeng, YANG Qingshan. Coupled bend and torsion analysis of the spatial thin-walled beam using Timoshenko theory [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(5): 12-16, 21.
- [10] Vieira JR L C M, Malite M, Schafer B W. Simplified models for cross-section stress demands on C-section purlins in uplift [J]. *Thin-Walled Structures*, 2010, 48: 33-41.
- [11] 胡毓仁. 图论在薄壁杆件结构计算中的应用[J]. *上海交通大学学报*, 1989, 23(6): 21-29.  
HU Yuren. The application of graph theory to structural calculation of thin-walled bars [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 1989, 23(6): 21-29.
- [12] 汤建宏, 聂孟喜, 梁应辰. 复杂薄壁建筑物断面特性判定及几何参数的图论处理[J]. *水运工程*, 2006, (3): 13-17.  
TANG Jianhong, NIE Mengxi, LIANG Yingchen. Characteristics judgment and graph theory disposal of geometric parameters in complex thin-walled structures' section [J]. *Port & Waterway Engineering*, 2006, (3): 13-17.
- [13] Gonçalves R, Dinis P B, Camotim D. GBT formulation to analyse the first-order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections [J]. *Thin-Walled Structures*, 2009, 47: 583-600.
- [14] Ádány S, Schafer B W. A full modal decomposition of thin-walled, single-branched open cross-section members via the constrained finite strip method [J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2008, 64: 12-29.
- [15] Silvestre N, Camotim D. On the mechanics of distortion in thin-walled open sections [J]. *Thin-Walled Structures*, 2010, 48: 469-481.
- [16] 徐芝纶. 弹性力学简明教程 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [17] 孙仁博, 王天明. 材料力学 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1995.
- [18] 金声, 李开禧. 薄壁杆约束扭转的单肢解析化分析方法[J]. *计算力学学报*, 2009, 26(6): 956-960.  
JIN Sheng, LI Kaixi. Slabs-dissassembled method of thin-walled bar analysis considering restrained torsion [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, 26(6): 956-960.

(编辑 胡英奎)