

doi:10.3969/j.issn.1674-4764.2013.01.018

## 预应力混凝土梁长期变形的随机性分析

徐腾飞<sup>1</sup>, 向天宇<sup>1</sup>, 杨成<sup>1,2</sup>, 赵人达<sup>1</sup>

(1. 西南交通大学 桥梁工程系, 成都 610031;

2. 重庆大学 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045)

**摘要:** 由于混凝土收缩徐变具有显著的不确定性, 需要采用随机方法进行有概率保证意义的长期变形分析。采用基于响应面的蒙特卡洛抽样技术, 将 GL2000 模型中影响长期变形的因素作为随机变量, 建立了预应力混凝土梁的长期变形随机性分析模型。利用该模型对某预应力混凝土简支梁开展了长期变形随机分析, 同时对模型中各个随机变量进行了敏感性分析与参数分析。结果表明, 对长期变形有较大影响的随机变量有: 徐变模型的不确定性, 弹性模量模型的不确定性, 二期恒载值的不确定性, 张拉控制应力值的不确定性; 为抑制梁体长期变形, 施工控制中应严格控制张拉应力精度与推迟二恒加载时间。

**关键词:** 预应力混凝土梁; 收缩徐变; 随机性; 敏感性; 响应面

**中图分类号:** TU378; U24 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2013)01-0111-06

## Uncertainty Analysis of Long-term Deformation for Prestressed Concrete Beam

Xu Tengfei<sup>1</sup>, Xiang Tianyu<sup>1</sup>, Yang Cheng<sup>1,2</sup>, Zhao Renda<sup>1</sup>

(1. Department of Bridge Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031, P. R. China;

2. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

**Abstract:** Owing to the randomness of shrinkage and creep of concrete, random analysis method should be adopted to give a reasonable result with probabilistic guarantee. Stochastic variables for long-term analysis with GL2000 model about creep and shrinkage of concrete were presented. Combining Monte Carlo sampling with the response surface method, the stochastic analysis model was performed which is on time-variant deflection of prestressed concrete bridge. The long-term deflection of a prestressed concrete bridge was analyzed by this model. Sensitivity analysis and parametric study were carried out. And the uncertainty of creep model, elastic modulus of concrete, magnitude of sustained load, and prestress forces are the most important factors for long-term deflection. Furthermore, controlling accuracy of prestress forces and delaying the loading time are helpful to inhibit long-term deflection.

**Key words:** prestressed concrete bridge; creep and shrinkage; stochastic; sensitivity; response surface method

**收稿日期:** 2012-04-28

**基金项目:** 国家教育部博士点基金(20110184120010); 铁道部科技项目(2010G018-A-1); 中央高校基本科研业务费专项资金科技创新项目(SWJTU11CX011); 重庆大学山地城镇建设与新技术教育部重点实验室访问学者基金(2010001)

**作者简介:** 徐腾飞(1983-), 男, 博士, 主要从事结构非线性与结构随机性行为研究, (E-mail)soar1120@gmail.com。

由于混凝土的收缩徐变效应,预应力混凝土桥梁在运营阶段出现梁体持续变形的现象。大跨度预应力混凝土桥梁运营数年后,70%以上均出现了不同程度的病害,其主要原因就包括混凝土收缩徐变大<sup>[1]</sup>。而在高速铁路桥梁中,收缩徐变引起的线路不平顺性,将影响列车运营的安全性及舒适性。因此正确的预测桥梁因收缩徐变引起的长期变形尤为重要。

目前采用确定性徐变计算方法,得到的跨中下挠值与实际相差达 30%以上,理论计算与桥梁实际受力状态存在明显差异<sup>[1]</sup>。Bažant 等<sup>[2]</sup>指出,影响混凝土收缩徐变的因素众多,变化规律复杂,具有时变性和随机性。1983 年 Madsen 等<sup>[3]</sup>率先开展了 BP 模型的参数与模型随机性研究,进而利用拉丁超立方抽样方法研究收缩徐变效应的均值与方差<sup>[2]</sup>。Yang<sup>[4]</sup>基于 ACI209 与 MC90 模型分析了预应力构件的收缩徐变的不确定性与敏感性。采用改进的拉丁超立方抽样技术,熊学玉等<sup>[5]</sup>研究了超长预应力混凝土框架结构由徐变引起的时变位移和应力的随机性问题。

学者们提出了多种混凝土收缩徐变模型,代表性的有 ACI209 模型、CEB-FIP 90 模型、B3 模型和 GL2000 模型。已有研究表明,B3 模型和 GL2000 模型对已知试验数据描述较好,表现出了相对较小的模型离散性<sup>[6]</sup>。鉴于 B3 模型的参数中所需要的混凝土配合比在桥梁设计时通常是未确定的,本文采用 GL2000 模型<sup>[7-8]</sup>考虑混凝土的收缩徐变特性,并利用基于响应面的蒙特卡洛抽样技术,进行收缩徐变随机分析。以铁路 40 m 简支梁为例,研究了各个徐变参数对结构长期变形的敏感特性,提出设计施工中控制收缩徐变效应的建议。

## 1 混凝土长期应变随机分析

GL2000 模型<sup>[6-8]</sup>定义由应力产生的长期应变为

$$\epsilon(t, t_0) = \sigma J(t, t_0) = \sigma \left( \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_c} \right) \quad (1)$$

式中:  $t$  和  $t_0$  分别为计算龄期和加载龄期;  $E_c$  和  $E_c(t_0)$  分别为 28 d 和加载龄期时混凝土弹性模量;  $\phi(t, t_0)$  为徐变系数,表达式为:

$$\phi(t, t_0) = 2\Phi(t_c) \left[ \frac{(t-t_0)^{0.3}}{(t-t_0)^{0.3} + 14} \right] +$$

$$\Phi(t_c) \sqrt{\frac{7}{t_0}} \sqrt{\frac{(t-t_0)}{(t-t_0)+7}}$$

$$2.5\Phi(t_c) (1 - 1.086R_H^2) \sqrt{\frac{(t-t_0)}{(t-t_0)+0.15\left(\frac{V}{S}\right)^2}} \quad (2)$$

式中:  $V/S$  为混凝土构件的体积表面积比;  $R_H$  为环境湿度(用小数表示)。上式中右边括弧内前 2 项代表基本徐变,第 3 项代表干缩徐变。 $\Phi(t_c)$  为

$$\Phi(t_c) =$$

$$\begin{cases} 1 & t_0 \leq t_c \\ \sqrt{1 - \frac{(t_0 - t_c)}{(t_0 - t_c) + 0.15\left(\frac{V}{S}\right)^2}} & t_0 > t_c \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $t_c$  为干缩开始时间。当只有基本徐变发生时,  $\Phi(t_c)$  取值 1。

GL2000 模型收缩应变发展方程定义为:

$$\epsilon_{sh}(t) = \epsilon_{shu}\beta(R_H)\beta(t) \quad (4)$$

其中

$$\epsilon_{shu} = 0.001K \sqrt{\frac{30}{f_{cm}}}; \beta(R_H) = 1 - 1.18R_H^4; \quad (5)$$

$$\beta(t) = \sqrt{\frac{t-t_c}{t-t_c+0.15(V/S)^2}} \quad (6)$$

式(5)中,  $f_{cm}$  为混凝土 28 d 的抗压强度平均值;  $K$  是跟水泥种类相关的系数。

根据 Bažant 等<sup>[2]</sup>的建议,混凝土长期应变的随机发展方程可以表达为:

$$\epsilon(t, t_0) = [\alpha_1 J(t, t_0)]\sigma(t_0) + \int_{t_0}^t [\alpha_1 J(t, \tau)]d\sigma(\tau) + \alpha_2 \epsilon_{sh}(t) \quad (7)$$

式中  $J(t, t_0)$  为徐变度,式(7)的物理意义为在  $t_0$  时刻施加的单位应力在  $t$  时刻产生的应变总和,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别为与混凝土徐变和收缩模型相关的模型不确定性变量。

随机分析时还需考虑模型参数的随机性。取  $f_{cm}$  和  $R_H$  为随机变量,分别定义为  $\alpha_3 f_{cm}$  和  $\alpha_4 R_H$ 。

以往的研究对混凝土弹性模量的随机性考虑不足。一般而言,混凝土平均抗压强度与弹性模量之间存在随机相关性。GL2000 模型中给出了 2 者的确定性关系模型,通过在该确定性模型前乘以一随机变量的方式定义 2 者的随机相关性,表达式为:

$$E_c(t) = \alpha_5 \left( 3\ 500 + 4\ 300 \sqrt{f_{cm} \frac{t^{0.75}}{a + bt^{0.75}}} \right) \quad (8)$$

其中,  $a$  和  $b$  为跟水泥种类有关的系数<sup>[7]</sup>。

综合以上几种随机因素,假设各随机因子之间相互独立,混凝土长期应变的随机发展方程为:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, t_0) = & \sigma(t_0) \cdot \alpha_1 \frac{1}{\alpha_5 E_c(\alpha_3 f_{cm}, t_0)} + \\ & \sigma(t_0) \cdot \alpha_1 \frac{\varphi(t, t_0, \alpha_3 f_{cm}, \alpha_4 h)}{\alpha_5 E_c(\alpha_3 f_{cm})} + \\ & \int_{t_0}^t \alpha_1 \left[ \frac{1}{\alpha_5 E_c(\alpha_3 f_{cm}, \tau)} + \right. \\ & \left. \frac{\varphi(t, \tau, \alpha_3 f_{cm}, \alpha_4 h)}{\alpha_5 E_c(\alpha_3 f_{cm})} \right] d\sigma(\tau) + \\ & \alpha_2 \varepsilon_{sh}(t, \alpha_3 f_{cm}, \alpha_4 h). \end{aligned} \quad (9)$$

同时,本文还考虑了自重荷载、二期恒载与张拉控制应力的随机性,随机因子分别为  $\alpha_6$ 、 $\alpha_7$  和  $\alpha_8$ 。表 1 给出了各个随机变量的统计特性。

表 1 随机变量的统计特性

随机变量	分布类型	均值	方差	文献来源	说明
$\alpha_1$	正态分布	1.0	0.260	[8]	徐变度模型不确定性
$\alpha_2$	正态分布	1.0	0.250	[8]	收缩模型不确定性
$\alpha_3$	正态分布	1.0	0.150	[9]	混凝土强度不确定性
$\alpha_4$	正态分布	1.0	0.200	[3]	湿度不确定性
$\alpha_5$	正态分布	1.0	0.200	[10]	弹性模量模型不确定性
$\alpha_6$	正态分布	1.0	0.050	[11]	自重荷载的不确定性
$\alpha_7$	正态分布	1.0	0.100	[11]	二期恒载的不确定性
$\alpha_8$	正态分布	1.0	0.015	[9]	张拉控制应力的不确定性

## 2 基于响应面的蒙特卡洛分析方法

响应面法(Response Surface Method, RSM)通过少量的确定性试验结果拟合一个曲面来近似代替真实的响应值分布,从而建立随机变量与结构响应值之间的显式函数关系,避免了直接蒙特卡洛法(Monte Carlo, MC)反复求解有限元带来的巨大计算开销<sup>[12]</sup>。首先在均值点附近利用若干次的有限元计算,建立结构长期变形的响应面函数,再对其进行 MC 抽样,进而直接获取结构响应的分布信息。

为了提高响应面拟合精度,取考虑交叉项的二次多项式构造响应面

$$g(x) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n d_{ij} x_i x_j \quad (10)$$

式中:  $n$  为变量个数,  $a, b_i, c_i, d_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ) 为待定因数,未知数数量为  $(n+1)(n+2)/2$ 。

敏感性分析是研究随机变量对结构响应贡献程度的有效方法。本文定义基于响应面的敏感性系数为:

$$\frac{\frac{\partial G(X)}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \Big|_{X_i = u_{X_i}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial G(x)}{\partial X_j} \sigma_{X_j} \Big|_{X_j = u_{X_j}} \right)^2}} \quad (11)$$

式中:  $G(X)$  为响应面函数;  $\sigma_X$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 为随机因子均方差。通过引入均方差  $\sigma_X$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),一方面使得敏感性系数为无量纲量,另一方面计入均方差可以考虑变量离散性对结构响应的贡献,具有更明确的概率意义<sup>[13]</sup>。

## 3 混凝土徐变的有限元分析方法

采用 Trost 和 Bazant 提出的按照龄期调整有效模量法进行混凝土徐变效应分析。根据 Trost-Bazant 理论<sup>[14]</sup>,连续变化的应变与应力的关系可表示为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(t) = & \frac{\sigma(\tau_0)}{E} \varphi(t, \tau_0) + \frac{\sigma_s(\tau_0)}{E} [1 + \\ & \rho(t, \tau_0) \varphi(t, \tau_0)] = \frac{\sigma(\tau_0)}{E} \varphi(t, \tau_0) + \frac{\sigma_s(\tau_0)}{E_\varphi} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\rho(t, \tau_0) = \frac{\int_{\tau_0}^t \frac{\sigma_s(\tau)}{d\tau} \bar{\omega}(t, \tau) d\tau}{\sigma_s(t) \bar{\omega}(t, \tau_0)} \quad (13)$$

式中:  $\tau_0$  为加载龄期,  $t$  为计算应变时的龄期,  $\rho(t, \tau_0)$  即为老化系数,  $E_\varphi$  即为按龄期调整的有效模量。

采用混凝土结构非线性分析软件 CSBNLA 进行桥梁结构的长期变形随机分析<sup>[12]</sup>。该软件采用退化梁单元,采用本文程序对国际材料和结构实验室联合会(RILEM)的 TC114/3 委员会于 1993 年发布的混凝土结构和材料的收缩与徐变行为的基准算例(Benchmark Examples)进行了验证,取得了良好的数值结果<sup>[15-16]</sup>。

## 4 算例分析

图 1 为铁路 40 m 简支梁断面图,其中顶底板厚度分别为 300、280 mm,腹板厚度为 500 mm;混凝土强度等级为 C50,预应力钢束采用 13-7 $\phi$ 5,底板预应力束保护层厚度 110 mm,腹板最下层预应力束中心线距离底板 300 mm,腹板预应力束沿竖向等间距布置,间距 190 mm。预应力体系采用后张法施工,张拉控制应力  $\sigma_{con}=1\ 395\ \text{MPa}$ ,张拉时混凝土龄期 28 d。长期作用荷载为:自重荷载 236.195 kN/m,二期恒载 180 kN/m;自重作用时混凝土龄期为 28 d,二期恒载作用时混凝土龄期为 60 d。环境湿度取 70%。

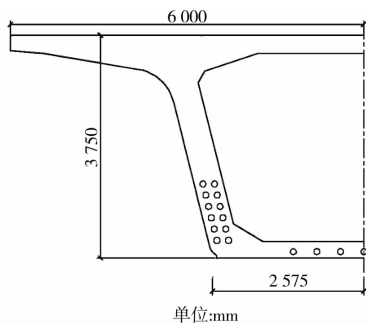


图 1 40 m 预应力混凝土梁跨中断面

利用本文的方法,计算成桥 10 a 中桥梁跨中位移,成桥后由于预应力作用梁体跨中出现上挠,徐变效应体现为上挠,二期恒载施加后,跨中上挠量减小,但随着收缩徐变效应发生,上挠量逐渐增大,至 3 a 后逐渐稳定,10 a 最终位移均值为 25.29 mm,方差为 6.47 mm,变异系数为 26%。图 2 给出了前 3 a 的跨中位移均值及其变异发展曲线,由此可以得到具有一定保证率的位移分析结果,特别的当位移近似正态分布时,此保证率为 97.72%与 2.28%。计算结果表明,收缩徐变效应应具有明显的不确定性,采用确定性的分析结果有可能不恰当的设置桥梁预拱度,影响列车行车安全性与平稳性。

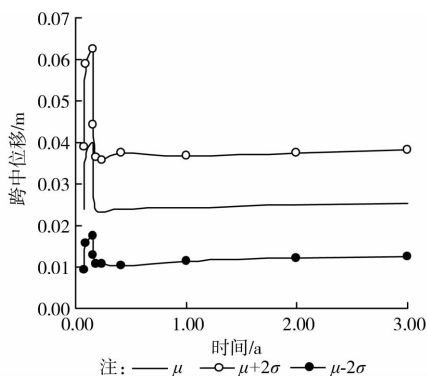


图 2 梁体跨中挠度

利用敏感性分析方法,可以计算各个随机变量对成桥 10 a 后跨中位移的敏感性,图 3 给出了计算结果。可以看出,敏感性最高的参数为徐变度的模型不确定性,其次为弹性模量模型的不确定性,因此在设计与计算过程中,合理的选择计算模型将有利于提高收缩徐变效应的预测精度。

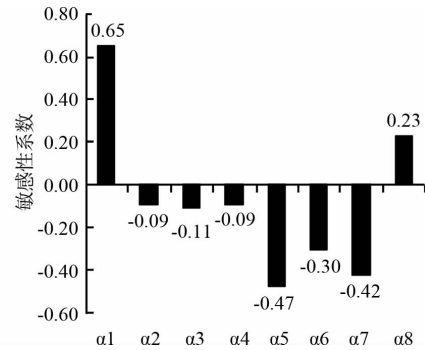


图 3 跨中位移的敏感系数

对于模型参数的不确定性而言,最为敏感的是荷载的不确定性,其次为张拉控制应力的不确定性。

值得指出的是,文献[11]中张拉控制应力变异系数为 1.5%,而此项系数与施工水平紧密相关。图 4 给出了张拉控制应力变异系数为 1.5%与 10%的跨中位移时程对比,图 5 给出了两种变异系数下跨中 3 a 后位移的概率密度曲线。由图可以看出 2 者位移均值基本一致,但是随着张拉控制应力的变异性增大,导致跨中挠度的离散性显著增大。为分析其原因,本文计算了张拉控制应力变异系数为 1.5%~10%时各个主要随机变量的敏感性,图 6 给出了计算结果。由图中结果可以看出:随着张拉控制应力变异性的增大,张拉控制应力的敏感性迅速增大,当张拉控制应力变异系数为 10%时,张拉控制应力的敏感性系数达到 0.81,成为最敏感的随机变量。因此在施工过程中应较精确控制张拉应力,以控制收缩徐变效应的离散性。

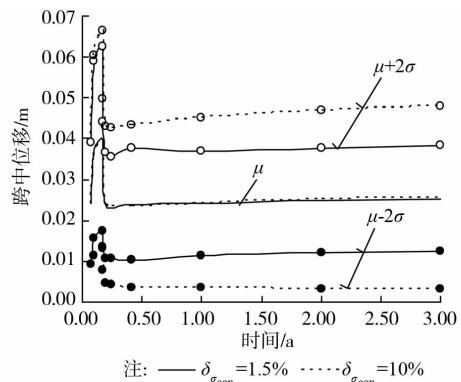


图 4 跨中位移时程曲线

梁体预制后通常需存梁一段时间才进行架设,图 7 给出了二期恒载加载时的混凝土龄期与其敏感系数的关系。由图中可以看出存梁时间越短,二期恒载对于收缩徐变效应影响越明显。延长存梁时间有利于抑制二期恒载对收缩徐变效应的影响,但存梁 2 个月后,此影响基本稳定。

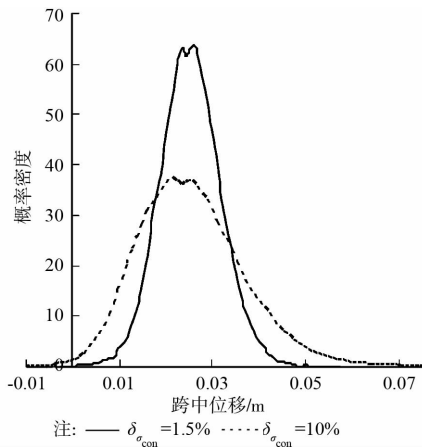


图 5 跨中位移概率密度函数

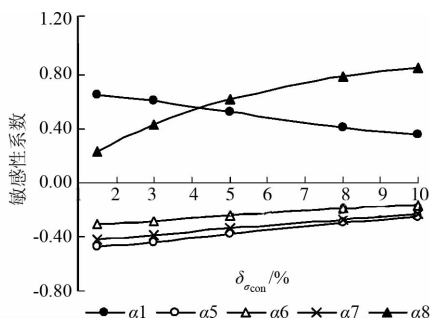


图 6 跨中挠度敏感系数与  $\sigma_{con}$  的变系数

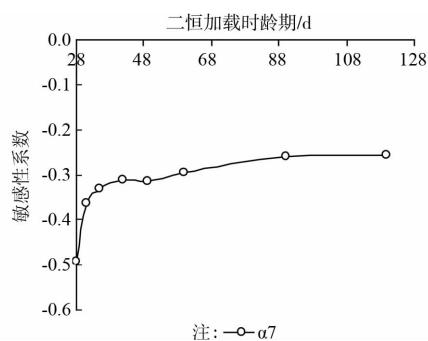


图 7 跨中挠度敏感系数与二恒加载时间

## 5 结 论

采用 GL2000 模型计算混凝土的收缩徐变特性,并利用基于响应面的蒙特卡洛抽样技术,进行收缩徐变随机分析。以铁路 40 m 简支梁为例,分析表明:

1)应考虑收缩徐变效应具有明显的不确定性,

以避免不恰当的设置桥梁预拱度,影响列车行车安全性与平稳性。

2)徐变度的模型不确定性对徐变效应最为敏感,其次为弹性模量模型的不确定性,因此宜进一步开展徐变模型研究。

3)随着张拉控制应力变异性的增大,跨中长期变形的离散性显著增加,同时张拉控制应力的敏感性迅速增大,在施工过程中应注意控制张拉应力的精确性。延长存梁时间有利于抑制二期恒载对收缩徐变效应的影响,但存梁 2 个月后,此影响基本稳定。

## 参考文献:

- [1] 卢志芳. 考虑时变性和不确定性的混凝土桥梁收缩徐变及预应力损失计算方法[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2011.
- [2] Bažant Z P, Li G H. Unbiased statistical comparison of creep and shrinkage prediction models [J]. ACI Materials Journal, 2008, 105(6): 610-621.
- [3] Madsen H, Bažant Z. Uncertainty analysis of creep and shrinkage effects in concrete structures [J]. ACI Journal, 1983, 80: 116-127.
- [4] Yang I. Uncertainty and sensitivity analysis of time-dependent effects in concrete structures [J]. Engineering Structures, 2007, 29: 1366-1374.
- [5] 熊学玉, 顾炜. 基于改进 LHS 方法的预应力混凝土结构长期性能概率分析[J]. 工程力学, 2010, 27(4): 163-168.  
Xiong X Y, Gu W. Long-term performance probabilistic analysis of PC structure based on improved LHS method [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(4): 163-168.
- [6] Goel R, Kumar R, Paul D K. Comparative study of various creep and shrinkage prediction models for concrete [J]. Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE, 2007, 19(3): 249-260.
- [7] Gardner N J, Lockman M J. Design provisions for drying shrinkage and creep of normal-strength concrete [J]. ACI Material Journal, 2001, 98(2): 159-167.
- [8] Keitel H, Dimmig-Osburg A. Uncertainty and sensitivity analysis of creep models for uncorrelated and correlated input parameters [J]. Engineering Structures, 2010, 32(11): 3758-3767.
- [9] Al-Harthy A S, Frangopol D M. Reliability-based design of prestressed concrete beams [J]. Journal of Structural Engineering, 1994, 120(11): 3156-3177.
- [10] Pascal L. Reliability-based deterioration model for

- deflection limit state girder bridges [D]. The University of Michigan, 2006.
- [11] 徐腾飞. 钢管混凝土非线性稳定承载能力与可靠度分析 [D]. 成都: 西南交通大学, 2010.
- [12] 徐腾飞, 赵人达, 向天宇, 等. 钢管混凝土高墩非线性稳定承载能力可靠度分析 [J]. 土木建筑与环境工程, 2010, 32(2): 60-63.  
Xu T F, Zhao R D, Xiang T Y, et al. Reliability analysis of ultimate bearing capacity of concrete-filled tube high piers [J]. Journal of Civil, Architectural & Environment Engineering, 2010, 32(2): 60-63.
- [13] Liu P L, Der Kiureghian A. Finite element reliability of geometrical nonlinear uncertain structures [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1991, 117(8): 1806-1825.
- [14] Wen Q J. Long-term effect analysis of prestressed concrete box-girder bridge widening [J]. Construction and Building Materials, 2011, 25(4): 1580-1586.
- [15] 向天宇, 童育强, 赵人达. 基于退化梁单元的混凝土结构徐变分析 [J]. 工程力学, 2006, 23(4): 140-143.  
Xiang T Y, Tong Y Q, Zhao R D. Creep analysis of concrete structure by degenerated beam element [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(4): 140-143.
- [16] 占玉林, 向天宇, 赵人达. 几何非线性结构的徐变效应分析 [J]. 工程力学, 2006, 23(7): 45-48.  
Zhan Y L, Xiang T Y, Zhao R D. Creep effect analysis of geometric nonlinear structure [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(7): 45-48.

(编辑 薛婧媛)

(上接第 79 页)

- [5] Reissner E. Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1946(4): 268-278.
- [6] Dezi L, Mentrasti. nonuniform bending-stress distribution (shear lag) [J]. Journal of Structural Engineering, 1985, 111(12): 2675-2689.
- [7] 曹国辉, 方志. 变分原理分析连续箱梁开裂后的剪力滞效应 [J]. 工程力学, 2007, 24(04): 75-80.  
Cao G H, Fang Z. Shear lag effect of cracked continuous box girder analyzed by variational principle [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(4): 75-80.
- [8] Manoj K, Sagar S. Influence of box shape on structural behaviour of RC box girder bridges [J]. Indian Concrete Journal, 2007, 81(6): 55-62.
- [9] 张元海, 李乔. 箱形梁剪滞效应分析中的广义力矩研究 [J]. 铁道学报, 2007, 29(1): 77-81.  
Zhang Y H, Li Q. Study on the generalized moment in shear lag effect analysis of box girder [J]. Journal of the China Railway Society, 2007, 29(1): 77-81.
- [10] 程祥云. 梁桥理论与计算 [M]. 北京: 人民交通出版社, 1990.
- [11] 蔺鹏臻, 周世军. 基于剪切变形规律的箱梁剪力滞效应研究 [J]. 铁道学报, 2011, 33(4): 100-104.  
Lin P Z, Zhou S J. Analysis on shear lag effect of box girders based on flange-slab shear deformation law [J]. Journal of the China Railway Society, 2011, 33(4): 100-104.
- [12] 蔺鹏臻, 周世军, 刘凤奎. 抛物线型剪滞翘曲位移函数引起的附加轴力分析 [J]. 工程力学, 2010, 27(8): 90-93.  
Lin P Z, Zhou S J, Liu F K. Additional axial force analysis caused by parabolical shear lag warping displacement [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(8): 90-93.
- [13] 倪元增, 钱寅泉. 弹性薄壁梁桥分析 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.

(编辑 胡英奎)