

doi:10.3969/j.issn.1674-4764.2013.01.001

箱型地铁隧道斜穿地裂缝时扭转变形的解析解

刘东燕¹, 黄伟¹, 罗丽娟², 李东升¹, 赵宝云³

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045; 2. 长安大学 建筑工程学院, 西安 710061;
3. 重庆科技学院 建筑工程学院, 重庆 401331)

摘要:地铁隧道在斜穿活动地裂缝时处于弯、剪、扭的复杂受力状态, 针对箱型隧道物理模型试验中表现突出的扭转变形破坏, 笔者基于薄壁杆件约束扭转理论, 结合箱型隧道斜穿活动地裂缝的实际受力情况, 提出箱型隧道衬砌结构在集中扭矩和表面均布摩擦扭矩作用下的扭转角和剪应力解析解。利用 ANSYS 建立箱型隧道衬砌结构扭转变形有限元模型, 并分析截面扭转角和最大剪应力, 数值模拟结果和用解析法得到的扭转角及最大剪应力吻合良好。

关键词:地铁; 隧道; 扭转变形; 解析法

中图分类号: TU33; U451.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2013)01-0001-06

Torsion Deformation's Analytic Solution of Box Tunnel Crossing Ground Fissure

Liu Dongyan¹, Huang Wei¹, Luo Lijuan², Li Dongsheng¹, Zhao Baoyun³

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China;
2. School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, P. R. China

3. Department of Civil Engineering and Architecture, Chongqing University of Science & Technology, Chongqing 401331, P. R. China)

Abstract: When crossing active ground fissure diagonally, subway tunnel is in the complex stress state of bend, shear as well as torsion. According to outstanding torsional deformation and failure of physical model test for box tunnel, based on the theory of thin-walled under constrained torsion and combined with box tunnel diagonal crossing active ground fissure of the actual stress situation, the torsion angle and shear stress analytical solution of box tunnel lining structure under concentrated torque and uniform friction torque on surface were proposed. By using ANSYS, box tunnel lining structure and torsion deformation's finite element model was established. And the torsion angle cross-section and the maximum shear stress were analyzed. The torsion angle and the maximum shear stress from the result of numerical simulation and analytical were in good anastomosis.

Key words: subways; tunnels; torsional deformation; analytical method

地铁隧道结构在斜穿活动地裂缝时, 地裂缝上下盘的错动使隧道结构在围岩三围压力作用下处于复杂的受力状态。针对西安 3 号线地铁隧道小角度斜穿活动地裂缝的情况, 已开展了箱型地铁隧道小角度(30°)斜穿地裂缝的大比例尺(1:5)物理模拟

试验研究。试验的宏观变形破坏现象表明^[1-2]: 箱型地铁隧道结构在斜穿地裂缝时, 结构变形破坏不对称, 首先发生扭转变形, 然后发生弯曲和剪切变形破坏; 下盘结构变形破坏较上盘结构严重; 纵向裂缝为扭转变形引起。目前结构设计规范未涉及到箱型地

收稿日期: 2012-05-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40602033); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(CHD2010JC129)

作者简介: 刘东燕(1959-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程、防灾减灾工程研究, (E-mail)liudy@cqu.edu.cn。

铁隧道结构截面的抗扭设计,使得工程设计处于“无法可依”的状态,而大型物理模型试验周期时间长且只能定性分析破坏现象,因此对箱型地铁隧道结构斜穿活动地裂缝的扭转变形解析研究具有重要的意义。

20 世纪随着人类对地下空间的开发,隧道技术得到飞快发展,在穿越活动断层、箱型隧道结构方面积累丰富的设计、施工经验。Stirbys 等^[3]和 Dalgic^[4]分别采用扩大断面的结构处理措施和刚性支护与柔性支护相结合地方法来解决隧道穿越断层引起的问题。Park 等^[5]通过现场调查、材料试验分析韩国大邱市箱型地铁隧道结构火灾损伤并提出修复方案, Pavlovic 等^[6-9]对组合箱型结构的弯扭性能进行数值模拟,取得了一定的研究成果。周世军^[10]、黄海东等^[11]研究了箱型结构弯剪耦合的变分解析解和非均匀收缩变形计算,彭建兵等^[12]、范文等^[13]、黄强兵等^[14]、胡志平等^[1]等进行了包括箱型地铁隧道在内的 3 种不同类型隧道斜穿地裂缝变形破坏机制物理模型试验研究,定性分析出整体式隧道结构扭转变形破坏先于弯剪破坏,但关于箱型隧道结构在斜穿地裂缝时扭转变形破坏解析研究尚不多见。

笔者仅考虑箱型地铁隧道在地裂缝处受集中扭矩和围岩分布摩擦扭矩作用下的扭转变形破坏,而忽略弯曲变形及剪切变形影响,通过基本假定,理论推导出地铁隧道扭转变形破坏解析解(扭转剪应力、扭转角)。

1 问题的提出

根据量纲分析法采用几何相似比常数 $C_l = 5$ 制作现浇箱型隧道模型,模型总长 10 m,宽 1 210 mm,高为 1 302 mm,四周壁厚 120 mm,模型混凝土等级采用 C30。地裂缝采用粉细砂充填模拟,倾角为 80° ,与箱型隧道衬砌结构轴线成 30° 夹角。堆载地层按地铁 3 号线某典型地层以相似比常数 $C_l = 5$ 设置厚度,并按实际密实度和重度分层夯实,模型钢筋按等强度原则确定,经计算得模型配筋(见图 1)。

在物理模型试验过程中,将地裂缝的下盘相对固定,通过地裂缝上盘下面的自锁式千斤顶的缓慢下降来模拟地裂缝的活动。其错动量和活动速率通过工控机自锁式千斤顶的运行速率和行程来实现。随着地裂缝上盘的相对下降,上盘土体的沉降量远大于下盘土体,导致在上盘的底部形成脱空区,尽管隧道衬砌结构底部产生的脱空区范围可能大于图 2 所示的三角形 ABC,假设其范围为 AEFC 梯形,但是矩形范围 AEFB 范围内的剪力合力过横截面剪

切中心,所以该矩形范围内的剪力不产生扭矩,故只考虑三角形 ABC 范围内的剪力产生的扭矩。实验过程破坏现象表明:隧道衬砌结构上下、左右壁在地裂缝附近共产生了 7 条纵向裂缝,长度 2.4~6.0 m 不等,纵向裂缝为结构受扭引起。

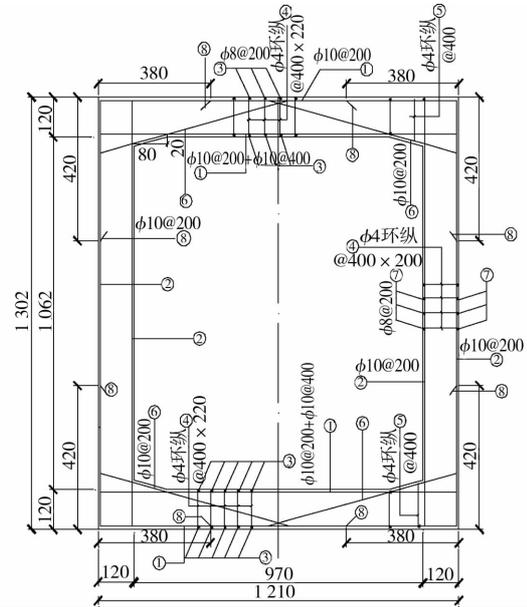


图 1 模型尺寸及配筋示意图

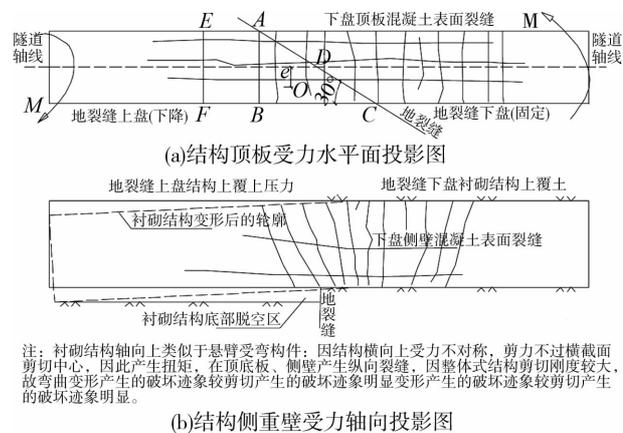


图 2 箱型隧道衬砌结构模型试验受力模式示意图

虽然物理模型试验已宏观体现出结构受扭破坏,但只是定性展现受扭破坏部位、裂缝发展趋势。为定量研究箱型隧道在斜穿地裂缝时的扭转变形破坏,笔者主要以解析解法,辅以数值模拟法分析隧道截面扭转角和扭转剪应力的解析解。为此,将脱空区三角形 ABC 范围内的上覆土压力等效成一个集中力 P , P 作用点在三角形 ABC 的形心 O 处,设 ABC 的形心到隧道轴线的偏心距为 e ($e = AB/6$) (见图 2),则在三角形 ABC 附近产生集中外扭矩 $M = Pe$,箱型隧道衬砌结构在 $M = Pe$ 的作用下发生扭转,在扭转的过程中围岩土体在隧道表面作用

反方向分布摩擦力 f , 分布摩擦力 f 对隧道剪切中心取矩形成沿隧道轴线的分布摩擦扭矩 m 。故在不考虑弯曲和剪切变形的情况下, 隧道结构在地裂缝处的集中扭矩和沿结构表面的分布摩擦扭矩共同作用下达到扭转变形破坏。

2 扭转变形解析解

箱型隧道衬砌结构在截面形式上属于薄壁杆件, 在不过截面剪切中心的横向荷载作用下, 截面将发生扭转变形。在刚开始扭转的过程中, 截面上产生沿壁厚均匀的自由扭转剪应力 τ_s , 自由扭转剪应力 τ_s 在截面形成自由扭矩 M_f 。随着扭转的进行结构产生扭转变形, 支座约束(埋于地裂缝两边的围岩土体内)使截面纵向无法自由翘曲, 此时发生的扭转为约束扭转。在约束扭转过程中, 隧道纵向纤维将伸长或缩短, 从而在截面上产生正应力 σ_w , 此正应力在截面上的分布不均匀, 这引起结构的弯曲并伴随有二次剪应力 τ_w , 二次剪应力在截面上形成附加的二次扭矩 M_w , 因此截面上扭矩应为自由扭转矩 M_f 与二次扭矩 M_w 之和^[15], 即

$$M(z) = M_f + M_w \quad (1)$$

式中: 自由扭矩 $M_f = GJ\varphi'(z)$; G 为结构剪切模量; J 称为隧道截面自由扭转惯性矩; $\varphi(z)$ 截面 z 的扭转角。

2.1 基本假设

箱型隧道衬砌结构在 4 个角处进行了加腋处理, 试验结果也表明结构的 4 个角变形后仍为直角, 因此假定隧道结构截面在扭转过程中沿扭转中心旋转一定角度, 在出平面方向(纵向)可以发生翘曲^[16]。

2.2 约束扭转正应力和剪应力

根据上述基本假定, 箱型隧道衬砌结构在约束扭转的情况下, 其截面外形轮廓线在其自身平面内保持刚性, 在出平面方向可以翘曲。建立直角坐标 xyz 和环形坐标 s (见图 3)。

将环形坐标 s 的起点选择在截面对称轴与顶板中面的交点处, 该点的翘曲位移为零。则隧道截面 z 处各点的翘曲位移为

$$u(z, s) = -\beta'(z)\omega(s) \quad (2)$$

式中: $\beta(z)$ 截面翘曲扭转函数。约束扭转正应变为

$$\varepsilon_w(z, s) = \frac{\partial u(z, s)}{\partial z} = -\beta''(z)\omega(s) \quad (3)$$

因此, 约束扭转正应力为

$$\sigma_w = E\varepsilon_w = -E\beta''(z)\omega(s) \quad (4)$$

式中 E 为隧道结构弹性模量。

定义截面翘曲双力矩为

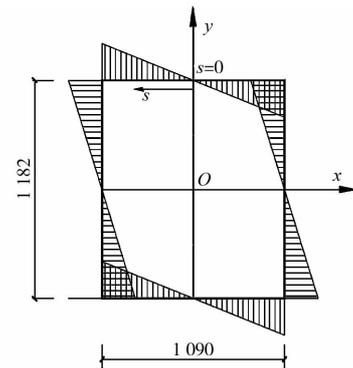


图 3 截面扇性坐标 $\omega(s)$

$$B(z) = \oint \sigma_w \omega(s) dA = -E\beta'' I_\omega \quad (5)$$

式中: $I_\omega = \oint \omega^2(s) dA$, 为截面的扇性惯性矩。将式(5)中 β'' 带入式(4)中得

$$\sigma_w = \frac{B(z)}{I_\omega} \omega(s). \quad (6)$$

选取隧道结构顶板中面一微元体, 由纵向平衡条件^[17]可得

$$\frac{\partial \sigma_w(z, s)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_w(z, s)}{\partial s} = 0. \quad (7)$$

将 $s = 0$ 处切开一个口, 对式(7)沿环向 s 积分得

$$\tau_w = \tau_{w0} + \tau_{w1} \quad (8)$$

式中: τ_{w0} 为积分常数, 为 $s = 0$ 处的常剪应力, τ_{w1} 为相应的开口截面剪应力。

定义截面约束扭转剪应力产生的二次扭矩

$$M_w = B'(z) = -E\beta''' I_\omega \quad (9)$$

对于 τ_{w0} 可利用截面环流方程和翘曲位移连续条件 $\oint u(z, s) ds = 0$ 得

$$\tau_w(z, s) = -\frac{M_w \bar{S}_\omega(s)}{I_\omega t} \quad (10)$$

式中: $\bar{S}_\omega(s) = S_\omega(s) - \frac{\oint S_\omega ds}{\oint ds}$, $S_\omega = \int_0^s \omega(s) dA$ 为扇形静面矩。

由式(1)、(9)可知隧道截面上扭矩为

$$M(z) = GJ\varphi'(z) - E\beta''' I_\omega. \quad (11)$$

设截面上扭矩 $\frac{dM(z)}{dz} = -m(z)$, $m(z)$ 为结构表面的外扭矩集度, 故在前加一个负号。将式(11)带入约束扭转剪应变方程得

$$\beta(z) = \frac{1}{v} [\varphi(z) - \frac{M(z)}{GI_p}] \quad (12)$$

$$\varphi''(z) - k^2 \varphi'(z) = \frac{m(z)v}{EI_\omega} \quad (13)$$

式中: $k^2 = \frac{\tau GJ}{EI_\omega}$ 为截面扭转常数, $v = \frac{I_p - J}{I_p}$ 为结构翘曲剪切系数, $I_p = \oint h^2(s) dA$ 为截面对剪切中心的惯性矩, E 为结构的弹性模量。

式(13)的通解为:

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{shkz} + C_4 \operatorname{chkz} \quad (14)$$

式中 $C_1 \sim C_4$ 为积分常数, 由隧道两端的边界条件确定。

将式(14)带入(12)、(5)、(11)中, 并令隧道结构固定端纵向坐标 $z = 0$, 解出 $C_1 \sim C_4$ 4 个积分常数^[18]

$$C_1 = \varphi_0 + \frac{B_0}{GJ}, C_2 = \frac{M_0}{GJ}, C_3 = \frac{v}{k}(\beta_0 - \frac{M_0}{GJ}),$$

$$C_4 = -\frac{B_0}{GJ}$$

将解出的 $C_1 \sim C_4$ 带入式(14)中得

$$\varphi(z) = \varphi_0 + (\frac{v}{k} \operatorname{shkz})\beta_0 + \frac{1}{GJ}(1 - \operatorname{chkz})B_0 + \frac{1}{GJ}(z - \frac{v}{k} \operatorname{shkz})M_0 \quad (15)$$

式(15)的截面扭转角是在 $m(z) = 0$, 即式(13)对应的齐次方程得到的通解, 当隧道衬砌结构收集集中扭矩 $M = Pe$ 和围岩分布摩擦扭矩 m 时, 需加上微分方程的特解, 经解算得

$$\bar{\omega}(z) = \bar{\omega}_0 + (\frac{v}{k} \operatorname{shkz})\beta_0 + \frac{1}{GJ}(1 - \operatorname{chkz})B_0 + \frac{1}{GJ}(z - \frac{v}{k} \operatorname{shkz})M_0 - \frac{m}{GJ}[\frac{z^2}{2} + \frac{v}{k^2}(1 - \operatorname{chkz})] - \parallel \frac{9L}{15} \frac{Pe}{GJ}[(z-t) - \frac{v}{k} \operatorname{shk}(z-t)] \quad (16)$$

式(16)带入(12)中并考虑到当 $m(z) = 0$ 时 $M(z)$ 为常数

$$\beta(z) = (\operatorname{chkz})\beta_0 - (\frac{k \operatorname{shkz}}{GJv})B_0 + (1 - \operatorname{chkz}) \cdot \frac{1}{GJ}M_0 - \frac{m}{GJ}(z - \frac{1}{k} \operatorname{shkz}) - \parallel \frac{9L}{15} \frac{1 - \operatorname{chk}(z-t)}{GJ}Pe \quad (17)$$

将式(17)带入(5)、(9)中得隧道衬砌结构截面双力矩和二次扭矩

$$B(z) = -GJ(\frac{v \operatorname{shkz}}{k}\beta_0 - \frac{\operatorname{chkz}}{GJ}B_0 - \frac{v \operatorname{shkz}}{GJk}M_0) + \frac{mv}{k^2}(1 - \operatorname{chkz}) - \parallel \frac{9L}{15} \frac{v \operatorname{shk}(z-t)}{k}Pe \quad (18)$$

$$M_\omega(z) = -GJ(vk \operatorname{chkz}\beta_0 - \frac{k \operatorname{shkz}}{GJ}B_0 -$$

$$\frac{v \operatorname{chkz}}{GJ}M_0) - \frac{mv}{k}k \operatorname{shkz} - \parallel \frac{9L}{15} Pe v \operatorname{chk}(z-t) \quad (19)$$

将式(17)带入式(11)中得截面上扭矩

$$M(z) = M_0 - mz - \parallel \frac{9L}{15} Pe \quad (20)$$

式(17)~(20)中, $\parallel \frac{9L}{15}$ 项在 $z > \frac{9L}{15}$ 计入, $t = 9L/15$ 。

3 箱型地铁隧道扭转变形的解析解

根据图 2, 作用在地裂缝处的集中扭矩为 $M = Pe$, 其中 $e = \frac{1}{6}AB = 20.2 \text{ cm}$ 。地裂缝出的集中力 $P = \sigma S_{\Delta ABC}$, 根据模型试验埋置的压力盒取 $\sigma = 0.225 \text{ MPa}$, 所以

$$P = 22.5 \times \frac{1}{2} \times 121 \times 121 \times \cot 40^\circ = 196\,295.22 \text{ N}$$

故作用在地裂缝处的集中扭矩 $M = Pe = 196\,295.22 \times 20.2 = 3\,958\,620.35 \text{ N} \cdot \text{cm}$

随着集中扭矩 $M = Pe$ 的产生, 隧道结构将发生扭转, 围岩土将在隧道侧壁产生摩擦力, 根据物理模型试验, 综合各处的作用力, 取作用在侧壁的平均摩擦应力 $\sigma_m = 0.035 \text{ MPa}$ 。土与隧道侧壁的摩擦系数为 0.265, 由于隧道结构下底面及两侧面脱空, 只有上顶面承受土压力, 沿隧道轴线取 1 cm 宽度为研究对象, 则 1 cm 宽度上顶面的摩擦力 $f = 109 \times 0.265 \times 3.5 = 101.1 \text{ N/cm}$, 此摩擦力 f 对剪切中心取矩得到隧道表面上的分布摩擦扭矩 $m = 118.2 \times f/2 = 5\,974.86 \text{ N} \cdot \text{cm/cm}$ 。

由于分布摩擦扭矩 m 的作用效应与集中扭矩 $M = Pe$ 的作用效应相反, 故取 $m = -5\,974.86 \text{ N} \cdot \text{cm/cm}$ 。将集中扭矩和分布扭矩带入式(17)~(20)中, 计算出每 $L/15$ 截面的扭转角, 扭转剪应力, 见表 1。

结合以前所做工作^[19], 使用 ANSYS 程序进行数值模拟, 箱型隧道衬砌结构选用 BEAM188 单元, 在地裂缝 ($9L/15$) 处施加集中扭矩, 并沿隧道结构表面施加均布的摩擦扭矩得出每 $L/15$ 截面上的最大剪应力和截面转角(见表 1 和图 4)。

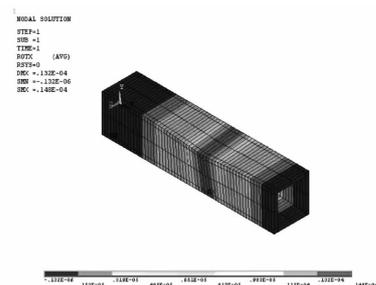


图 4 结构截面扭转角等值云图

表 1 截面转角和最大扭转剪应力分析结果

截面位置	截面转角 $\varphi(z)/10^{-6}$ rad		截面大扭转剪应力 $\tau(z)/10^4$ Pa	
	数值模拟法	解析法	数值模拟法	解析法
0	0.00	0.00	-0.62	-0.86
L/15	-0.12	-0.17	0.10	0.09
2L/15	0.20	0.12	1.05	1.04
3L/15	0.96	0.87	2.01	1.97
4L/15	2.17	2.08	2.97	2.91
5L/15	3.81	3.76	3.93	3.84
6L/15	5.90	5.90	4.89	4.80
7L/15	8.43	8.51	5.85	5.78
8L/15	11.40	11.57	6.80	6.82
9L/15	14.81	15.10	7.76	7.99
10L/15	11.24	11.43	-7.39	-7.11
11L/15	8.11	8.22	-6.43	-6.07
12L/15	5.42	5.47	-5.47	-5.10
13L/15	3.17	3.18	-4.52	-4.16
14L/15	1.36	1.36	-3.56	-3.26
L	0.00	0.00	-2.60	-2.40

4 结 语

基于薄壁杆件约束扭转理论得出箱型地铁隧道在斜穿活动地裂缝时扭转角和扭转剪应力解析解,结论与建议如下:

1)箱型地铁隧道衬砌结构在地裂缝(9L/15)处截面扭转角和最大剪应力均达到最大值,从地裂缝处向两端延伸逐渐减小。

2)根据刚周边假定,解析法和数值模拟法得出的截面转角和最大扭转剪应力沿隧道轴线每 L/15 截面的变化趋势是一致的。在距离地裂缝相同位置,下盘截面的最大扭转剪应力大于上盘截面的最大扭转剪应力,因此下盘的扭转破坏程度应大于上盘,这与物理模型试验表现出下盘扭转裂缝多于、长于上盘裂缝是大体一致。

3)鉴于地铁隧道斜穿地裂缝时在地裂缝附近扭转破坏较大,应进行专门的抗扭设计,如设置特殊变形缝以释放该位置的扭转变形并做好相应的防水处理。

参考文献:

[1] 胡志平,彭建兵,王启耀,等. 箱型地铁隧道 30°斜穿地

裂缝的相似模型试验设计[J]. 四川大学学报:工程科学版,2010,42(2):69-74.

Hu Z P, Peng J B, Wang Q Y, et al. Study on the design of similar model test of box tunnel crossing ground fissure with 30° [J]. Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition, 2010, 42(2): 69-74.

[2] 胡志平,彭建兵,黄强兵,等. 箱型隧道 30°斜穿活动地裂缝的变形破坏模式试验研究[J]. 铁道学报,2011,33(4):105-111.

Hu Z P, Peng J B, Huang Q B, et al. Physical model test of box tunnel crossing active ground fissure with 30° [J]. Journal of the China Railway Society, 2011, 33(4):105-111.

[3] Stirbys A F, Radwanski Z R, Procror R J, et al. Los Angeles metro rail project-geologic and geotechnical design and construction constraints [J]. Engineering Geology, 1999, 51(3):203-224.

[4] Dalgic S. Tunneling in squeezing rock, the Bolu tunne, Anatolian Motorway, Turkey [J]. Engineering Geology, 2002(67):73-96.

[5] Park S H, Oh H H, Shin Y S, et al. A case study on the fire damage of the underground and its repair works [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2006, 21(3/4):328.

[6] Pavlovic L, Froschmeier B, Kuhlmann U, et al. Finite element simulation of slender thin-walled box columns by implementing real initial conditions [J]. Advances in Engineering Software, 2012, 44(1): 63-74.

[7] Vo T P, Lee J. Flexural-torsional buckling of thin-walled composite box beam [J]. Thin-Walled Structures, 2007,45(9):790-798.

[8] Lee A J, Lee S H. Flexural-torsional behavior thin-walled composite beams [J]. Thin-Walled Structures, 2004, 42(9):1293-1305.

[9] Yoon S C, Horita Z, Kem H S. Finite element analysis of plastic deformation behavior during high pressure torsion processing [J]. Journal of Materials Processing Technology, 2008, 201:32-36.

[10] 周世军. 剪力滞对超静定箱梁结构性能的影响分析[J]. 土木建筑与环境工程,2010,32(4):7-11.

Zhou S J. Effect of shear lag on structural behaviours in indeterminate box-girders [J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2010, 32(4):7-11.

[11] 黄海东,向中富,郑皆连. PC 箱梁桥非均匀收缩变形分析[J]. 土木建筑与环境工程,2009, 31(4):60-65.

- Huang H D, Xiang Z F, Zheng J L. Analysis of differential shrinkage deflection for PC box-girder bridges [J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2009, 31(4): 60-65.
- [12] 彭建兵, 胡志平, 门玉明, 等. 马蹄形隧道 40°斜穿地裂缝的变形破坏机制试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(11): 2258-2265.
- Peng J B, Hu Z P, Men Y M, et al. Test study of deformation and damage mechanism of horseshoeshaped tunnel crossing ground fissure with 40° [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(11): 2258-2265.
- [13] 范文, 邓龙胜, 彭建兵, 等. 地铁隧道穿越地裂缝带的物理模型试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(9): 1917-1923.
- Fan W, Deng L S, Peng J B, et al. Study of the physical model experiment of subway tunnel crossing the ground fissure belt [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(9): 1917-1923.
- [14] 黄强兵, 彭建兵, 门玉明, 等. 地裂缝对地铁明挖整体式衬砌隧道影响机制的模型试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(11): 2324-2331.
- Huang Q B, Peng J B, Men Y M, et al. Model test study on effect of ground fissure on open-cut metro tunnel with integral lining [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(11): 2324-2331.
- [15] 陈伯真. 薄壁结构力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1988: 39-77.
- [16] 黄剑源. 薄壁结构的扭转分析——曲线梁与斜支箱型梁[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1998: 4-5.
- [17] 张元海. 闭口薄壁杆件的约束扭转剪应力分析[J]. 兰州交通大学学报, 2008, 27(4): 1-3.
- Zhang Y H. Study on shear stress of thin-walled member with closed section under restrained torsion [J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2008, 27(4): 1-3.
- [18] 包世华, 周监. 薄壁杆件结构力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006: 95-112.
- [19] 黄伟. 地铁隧道斜穿活动地裂缝时扭转变形破坏解析研究[D]. 西安: 长安大学, 2011.

(编辑 胡英奎)