第 34 卷第 3 期 2012 年 6 月
土木建筑与环境工程
Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering
Vol. 34 No. 3 Jun. 2012

非线性体系动力可靠性分析的等效 Duffing 体系法

张振浩，杨伟军

(长沙理工大学 土木与建筑学院，长沙 410076)

摘　要：等效线性化法是非线性结构体系的随机反应分析最常用的方法，但使用等效线性化法给出的反应结果进行结构动力可靠性分析会带来很大的误差。将一般非线性体系通过均方最小误差原则等效为 Duffing 非线性体系来进行结构动力可靠性分析。Duffing 非线性体系可以通过 FPK 方程求得其稳态精确解析解，所以使用该等效非线性法进行结构动力可靠性分析不仅计算上方便可行而且精度较高。算例分析表明了等效非线性法分析结果可靠，且比等效线性化法的计算精度有明显提高。

关键词：非线性体系；动力可靠度；等效 Duffing 非线性体系；随机振动；响应

中图分类号：TU311.3；P315.9　　文献标志码：A　　文章编号：1674-4764(2012)03-0070-06

Equivalent Duffing System Method of Nonlinear System Dynamic Reliability Analysis

ZHANG Zhenhao, YANG Weijun

(School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China)

Abstract: Equivalent linear system method is the main method of nonlinear structural system random response analysis. While it would generate big error when the results of equivalent linear system method are used to analyze the structural dynamic reliability. Through minimum mean square error principle, general nonlinear system was converted to equivalent Duffing nonlinear system, based on which the structural dynamic reliability was analyzed. The accurate steady state analytic solution of Duffing nonlinear system can be worked out by FPK equation, so it is not only convenient but also accurate to analyze structural dynamic reliability by using the equivalent nonlinear system method. It is also shown that the analysis results of equivalent nonlinear system method presented here is reliable and the calculation accuracy is higher than equivalent linear system method apparently through the example analysis.

Key words: nonlinear system; dynamic reliability; equivalent Duffing nonlinear system; random vibration; response

非线性体系的动力可靠性问题具有重要的理论与实用意义。但考虑了结构非线性因素后，结构体系在随机激励下的随机反应求解变得十分复杂，其动力可靠性分析的难度也就更大[1]。在非线性体系的随机振动理论中，等效线性化方法是求解非线性系统随机响应时应用得最广泛的方法并且目前仍在得到不断发展[2-6]。与精确解或数值模拟结果的比较表明，等效线性化方法所给出的二阶矩精度通常是令人满意的，但是，等效线性化方法给出的其它统计量，如相关函数、极值等可能是不可靠的。因此，等效线性化法给出的高安全界限时的超越统计量可能是严重错误的；又如对非线性阻尼系统，用等效线性化得到的首次超越概率与实际值之差可达数个量级[7]。

收稿日期：2011-11-10

基金项目：国家自然科学基金资助(51108044)

作者简介：张振浩(1980-)，男，博士，主要从事结构动力可靠度研究，(E-mail)zzh1949@163.com。

鉴于上述原因，学者们致力于寻求更好的近似方法。在这当中，等效非线性体系法实质上就曾经被采用过。等效非线性体系法的思想最早是由 Caughey 提出的[8]，但他提出的方法只适用于原体系是拟线性的情况。朱位秋等[9-10]建立一种适合于求解拟李亚普诺夫系统随机响应的等效非线性系统法。该方法采用的“最佳”等效原则是使等效系统与原系统具有相同的平均能量变化规律（即具有相同的漂移和扩散系数）。笔者采用的等效非线性体系法将保留原体系的刚度非线性特征，而将非线性阻尼等效线性化，即将原非线性体系等效为具有线性阻尼、非线性刚度的结构体系，而这类具有线性阻尼、非线性刚度的非线性体系是可以通过 FPK 方程法求得其稳态反应过程的精确概率分布的。该方法对原非线性体系无特殊要求，具有普适性。

1　拟 Duffing 体系的等效非线性分析

1.1　平稳激励下 2 非线性体系间的等效分析

一般情形下的单自由度非线性体系的振动微分方程可表示为式(1)，

$$\begin{cases} m\ddot{X}(t)+g(X,\dot{X})=F(t) \\ X(0)=\dot{X}(0)=0 \end{cases} \tag{1}$$

式中，$g(X,\dot{X})$ 表示关于 X 和 $\dot{X}$ 的一般情形下的非线性函数。随机激励 $F(t)$ 设为零均值、谱密度为 S_0 的正态白噪声。

设与方程(1)等价的非线性体系为式(2)所示的 Duffing 体系，

$$\begin{cases} m\ddot{X}(t)+c_e\dot{X}+k_e[X+\varepsilon\beta(X)]=F(t) \\ X(0)=\dot{X}(0)=0 \end{cases} \tag{2}$$

式中，c_e、k_e 分别为等效阻尼系数与等效刚度系数；ε 为常数，当 $\varepsilon=0$ 时结构退化为线性体系；$\beta(X)$ 为 X 的奇函数，且有 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\int_0^x\beta(s)\mathrm{d}s=\infty$。

体系之间的误差可以用方程(1)与(2)之间的差值来表示，以 $e(t)$ 表示：

$$e(t)=g(X,\dot{X})-c_e\dot{X}-k_e[X+\varepsilon\beta(X)] \tag{3}$$

误差项 $e(t)$ 也是一个随机过程。为使等效体系最优地逼近原体系，等效准则采用使等效体系与原体系之间的绝对偏差为最小，对于随机过程，等同于使 $e(t)$ 的平方的均值（即 $e(t)$ 的均方值）最小[11]。按此准则来确定等效参数 c_e 与 k_e。

根据式(3)，有

$$E[e^2(t)]=E\{g(X,\dot{X})-c_e\dot{X}-k_e[X+\varepsilon\beta(X)]\}^2 \tag{4}$$

式(4)可以将 $E[e^2(t)]$ 看作是等效参数 c_e、k_e 的二元函数。根据多元函数求极值的方法，可知，要使 $E[e^2(t)]$ 取最小值就相当于要使式(5)成立。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E[e^2(t)]}{\partial c_e}=0 \\ \dfrac{\partial E[e^2(t)]}{\partial k_e}=0 \end{cases} \tag{5}$$

根据式(5)，并利用求数学期望与求导运算间的可交换性，最终整理可得式(6)。

$$\begin{cases} E[\dot{X}g(X,\dot{X})]-c_eE(\dot{X}^2)-k_e\{E(X\dot{X})+\varepsilon E[\dot{X}\beta(X)]\}=0 \\ E[Xg(X,\dot{X})]+\varepsilon E[\beta(X)g(X,\dot{X})]-c_e\{E(X\dot{X})+\varepsilon E[\dot{X}\beta(X)]\}-k_eE\{[X+\beta(X)]^2\}=0 \end{cases} \tag{6}$$

将式(6)联立组成关于 c_e 和 k_e 的方程组，由此求得等效参数 c_e、k_e，见式(7)。

$$\begin{cases} c_e=\dfrac{E[\dot{X}g(X,\dot{X})]E\{[X+\varepsilon\beta(X)]^2\}-E[Xg(X,\dot{X})]\{E(X\dot{X})+\varepsilon E[\dot{X}\beta(X)]\}-\varepsilon E[\beta(X)g(X,\dot{X})]\{E(X\dot{X})+\varepsilon E[\dot{X}\beta(X)]\}}{E(\dot{X}^2)E\{[X+\varepsilon\beta(X)]^2\}-\{E(X\dot{X})+\varepsilon E[\dot{X}\beta(X)]\}^2} \\ k_e=\dfrac{E[\dot{X}g(X,\dot{X})]\{E(X\dot{X})+\varepsilon E[\dot{X}\beta(X)]\}-E[Xg(X,\dot{X})]E(\dot{X}^2)-\varepsilon E[\beta(X)g(X,\dot{X})]E(\dot{X}^2)}{\{E(X\dot{X})+\varepsilon E[\dot{X}\beta(X)]\}^2-E(\dot{X}^2)E\{[X+\varepsilon\beta(X)]^2\}} \end{cases} \tag{7}$$

由式(7)可见，要求解等效参数 c_e、k_e，必须知道上式右端的那些数学期望。在不作任何假设的情况下，这些期望值是很难求得的，因为这需要知道反应 $X(t)$ 和 $\dot{X}(t)$ 联合概率分布，而这是未知的。

因为激励 $F(t)$ 为平稳过程，若略去反应过程的过渡阶段，直接考虑稳态下的反应状况，此时根据平稳过程与它的均方导数在同一时刻上总是互不相关的这一结论，可知平稳位移反应 $X(t)$ 和速度反应 $\dot{X}(t)$ 互不相关，因此有 $E[X(t)\dot{X}(t)]=0$。于是，式(7)可简化为式(8)。

$$\begin{cases} c_e = \dfrac{E[\dot{X}g(X,\dot{X})]E\{[X+\varepsilon\beta(X)]^2\} - E[Xg(X,\dot{X})]\cdot\varepsilon E[\dot{X}\beta(X)] - \varepsilon^2 E[\beta(X)g(X,\dot{X})]\cdot\varepsilon E[\dot{X}\beta(X)]}{E(\dot{X}^2)E\{[X+\varepsilon\beta(X)]^2\} - \varepsilon^2 E^2[\dot{X}\beta(X)]} \\ k_e = \dfrac{E[\dot{X}g(X,\dot{X})]\cdot\varepsilon E[\dot{X}\beta(X)] - E[Xg(X,\dot{X})]E(\dot{X}^2) - \varepsilon E[\beta(X)g(X,\dot{X})]E(\dot{X}^2)}{\varepsilon^2 E^2[\dot{X}\beta(X)] - E(\dot{X}^2)E\{[X+\varepsilon\beta(X)]^2\}} \end{cases} \tag{8}$$

进一步，若参数 $\varepsilon \ll 1$，则可近似地直接略去 ε 的高阶项，于是 c_e、k_e 可简化为式(9)。

$$\begin{cases} c_e = \dfrac{E[\dot{X}g(X,\dot{X})]E(X^2) + 2\varepsilon E[\dot{X}g(X,\dot{X})]E[X\beta(X)] - \varepsilon E[Xg(X,\dot{X})]E[\dot{X}\beta(X)]}{E(\dot{X}^2)E(X^2) + 2\varepsilon E(\dot{X}^2)E[X\beta(X)]} \\ k_e = \dfrac{E[Xg(X,\dot{X})]E(\dot{X}^2) - \varepsilon E[\dot{X}g(X,\dot{X})]E[\dot{X}\beta(X)] + \varepsilon E[\beta(X)g(X,\dot{X})]E(\dot{X}^2)}{E(\dot{X}^2)E(X^2) + 2\varepsilon E(\dot{X}^2)E[X\beta(X)]} \end{cases} \tag{9}$$

在随机等效分析中，通常用等效体系反应的联合概率密度来代替原体系反应的联合概率密度来确定式(7)、(8)或(9)中的数学期望值。由于式(7)、(8)或(9)中的数学期望值是由等效非线性方程(2)得出的，因此这些期望的表达式中将总含有 c_e 和 k_e。所以，与等效线性化方法类似，等效非线性化方法中，为最终得到 c_e 和 k_e 的具体值，通用的方法是采用迭代法求解：首先假设 c_e 和 k_e 的初值；然后将其代入等效方程(2)，由 FPK 方程法求出反应 $X(t)$ 和 $\dot{X}(t)$ 的一阶矩、二阶矩以及二阶联合矩；再由式(7)或(8)或(9)求出第一次迭代的 c_{e1} 和 k_{e1}；如此重复以上步骤，直到求得满足收敛准则的 c_e、k_e 终值；最后，由 c_e、k_e 终值代入等效方程(2)，将求得的解作为原非线性体系的近似解。

1.2 非平稳激励情形的讨论

对于非平稳随机激励的情况，由式(7)、(8)或(9)可明显看出，由于 c_e、k_e 直接与反应的统计矩有关，而非平稳反应的统计矩是时间 t 的函数[12]，因此，体系的等效参数是随时间而变化的，即有

$$c_e = c_e(t), k_e = k_e(t) \tag{10}$$

此时，等效阻尼和等效刚度以及反应统计矩，就需要从 $t_1 = \Delta t$ 的离散时刻起按以上步骤迭代计算，直到计算到所需要的时刻 $t_k = k\Delta t$。

2 结构动力可靠度

通过等效非线性分析将原非线性体系等效为 Duffing 体系后，可通过 FPK 方程求得体系的联合概率密度，于是可以方便地采用经典 Poisson 过程法求得体系的动力可靠度。

Poisson 过程法计算基于首次超越破坏机制的动力可靠度基本公式可表示为式(11)[13]，

$$P_s(b_1, -b_2) = \exp\{-\int_0^T [v_{b1}^+(t) + v_{b2}^-(t)]\mathrm{d}t\} \tag{11}$$

式中，b_1、$-b_2$ 为双侧安全界限，T 为时段长，$v_{b1}^+(t)$、$v_{b2}^-(t)$ 为反应过程与安全界限的交差速率，可由赖斯公式计算见式(12)，[13]

$$v_b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}| f_{X\dot{X}}(b,\dot{x},t)\mathrm{d}\dot{x} \tag{12}$$

式中，$f_{X\dot{X}}(x,\dot{x},t)$ 为反应过程 $X(t)$ 与其导数过程 $\dot{X}(t)$ 的联合概率密度函数。

3 算 例

考虑 van der Pol 振子受高斯白噪声激励，

$$\ddot{X}(t) + \varepsilon'[-1 + X^2(t)]\dot{X}(t) + X(t) = \sqrt{\varepsilon'}W(t) \tag{13}$$

式中，$W(t)$ 是谱密度为 S_0 的高斯白噪声，ε' 为常参数。试基于首次超越破坏机制分析该非线性体系的动力可靠性。

体系(13)为一复杂非线性体系，首先构造与其等价的非线性体系见式(14)，

$$\ddot{X}(t) + c_e\dot{X}(t) + k_e[X(t) + \varepsilon X^3(t)] = \sqrt{\varepsilon'}W(t) \tag{14}$$

式中 c_e、k_e 为根据 2 体系间的误差最小的准则确定的等效参数。在体系(14)中，它们有明确的物理意义，即 c_e、k_e 分别为当 $\varepsilon = 0$ 时 Duffing 体系退化为线性体系时的阻尼系数和刚度系数。

3.1 等效参数的求解

根据式(9)求出 c_e、k_e 的表达式。经比较知：

$$g(X,\dot{X}) = \varepsilon'(-1 + X^2)\dot{X} + X, \beta(X) = X^3$$

于是，根据数学期望的运算性质，式(9)中的各项期望可求得为

$E[\dot{X}g(X,\dot{X})] = -\varepsilon' E(X^2) + \varepsilon' E(X^2\dot{X}^2)$

$E[X\beta(X)] = E(X^4)$

$E[Xg(X,\dot{X})] = \varepsilon' E(X^3\dot{X}) + E(X^2)$

$E[\dot{X}\beta(X)] = E(X^3\dot{X})$

$E[\beta(X)g(X,\dot{X})] = -\varepsilon' E(X^3\dot{X}) + \varepsilon' E(X^5\dot{X}) + E(X^4)$

由以上各式可见,需要求解的各阶矩有:$E(X^2)$、$E(\dot{X}^2)$、$E(X^4)$、$E(X^2\dot{X}^2)$、$E(X^3\dot{X})$、$E(X^5\dot{X})$。对于高阶矩,采用正态降阶法[14]将其 X 或 X 和 $\dot{X}$ 的前二阶矩表示出来:

$E(X^4)=3[E(X^2)]^2, E(X^2\dot{X}^2)=E(X^2)E(\dot{X}^2)$

$E(X^3\dot{X}) = 3E(X\dot{X})E(X^2) = 0$(对平稳反应有 $E(X\dot{X}) = 0$)

$E(X^5\dot{X}) = 5E(X\dot{X})E(X^4) = 0$(对平稳反应有 $E(X\dot{X}) = 0$)

经过化简计算,等效参数 c_e 与 k_e 最终可表示为反应均方值 $E(X^2)$ 的函数见式(15)和式(16)。

$$c_e = \frac{[-\varepsilon' E(\dot{X}^2) + \varepsilon' E(X^2)E(\dot{X}^2)]E(X^2) + 2\varepsilon[-\varepsilon' E(\dot{X}^2) + \varepsilon' E(X^2)E(\dot{X}^2)]\cdot 3E^2(X^2)}{E(X^2)E(\dot{X}^2) + 2\varepsilon E(\dot{X}^2)\cdot 3E^2(X^2)} = \varepsilon'[-1+E(X^2)] \tag{15}$$

$$k_e = \frac{E(X^2)E(\dot{X}^2) + \varepsilon\cdot 3E^2(X^2)\cdot E(\dot{X}^2)}{E(X^2)E(\dot{X}^2) + 2\varepsilon E(\dot{X}^2)\cdot 3E^2(X^2)} = \frac{1+3\varepsilon E(X^2)}{1+6\varepsilon E(X^2)} \tag{16}$$

3.2 等效体系的随机反应求解

根据 FPK 方程法求解等效非线性体系(14),结果如表 1 所示。

表 1　等效体系(14)的解析解

位移反应与速度反应的联合概率密度	$p_{X\dot{X}}(x,\dot{x}) = C\exp[-\frac{c_e}{\pi\varepsilon' S_0}(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_e x^2 + \frac{\varepsilon}{4}k_e x^4)]$
位移反应过程 $X(t)$ 的边缘分布密度	$p_X(x) = C\sqrt{2\pi}\sqrt{k_e}\sigma_{\dot{X}_0}\exp[-\frac{1}{\sigma^2_{X_0}}(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\varepsilon}{4}x^4)]$
速度反应过程 $\dot{X}(t)$ 的边缘分布密度	$p_{\dot{X}}(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{X}_0}}\exp(-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma^2_{\dot{X}_0}})$
期望	$E[X(t)] = 0, E[\dot{X}(t)] = 0$
方差	$\sigma^2_X \approx \sigma^2_{X_0} - 3\varepsilon\sigma^4_{X_0}, \sigma^2_{\dot{X}} = \frac{\pi\varepsilon' S_0}{c_e}$
位移反应均方值	$E(X^2) = \frac{\pi\varepsilon' S_0}{c_e k_e} - 3\varepsilon\frac{\pi^2\varepsilon'^2 S_0^2}{c_e^2 k_e^2}$

表中,常数 C 由归一化条件确定,$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{k_e}\sigma_{\dot{X}_0}}\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\frac{1}{\sigma^2_{X_0}}(\frac{1}{2}x^2+\frac{\varepsilon}{4}x^4)]\mathrm{d}x\}^{-1}$;$\sigma^2_{X_0}$ 和 $\sigma^2_{\dot{X}_0}$ 表示,体系(14)当 $\varepsilon=0$ 时退化为线性体系时的位移反应 $X_0(t)$ 和速度反应 $\dot{X}_0(t)$ 的平稳方差,这 2 个方差由线性随机振动分析理论可求得,见式(17)。

$$\sigma^2_{X_0} = \frac{\pi\varepsilon' S_0}{c_e k_e}, \sigma^2_{\dot{X}_0} = \frac{\pi\varepsilon' S_0}{c_e} \tag{17}$$

根据表中结果,可得式(18)。

$$\begin{cases} c_e = -\varepsilon' + \frac{\pi\varepsilon'^2 S_0}{c_e k_e} - 3\varepsilon\frac{\pi^2\varepsilon'^3 S_0^2}{c_e^2 k_e^2} \\ k_e = \dfrac{1 + 3\varepsilon\frac{\pi\varepsilon' S_0}{c_e k_e} - 9\varepsilon^2\frac{\pi^2\varepsilon'^2 S_0^2}{c_e^2 k_e^2}}{1 + 6\varepsilon\frac{\pi\varepsilon' S_0}{c_e k_e} - 18\varepsilon^2\frac{\pi^2\varepsilon'^2 S_0^2}{c_e^2 k_e^2}} \end{cases} \tag{18}$$

式(18)即是关于 c_e 和 k_e 的二元方程组,但难以求其解析解,只能通过数值方法求数值解。确定 c_e 和 k_e 值后,再将其反代入表 1 中的各式即得各项随机反应结果。

3.3 分析结果及讨论

文献[9]给出了 van der Pol 振子的近似联合概率密度函数,为式(19),

$$f_{X\dot{X}}(x,\dot{x}) = [\pi\sqrt{2\pi S_0}\,erfc(-\sqrt{\frac{2}{S_0}})]^{-1}\exp[-\frac{1}{8S_0}(x^2+\dot{x}^2-4)^2] \tag{19}$$

其中 $\mathrm{erfc}(\cdot)$ 为余补误差函数,$\mathrm{erfc}(x) = 1-\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\exp(-m^2)\mathrm{d}m$。经与数值结果的对比表明,在 ε' 为小参数时式(19)给出的结果是精度较高的。

以下就将本文的计算结果与式(19)的结果以及等效线性化法分析的结果进行比较。若取参数 $\varepsilon=0$，因为等效非线性体系退化为了线性体系，所以此时可以得到将原非线性体系等效线性化分析的结果。

由表 2 计算结果对比可以看到，等效非线性法给出的计算结果与文献[9]的结果甚接近，结果是可靠的。此外，与等效线性化分析结果的比较表明，等效非线性分析所给出的结果精度确有提高，而且有随着等效体系非线性参数 ε 的增大，其计算结果精度也有提高的趋势。因此，等效非线性分析方法是可行的。由表 3 的计算结果可见，若将原非线性体系等效为线性体系分析其动力可靠性，误差确实比较大，结果与采用 Monte-Carlo 数值模拟法[15] 的计算结果吻合较好，等效非线性法的计算结果精度明显提高。

表 2　随机反应分析结果对比

ε'	0.05					0.20				
ε	0.0	0.2		0.5		0.0	0.2		0.5	
方法	等效线性化	文献[9]	本文方法	文献[9]	本文方法	等效线性化	文献[9]	本文方法	文献[9]	本文方法
$E(X)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
σ_X^2	0.276 3	0.349 6	0.305 3	0.349 6	0.315 7	0.564 5	0.671 2	0.614 3	0.671 2	0.654 7
$E(\dot{X})$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{\dot{X}}^2$	0.351 6	0.698 5	0.568 4	0.698 5	0.604 7	0.695 2	0.726 5	0.702 9	0.726 5	0.743 6

表 3　动力可靠度计算结果对比

ε'	0.05				0.20			
ε	0.0	0.2	0.5	Monte-Carlo 模拟法	0.0	0.2	0.5	Monte-Carlo 模拟法
方法	等效线性化	本文方法	本文方法		等效线性化	本文方法	本文方法	
体系动力可靠度	0.895 4	0.939 8	0.945 4	0.971 5	0.854 5	0.946 5	0.957 3	0.978 8

4　结　论

非线性体系的动力可靠性分析精度的高低，其关键在于体系的随机反应分析的精度高低。本文提出的基于等效 Duffing 体系的等效非线性化法，将具有一般普遍性的非线性体系等效为线性阻尼而刚度非线性的这一类可以通过 FPK 方程求得其精确稳态联合概率密度函数的非线性 Duffing 体系。算例分析表明，本文方法的计算结果精度较之等效线性化法的精度要好，提高了非线性体系动力可靠性分析结果的精度。此外，由于所采用的等效非线性体系中含有可控制体系非线性强弱的参数 ε，因此改变 ε 值的大小便可容易获得将原非线性体系等效为不同强弱非线性体系时的分析结果；特别的，当取 ε 为零，便可得到等效线性化的分析结果。这对于问题的研究颇为方便。而 ε 的最佳取值问题，即 ε 取多大值时能够获得精度最高的非线性体系可靠度计算结果，这将是需要进一步开展的研究工作。

最后应指出，分析过程中为了简化计算，略去了小参数的高阶项，同时处理高阶反应矩时所采用的正态降阶法也采用了一些近似假设，这些将会对计算结果的精度产生一定影响。

参考文献：

[1] 杨伟军，张振浩. 基于连续 Markov 过程首超时间概率分析的结构动力可靠性研究[J]. 工程力学，2011，28(7)：124-129.
YANG Weijun, ZHANG Zhenhao. Structural dynamic reliability study based on the probability analysis of first-passage time of continuous markov process [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(7): 124-129.

[2] 苏亮，王毅. 等效线性化方法中系统参数求解的优化算法[J]. 工程力学，2011，28(9)：23-29.
SU Liang, WANG Yi. New optimization algorithm for determining system parameters of equivalent linearization

method[J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(9): 23-29.

[3] Guyader A C, Iwan D. Determining equivalent linear parameters for use in a capacity spectrum method of analysis[J]. Journal of Structural Engineering, 2006, 132(1): 59-67.

[4] Lin Y Y, Miranda E. Noniterative equivalent linear method for evaluation of existing structures [J]. Journal of Structural Engineering, 2008, 134(11): 1685-1695.

[5] 陈衍茂，刘济科. 一种改进的等效线性化方法[J]. 应用力学学报，2008，25(2)：296-298.
CHEN Yanmao, LIU Jike. Improved equivalent linearization method[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2008, 25(2): 296-298.

[6] 王伟，刘必灯，周正华，等. 刚度和阻尼频率相关的等效线性化方法[J]. 岩土力学，2010，31(12)：3928-3933.
WANG Wei, LIU Bideng, ZHOU Zhenghua, et al. Equivalent linear method considering frequency dependent stiffness and damping [J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(12): 3928-3933.

[7] ZHU W Q, HUANG Z L, SUZUKI Y. Equivalent nonlinear system method for stochastically excited and dissipated partially integrable Hamiltonian systems[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2001, 36(5): 773-786.

[8] Caughey T K. On the response of nonlinear oscillators to stochastic excitation. American Society of Mechanical Engineerings, Applied Meehanics Division, 1984, 65: 9-14.

[9] 朱位秋，余金寿. 预测非线性系统随机响应的等效非线性系统法[J]. 固体力学学报，1989，10(1)：34-44.
ZHU Weiqiu, YU Jinshou. Equivalent nonlinear system method for predicting response of nonlinear systems to random excitations [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1989, 10(1): 34-44.

[10] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制[M]. 北京：科学出版社，2003.

[11] 张振浩. 结构动力可靠性理论研究及 RC 梁桥抗震可靠性分析[D]. 长沙：长沙理工大学，2010.

[12] 杨伟军，张振浩，林立. 基于破坏指标界限值的结构抗震可靠度分析[J]. 地震工程与工程振动，2010，30(1)：77-83.
YANG Weijun, ZHANG Zhenhao, LIN Li. Research on seismic reliability of structure based on boundary value of damage index[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2010, 30(1): 77-83.

[13] Ang A H S, Tang W H. Probability concepts in engineering—emphasis on applications to civil and environmental engineering [M]. John Wiley & Sons Ltd, 2007.

[14] 李杰，陈建兵. 随机振动理论与应用新进展[M]. 上海：同济大学出版社，2009.

[15] 刘佩，姚谦峰. 采用重要抽样法的结构动力可靠度计算[J]. 计算力学学报，2009，26(6)：851-855.
LIU Pei, YAO Qianfeng. Dynamic reliability calculation based on importance sampling method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2009, 29(6): 851-855.

（编辑　胡　玲）