第 34 卷第 4 期 2012 年 8 月
土木建筑与环境工程
Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering
Vol. 34 No. 4 Aug. 2012

复合材料层合壳体热弹耦合简化模型

钟铁峰[1a,1b],陈 磊[1a,1b],余文斌[2],张亮亮[1a,1b]

(1. 重庆大学 a. 土木工程学院;b. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室,重庆 400045;
2. 美国犹他州立大学 机械与航空航天工程系,洛根 84322)

摘 要:为有效分析复合材料层合壳体单向耦合的热弹性问题,基于变分渐近方法(VAM)建立热弹性简化壳体模型。根据 Hamilton 扩展原理建立层合壳体三维能量方程,并利用壳体固有小参数将三维能量渐近扩展为系列二维近似能量方程。将近似能量转换为工程常用的 Reissner-Mindlin 形式,并推导三维场重构关系以准确重构沿厚向的三维场分布。通过热/力环境下 4 层复合材料层合壳体的柱形弯曲算例验证:该理论建模速度快(等效单层板模型,相比三维有限元法可减少 2~3 阶计算量);具有很好的非线性逼近能力(收敛于精确解)。

关键词:复合材料力学;简化模型;变分渐近法; 三维应力重构;复合材料层合壳

中图分类号:TB330.1　　文献标志码:A　　文章编号:1674-4764(2012)04-0053-06

A Simplified Thermoelastic Model for Composite Iaminated Shells

ZHONG Yifeng[1a,1b], *CHEN Lei*[1a,1b], *YU Wenbin*[2], *ZHANG Liangliang*[1a,1b]

(1a. School of Civil Engineering; 1b. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China;
2. Department of Mechanics and Aerospace Engineering, Utah State University, Logan 84322, USA)

Abstract: To effectively analyze the one-way coupled thermoelastic problem for composite laminated shells, a simplified thermoelastic shell model based on the variational asymptotic method (VAM) was developed. The 3-D energy functional for composite laminated shell was established according to the Hamilton extended principle. Then the 3-D energy was asymptotic expanded into a series of 2-D approximation energies by taking advantage of the inherent small parameters. Finally, the approximate energy was converted to the form of Reissner-Mindlin model, and the 3-D recovery relationships were deduced to accurately predict the 3-D field distribution along the thickness direction. The cylindrical bending example of a four-layer composite laminated shells under the sinusoidal surface load and temperature field shows that the modeling speed is fast (equivalent single-layer model, which can reduce two or three order calculations compared to the 3-D finite element method), and the nonlinear approximation ability is excellent (convergent to the exact solution).

Key words: composite material mechanics; simplified model; variational asymptotic method; 3D stresses recovery; composite laminated shells

近 20 年来,先进复合材料结构因其高强度、高模量、可设计性等优点已广泛应用于航天航空、机械、土木等领域。由于复合材料不同成分、不同纤维方向的热膨胀系数相差很大,相比于各向同性材料

收稿日期:2012-01-08

基金项目:国家自然科学基金(51078371);中央高校基本科研业务费(CDJZR12200062)

作者简介:钟铁峰(1975-),男,副教授,博士,主要从事复合材料力学、结构力学研究,(E-mail)zhongjy58@sina.com。

对温度的改变更加敏感,复合材料板/壳结构的热响应已成为近年来复合材料力学热点课题之一[1-2],出现了各种复合材料板/壳理论。Ng 等[3]应用古典层合理论(CLT)分析了复合材料圆柱壳的热残余应力和自由振动,由于忽略了横向剪切效应,该理论仅对薄壳有效;为克服 CLT 的缺陷,Pradyumna 等[4]基于一阶剪切变形理论(FOSDT)分析了复合材料层合壳体在热环境下非线性动态稳定性,但模拟弯曲时数值计算结果严重失真,产生"横剪自锁"现象,其原因在于总应变能中包含横向剪切应变能的项在量级上不正确,沿厚度方向变化的剪切应变线性假设与上下表面剪应力为零自相矛盾,需人为地引入与几何形状和材料相关的剪切修正因子来解决这一矛盾;为提高沿厚向的应力/应变预测精度,各国学者纷纷把研究重点转向了高阶剪切变形理论,Li 等[5]用高阶壳理论分析了复合材料圆柱壳在热环境下的非线性屈曲和后屈曲性能,Nosier 等[6]基于层合理论确定湿热环境下正交铺层/角铺层壳体的局部位移函数和层间应力,但仍无法准确预测面内的不连续性和沿厚度方向的横向位移分量。

由上述分析可知,现有板壳热弹性分析理论大多基于位移场假设,无法较好地反映层合板壳的三维效应和铺层之间的相互作用。笔者尝试采用变分渐近法[7-8]分析层合圆柱壳的单向耦合热弹性问题。通过对降维模型近似能量中变分项的渐近修正,得到与原三维能量尽可能接近的近似能量,从而构建一种无需先验性假设且便于工程应用的简化壳体模型,为复合材料层合壳体在工程中的实际应用提供有价值的参考。

1 复合材料层合壳体三维能量表达式

基于 Hamilton 扩展原理,三维结构的弹性动力性能可表述为

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(K-U)+\delta\overline{W}]\mathrm{d}t = 0 \tag{1}$$

式中:t_1 和 t_2 是任意两固定时间;K 和 U 分别是动能和 Helmholtz 自由能;$\delta\overline{W}$ 是外力所做虚功,上划线表明不需要对该项精确变分。

因文中涉及符号较为复杂,故先作表述。$\{\}_{;\alpha} = \dfrac{\partial\{\}}{\partial x_\alpha}\dfrac{1}{A_\alpha}$,$A_\alpha(x_1,x_2)=\sqrt{\boldsymbol{a}_\alpha\cdot\boldsymbol{a}_\alpha}$ 为 Lamé 参数($\boldsymbol{a}_\alpha = \partial\boldsymbol{r}/\partial x_\alpha$,$\boldsymbol{r}$ 为壳体参考面上任一点到空间固定点 O 的位置矢量,如图1所示);希腊字母下标 $i(j)=1,2,3$,拉丁字母下标 $\alpha(\beta)=1,2$;$\langle\rangle$ 表示沿厚度方向的定积分;h,R,l 分别为壳体厚度、半径和翘曲变形值。

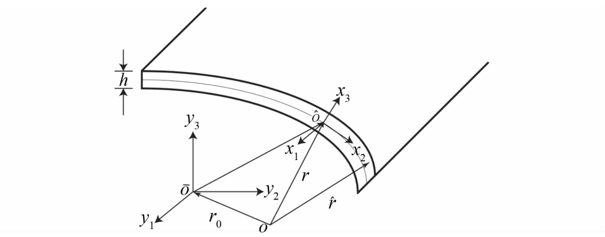

图1 层合壳体几何构型及坐标系

由于仅考虑单向耦合热弹性问题,因壳体变形引起的温度改变忽略不计,得到无二次项的 Helmholtz 自由能泛函[9]:

$$U = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha}T\right)\varphi \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{D}$ 为 6×6 阶三维材料矩阵;$\boldsymbol{\alpha}$ 为 6×1 阶三维热膨胀系数列阵;T 为相对于零应力状态的温差;$\varphi = 1 + x_3(k_{11}+k_{22}) + O(h^2/R^2)$ 为壳体几何修正系数,其中 $k_{\alpha\beta}$ 为壳体面外曲率,因选用坐标系为图1所示曲率线,$k_{12}=k_{21}=0$。

$\boldsymbol{\Gamma}$ 为三维应变场[10],可定义为

$$\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma_h\boldsymbol{w} + \Gamma_\varepsilon\varepsilon + \Gamma_{Rh}\boldsymbol{w} + \Gamma_{R\varepsilon}\varepsilon + \Gamma_{l_\alpha}\boldsymbol{w}_{;\alpha} \tag{3}$$

式中:为相应的算子;

$$\boldsymbol{\Gamma} = [\Gamma_{11} \quad 2\Gamma_{12} \quad 2\Gamma_{22} \quad 2\Gamma_{13} \quad 2\Gamma_{23} \quad \Gamma_{33}]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{w} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^{\mathrm{T}}$$
$$\varepsilon = [\varepsilon_{11} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22} \quad \kappa_{11} \quad \kappa_{12}+\kappa_{21} \quad \kappa_{22}]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

其中:$\varepsilon_{\alpha\beta}$,$\kappa_{\alpha\beta}$ 统称二维广义应变,其阶数分别用 n,n/h 表示;w_i 为未知翘曲函数,若将参考面定义为壳体中面,则 w_i 须满足如下3个约束

$$\langle w_i(x_1,x_2,x_3)\rangle = 0 \tag{5}$$

壳体参考面上质点的动能和外力所做虚功可分别表示为

$$K_{2D} = \mu(\dot{U}_1^2+\dot{U}_2^2+\dot{U}_3^2)/2 \tag{6}$$

$$\delta\overline{W}_{2D} = \delta U_i f_i + \delta\bar{\psi}_\alpha m_\alpha \tag{7}$$

式中:μ 为质量密度;U_i 为沿坐标轴 x_i 的位移,其上的点表示对时间求导;$\delta\bar{\psi}_\alpha = -\delta U_{3;\alpha}$ 为虚拟旋转;广义力 f_i 和力矩 m_α 可定义为

$$f_i = \langle p_i\rangle + \tau_i + \beta_i,\ m_\alpha = \langle x_3 p_\alpha\rangle + h(\tau_\alpha - \beta_\alpha)/2 \tag{8}$$

式中:p_i,τ_i,β_i 分别为体力、壳体顶/底面表面力。

由式(1)、(6)和式(7),壳体参考面的动力性能可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(K_{2D}-U)+\delta\overline{W}_{2D}]\mathrm{d}t = 0 \tag{9}$$

由于式(9)中存在未知翘曲函数 w_i,若直接求解该式,将会遇到与求解原三维问题同样的困难。

常规做法是对翘曲场作先验性假设，由于复合材料的各向异性和非均质性，这种假设可能会产生较大的误差。变分渐近法可利用壳体固有的小参数对式(9)的变分项进行渐近分析得到 w_i，从而构建与原三维模型尽可能接近的二维壳体模型。

2　降维方法及近似能量推导

对壳体结构，可选择 $h/l \ll 1, h/R \ll 1$ 作为变分渐近计算所需的小参数，由此可估计各荷载阶数为

$$hp_3 \sim \tau_3 \sim \beta_3 \sim \mu(h/l)^2 n,$$

$$hp_\alpha \sim \tau_\alpha \sim \beta_\alpha \sim \mu(h/l)n, \alpha T \sim n \tag{10}$$

式中 μ 为弹性材料常量的阶数。

利用 $h/l, h/R$ 可将三维能量渐近扩展为如下形式的系列二维近似能量泛函

$$\Pi = \mu\varepsilon^2[O(1) + O(h/R) + O(h/l) + O(h^2/l^2)]$$

为能处理体多层壳结构，并与二维有限元求解器相衔接，可将三维翘曲场离散为一维有限单元形式，

$$w(x_i) = S(x_3)\boldsymbol{V}(x_1, x_2) \tag{11}$$

式中：S 为形函数；V 为沿横法线方向的翘曲场节点值。

将式(11)代入式(9)，得到离散形式能量泛函为

$$2\Pi = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{h\varepsilon}\varepsilon + \boldsymbol{D}_{Rh\varepsilon}\varepsilon + \boldsymbol{D}_{hRh}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{D}_{hR\varepsilon}\varepsilon + \boldsymbol{D}_{hl_\alpha}\boldsymbol{V}_{;\alpha}) + \varepsilon^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{\varepsilon\varepsilon} + 2\boldsymbol{D}_{\varepsilon R\varepsilon})\varepsilon + \boldsymbol{V}_{;\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{l_\alpha l_\beta}\boldsymbol{V}_{;\beta} + 2\boldsymbol{V}_{;\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{l_{\boldsymbol{\alpha}}\varepsilon}\varepsilon - 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}_h + \boldsymbol{\alpha}_{Rh}) - 2\varepsilon^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon + \boldsymbol{\alpha}_{R\varepsilon}) - 2\boldsymbol{V}_{;\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{l_\alpha} + 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{L}$ 为荷载相关项；新引入的与几何形状和材料属性有关的变量为

$$\boldsymbol{E} = ([\boldsymbol{\Gamma}_h S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}[\Gamma_h S]\varphi), \boldsymbol{D}_{h\varepsilon} = ([\Gamma_h S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\Gamma_\varepsilon\varphi),$$

$$\boldsymbol{D}_{hl_\alpha} = ([\Gamma_h S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}[\Gamma_{l_\alpha} S]), \boldsymbol{D}_{\varepsilon\varepsilon} = (\Gamma_\varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\Gamma_\varepsilon\varphi),$$

$$\boldsymbol{D}_{l_\alpha l_\beta} = ([\Gamma_{l_\alpha} S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}[\Gamma_{l_\beta} S]), \boldsymbol{D}_{l_\alpha\varepsilon} = ([\Gamma_{l_\alpha} S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\Gamma_\varepsilon),$$

$$\boldsymbol{D}_{hRh} = ([\Gamma_h S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}[\Gamma_{Rh} S]), \boldsymbol{D}_{hR\varepsilon} = ([\Gamma_h S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\Gamma_{R\varepsilon}),$$

$$\boldsymbol{D}_{Rh\varepsilon} = ([\Gamma_{Rh} S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\Gamma_\varepsilon), \boldsymbol{D}_{\varepsilon R\varepsilon} = ([\Gamma_\varepsilon S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\Gamma_{R\varepsilon}),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_h = ([\Gamma_h S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha}T\varphi), \alpha_\varepsilon = (\Gamma_\varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha}T\varphi),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{l_\alpha}(\boldsymbol{\alpha}_{Rh}, \boldsymbol{\alpha}_{R\varepsilon}) = ([\Gamma_{l_\alpha}(\Gamma_{Rh}, \Gamma_{R\varepsilon})S]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha}T) \tag{13}$$

式(5)翘曲约束的离散形式可表示为

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\psi = 0 \tag{14}$$

式中：$\boldsymbol{H} = [S^{\mathrm{T}}S]$；$\boldsymbol{\psi}$ 为零初始曲率 E_0 的正交化核心矩阵，$\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{I}$。这样，未知翘曲函数的求解问题转化为式(14)约束下式(12)最小化问题。

2.1　零阶近似

应用变分渐近法，需根据不同阶数找到泛函的主导项。式(12)中与未知翘曲函数有关的零阶近似主导项为

$$2\Pi_0 = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{h\varepsilon 0}\varepsilon + \varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\varepsilon\varepsilon 0}\varepsilon - 2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{h0} - 2\varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{\varepsilon 0} \tag{15}$$

式中：$\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{D}_{h\varepsilon 0}, \boldsymbol{D}_{\varepsilon\varepsilon 0}, \boldsymbol{\alpha}_{h0}, \boldsymbol{\alpha}_{\varepsilon 0}$ 分别由式(14)中 $\varphi = 1$（无几何修正）定义的相关矩阵。

相应的零阶翘曲函数为

$$\boldsymbol{V}_0 = \hat{\boldsymbol{V}}_0\varepsilon + \boldsymbol{V}_{\mathrm{T}} \tag{16}$$

将式(16)代入式(15)得到渐近修正到 $O(1)$ 阶的能量泛函为

$$2\Pi_0 = \varepsilon^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{h\varepsilon 0} + \boldsymbol{D}_{\varepsilon\varepsilon 0})\varepsilon + \varepsilon^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{h\varepsilon 0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}} - \hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{h0} - 2\boldsymbol{\alpha}_{\varepsilon 0}) \tag{17}$$

这与如下形式的热弹性古典层合模型相一致，

$$2\Pi_0 = \varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\varepsilon + 2\varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{T}} \tag{18}$$

式中：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{N}_{\mathrm{T}}$ 分别为二维刚度矩阵和温度产生的应力合力，其计算式为

$$\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{h\varepsilon 0} + \boldsymbol{D}_{\varepsilon\varepsilon 0}, \boldsymbol{N}_{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{D}_{h\varepsilon 0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}} - \hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{h0})/2 - \boldsymbol{\alpha}_{\varepsilon 0} \tag{19}$$

2.2　一阶近似

零阶近似可用于分析薄壳的全局性能和面内分量，更高阶近似可用来分析对中厚壳失效十分重要的面外应力和应变（σ_{i3}, Γ_{i3}），从而构建更精确壳体模型。

首先，将能量泛函渐近修正到 $O(h/R)$ 阶以考虑初始曲率效应，$O(h/R)$ 阶翘曲因对能量无贡献，可不必计算。得到

$$2\Pi_R = \varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_R\varepsilon - 2\varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{TR} \tag{20}$$

式中：

$$\boldsymbol{A}_R = \boldsymbol{A} + \hat{V}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^*\hat{\boldsymbol{V}}_0 + \boldsymbol{D}_{\varepsilon\varepsilon}^* + 2\hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{h\varepsilon}^* + \boldsymbol{D}_{hR\varepsilon} + \boldsymbol{D}_{Rh\varepsilon}) + 2\boldsymbol{D}_{\varepsilon R\varepsilon} + \hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{hRh} + \boldsymbol{D}_{hRh}^{\mathrm{T}})\hat{\boldsymbol{V}}_0 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{N}_{TR} = \boldsymbol{N}_T + \boldsymbol{\alpha}_\varepsilon^* + \boldsymbol{\alpha}_{R\varepsilon} - (\boldsymbol{D}_{h\varepsilon}^* + \boldsymbol{D}_{hR\varepsilon} + \boldsymbol{D}_{Rh\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}} + \hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\alpha}_{Rh} + \boldsymbol{\alpha}_h^* - (\boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{D}_{hRh} + \boldsymbol{D}_{hRh}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}] \tag{22}$$

其中带星矩阵由 $\varphi - 1$ 代替式(14)的 φ 定义。

其次，将能量渐近修正到 $O(h^2/l^2)$ 以考虑横向剪切变形。为此，将零阶翘曲函数摄动为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{V}_1 \tag{23}$$

将式(23)代回式(17)，可得到一阶近似的总能量泛函主导项为

$$2\Pi_1 = \boldsymbol{V}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{V}_1 + 2\boldsymbol{V}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_\alpha\varepsilon_{;\alpha} + 2\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{T}\boldsymbol{L}_{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{V}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{24}$$

式中：

$$\boldsymbol{D}_\alpha = (\boldsymbol{D}_{hl_\alpha} - \boldsymbol{D}_{hl_\alpha}^{\mathrm{T}})\hat{\boldsymbol{V}}_0 - \boldsymbol{D}_{l_\alpha\varepsilon}, \boldsymbol{L}_{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{D}_{hl_\alpha} - \boldsymbol{D}_{hl_\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{V}_{T;\alpha} + \boldsymbol{\alpha}_{l_\alpha;\alpha} \tag{25}$$

相应的一阶翘曲可求解为

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_{1\alpha}\varepsilon_{;\alpha} + \boldsymbol{V}_{1\mathrm{T}} + \boldsymbol{V}_{1\mathrm{L}} \tag{26}$$

最后得到渐近修正到 $O(h^2/l^2)$，$O(h/R)$ 的总能量泛函为

$$2\Pi_1 = \varepsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_R\varepsilon + \varepsilon_{;\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_\alpha\varepsilon_{;\alpha} + 2\varepsilon_{;1}^{\mathrm{T}}C\varepsilon_{;2} - 2\varepsilon^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{F}) \tag{27}$$

式中：

$$\boldsymbol{B}_\alpha = \hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{l_\alpha l_\alpha}\hat{\boldsymbol{V}}_0 + \boldsymbol{V}_{1\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_\alpha, \boldsymbol{C} = \hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{l_1 l_2}\hat{\boldsymbol{V}}_0 + (\boldsymbol{V}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2 + \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{12})/2$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{D}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{1\mathrm{L};\alpha} + \boldsymbol{V}_{1\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{;\alpha}) - \hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L},$$

$$\boldsymbol{F}_T = \boldsymbol{N}_{TR} + \hat{\boldsymbol{V}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{l_\alpha l_\beta}\boldsymbol{V}_{T;\alpha\beta} + (\boldsymbol{V}_{1\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{T};\alpha} + \boldsymbol{D}_\alpha^{\mathrm{T}}V_{1\mathrm{T};\alpha})/2 \tag{28}$$

2.3 近似能量转换及三维场重构

尽管式(27)能量泛函渐近修正到 $O(h^2/l^2)$，$O(h/R)$ 阶，但因含有广义应变的导数 $\varepsilon_{;\alpha}$，难以直接应用。为得到实用的能量范函，可将式(27)转换为工程中常用的 Reissner-Mindlin 模型形式。

在 Reissner-Mindlin 模型中有两个附加横向剪切应变 $\gamma = [2\gamma_{13} \quad 2\gamma_{23}]^{\mathrm{T}}$。Reissner-Mindlin 模型应变量 $\boldsymbol{R}$ 与 ε 的关系可表示为

$$\varepsilon = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{D}_\alpha\boldsymbol{\gamma}_{;\alpha} \tag{29}$$

式中：

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{R} = [\varepsilon_{11}^* \quad 2\varepsilon_{12}^* \quad \varepsilon_{22}^* \quad \kappa_{11}^* \quad \kappa_{12}^* + \kappa_{21}^* \quad \kappa_{22}^*]^{\mathrm{T}} \tag{30}$$

将式(29)代入式(27)，可得到由 Reissner-Mindlin 应变量表示的能量泛函为

$$2\Pi_1 = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{R} - 2\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_\alpha\boldsymbol{\gamma}_{;\alpha} + \boldsymbol{R}_{;\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{R}_{;\alpha} + 2\boldsymbol{R}_{;1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_{;2} - 2\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}) + 2\boldsymbol{\gamma}_{;\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{T}} \tag{31}$$

而实际应用的广义 Reissner-Mindlin 模型形式为

$$2\Pi_R = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{R} + \gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\gamma} - 2\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_R - 2\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_\gamma \tag{32}$$

为得到与式(32)等效的 Reissner-Mindlin 模型，可通过以下 2 个弯矩平衡方程消除所有二维应变量的偏导数

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{F}_\gamma = \boldsymbol{D}_\alpha^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{;\alpha} - \boldsymbol{F}_{R;\alpha}) + [m_1 \quad m_2]^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

由式(33)，可将式(31)改写为

$$2\Pi_1 = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{R} + \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\gamma} - 2\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_R - 2\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_\gamma + U^* \tag{34}$$

式中：

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_T + \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_\gamma = \boldsymbol{D}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{T};\alpha},$$

$$U^* = \boldsymbol{R}_{;\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_\alpha + \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_\alpha\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{D}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{R}_{;\alpha} + 2\boldsymbol{R}_{;1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{R}_{;2} \tag{35}$$

若对任何 $\boldsymbol{R}$，U^* 都趋于零，则可得到渐近修正 Reissner-Mindlin 壳体模型。对于一般各向异性壳体，该项往往并不为零，可通过最小二乘法等优化技术最小化 U^*，等效 Reissner-Mindlin 模型的精确性取决于 U^* 趋近于零的程度。

由于降维模型的可靠性最终取决于其对三维场预测的精确度，因此还需提供重构关系以完善降维模型。由式(3)，重构的三维应变场可表示为

$$\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma_h S(\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{V}_1) + \Gamma_\varepsilon\varepsilon + \Gamma_{Rh}\boldsymbol{V}_0 + \Gamma_{R\varepsilon}\varepsilon + \Gamma_{l_\alpha}S\boldsymbol{V}_{0;\alpha} \tag{37}$$

三维应力场可使用材料本构关系得到，

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha}T \tag{38}$$

3 算例

柱形弯曲问题已作为评估新提出的 3D/2D 分析模型精确性的基准。本章将所述理论和方法编制成变分渐近板/壳分析程序 VAPAS，对图 2 所示 4 层简支复合材料层合壳体在热/载荷下的柱形弯曲问题进行分析。

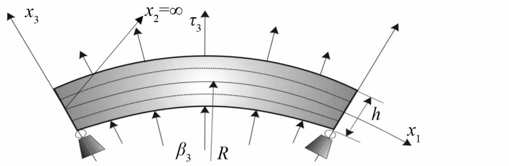

图 2 层合壳体结构示意图

3.1 模型参数

壳体各层倾角为 [90°/0°/90°/0°]；壳厚 h = 1 mm，半径 R =10 cm，夹角 $\varphi = \pi/3$；采用的坐标系为 $x_1 \in [0,\phi]$，$x_2 \in [0,\infty]$，$x_3 \in [-h/2,h/2]$；材料为石墨/环氧复合材料，材料属性为

$$E_1 = 172.4\mathrm{GPa}, E_2 = 6.895\ \mathrm{GPa}, G_{12} = 3.447\ \mathrm{GPa}, G_{22} = 1.379\ \mathrm{GPa}, \alpha_1 = 0.139 \times 10^{-6}/℃, \alpha_2 = 9 \times 10^{-6}/℃, \upsilon_{12} = \upsilon_{22} = 0.25 \tag{38}$$

壳体承受的温度变化和正弦面荷载分别为

$$T_0 = T_c + \xi T_c + \xi^2 T_c + \xi^3 T_c + \xi^4 T_c$$

$$\tau_3 = \beta_3 = p_0 \sin\left(\frac{2\pi x_1}{R\varphi}\right)/2; \tau_\alpha = \beta_\alpha = 0 \tag{39}$$

3.2 数值分析与讨论

图 3(a)～(f)绘出了重构的沿厚度方向应力分布，并与一阶剪切变形理论(FOSDT)、古典层合理论(CLT)和精确解[11-12]进行对比。应变和位移的变化趋势和精度与应力相同，限于篇幅未在此绘出。由于应力分量 $\sigma_{\alpha\beta}$，σ_{33} 分别是正弦和余弦函数，应力分布分别绘于 $x_1 = \pi/6$ 和 $x_1 = \pi/3$ 处。为方便比较，图中纵横坐标分别正则化为

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/p_0, \bar{Z} = x_3/h \tag{40}$$

由图 3 可看出：VAPAS、FOSD 和 CLT 都能较准确地预测面内应力分量 $\sigma_{\alpha\beta}$ 分布，由于 VAPAS 能得到优化剪切刚度矩阵 G，其结果比 FOSDT 和 CLT 更精确；对于横向应力分量 $\sigma_{\alpha 3}$，因特殊的铺层设计(正交铺设)，CLT 无法计算该值，而 FOSDT 因对位移场所做先验性假设，误差较大，VAPAS 与精确解相一致，且重构的应力分布在不同层分界面处连续，这与大多数位移基壳理论完全不同。

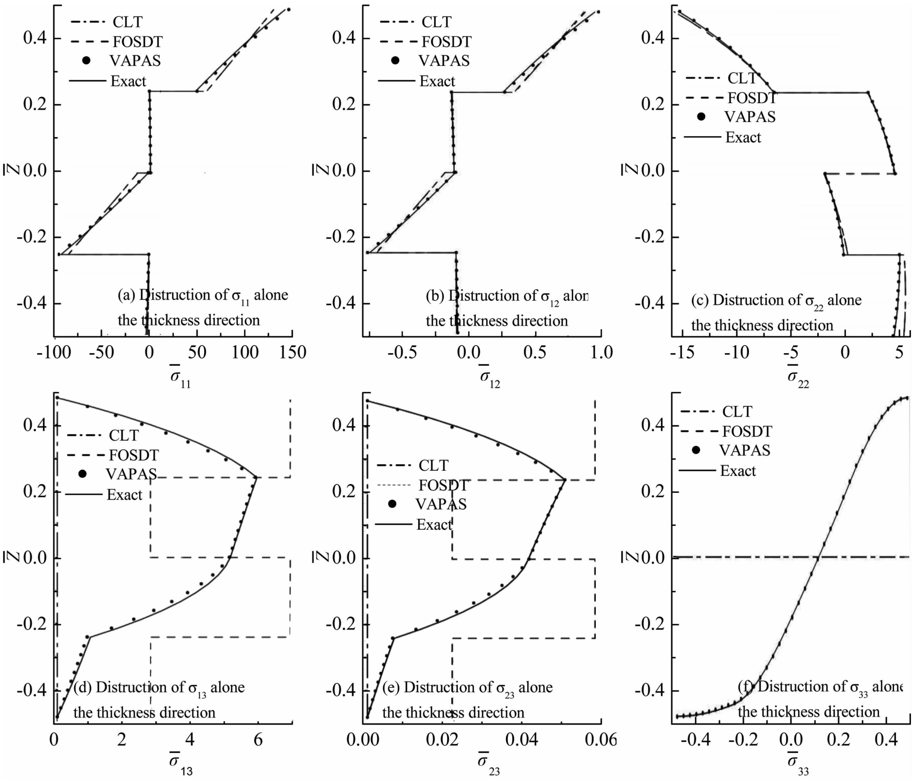

图 3　4 层简支复合材料圆柱壳体在热/载荷下沿厚度方向的应力分布

4　结论

1)基于变分渐近法构建了复合材料圆柱壳热弹性简化 Reissner-Mindlin 模型和重构关系，可考虑热/载荷单向耦合效应，并使用 4 次多项式表示沿厚度方向的任意温度分布，相较于假设温度沿厚度方向线性分布(单层板理论)或沿层线性分布(层合理论)更符合实际情况。

2)在推导降维模型过程中，使用变分渐近法求解未知翘曲函数，不需任何动力学假设和剪切修正因子，也不同于传统的板/壳理论假设翘曲场的一般形式，用高阶翘曲作参数来求解假设函数中的未知参数的方法。

3)通过算例验证：重构的沿厚度方向应力分量与三维精确解吻合很好，且简化模型为等效单层壳模型，计算量与一阶剪切变形理论相当，若壳体层数增加，其高效性更加显著。

参考文献：

[1] Shen H S. Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part II: pressure-loaded shells[J]. Composite Structures, 2011, 93(10): 2496-2503.

[2] Li Z M, Yang D Q. Thermal postbucking analysis of 3D braided composite cylindrical shells [J]. Journal of Mechanics, 2010, 26(2): 113-122.

[3] Ng T Y, Lam K Y, Reddy J N. Dynamic stability of cross-ply laminated composite cylindrical shells [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1998, 40(8):805-823.

[4] Pradyumna S, Gupta A. Nonlinear dynamic stability of laminated composite shells integrated with piezoelectric layers in thermal environment [J]. Acta Mechanica, 2011, 218(3/4): 295-308.

[5] Li Z M, Lin Z Q, Chen G L. Nonlinear buckling and postbuckling behavior of 3D braided composite cylindrical shells under external pressure loads in thermal environments [J]. Journal of Pressure Vessel Technology, 2009, 131(4):258-269.

[6] Nosier A, Miri A K. Boundary-layer hygrothermal stresses in laminated, composite, circular, cylindrical shell panels[J]. Archive of Applied Mechanics, 2010,

80(4):413-440.

[7] Pinhas B Y. New variational-asymptotic formulations for interlaminar stress analysis in laminated plates [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1986, 37(8): 305-321.

[8] Lee C Y. Dynamic variational asymptotic procedure for laminated composite shells: part I: low-frequency vibration analysis [J]. Journal of Applied Mechanics, 2009, 76(9): 110-122.

[9] Reddy J N. Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis [M]. 2 ed. CRC Press, 2004.

[10] 钟轶峰,余文斌. 用变分渐近法进行复合材料层合板仿真及三维场重构[J]. 复合材料学报,2010, 27(4): 174-179.

ZHONG Yifeng, YU Wenbin. Simulation and 3D field recovery of composite laminated plates by use of variational asymptotic method [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2010,27(4):174-179.

[11] Ren J G. Exact solutions for laminated cylindrical shells in cylindrical bending [J]. Composite Science and Technology, 1987, 29(3):169-187.

[12] Jing H S, Tzeng K G. Elasticity solution for laminated anisotropic cylindrical panels in cylindrical bending [J]. Composite Structures, 1995, 30(4):307-317.

(编辑 胡 玲)

(上接第30页)

[16] Lu X L, Cui Q. The bearing capacity character of enlarged base shallow foundation under uplift load [J]. Advanced Materials Research, 2011, 243-249: 2151-2156.

[17] 鲁先龙,杨文智,童瑞铭,等. 输电线路掏挖基础抗拔极限承载力的可靠度分析[J]. 电网与清洁能源,2012,28(1):9-15,44.

LU Xianlong, YANG Wenzhi, TONG Ruiming, et al. Reliability analysis on ultimate uplift bearing capacity of belled pier foundation in transmission line engineering [J]. Power System and Clean Energy, 2012, 28(1): 9-15, 44.

[18] 鲁先龙,童瑞铭,李永祥,等. 输电线路戈壁地基抗剪强度参数取值的试验研究[J]. 电力建设,2011,32(11):11-15.

LU Xianlong, TONG Ruiming, LI Yongxiang, et al. Field tests on parameters of shear strength about gobi gavel soil of transmission lines [J]. Electric Power Construction, 2011,32(11): 11-15.

[19] Pacheco M P, Danziger F A B, Pinto C P. Design of shallow foundations under tensile loading for transmission line towers: an overview [J]. Engineering Geology, 2008, 101(3/4): 226-235.

[20] IEC61773, Overhead lines- testing of foundations for structures [S]. Switzerland: International Electrotechnical Commission, 1996.

[21] 弗洛林 B A. 土力学原理[M]. 徐志英,译. 北京:中国建筑工业出版社,1965.

(编辑 吕建斌)