

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2013.06.005

# 浅埋盾构隧道地基弹簧刚度的求解方法

董正方, 王君杰, 赵东晓, 王文彪

(同济大学桥梁工程系, 上海 200092)

**摘要:**把浅埋盾构隧道简化为半无限平面的挖孔问题,采用平面弹性理论的复变函数方法,推导了反应位移法中浅埋盾构隧道地基弹簧刚度的解析公式。设定不同的埋深和土体泊松比,计算了隧道周边的压缩和剪切地基弹簧刚度,讨论了隧道埋深和土体泊松比对刚度的影响,以及压缩和剪切地基弹簧刚度的关系。结果表明:浅埋隧道与深埋隧道的地基弹簧刚度存在差异;隧道埋深和土体泊松比对地基弹簧刚度的大小和分布规律影响很大;浅埋隧道的剪切与压缩地基弹簧刚度之比沿隧道周边变化。

**关键词:**盾构隧道;复变函数;地基弹簧刚度;反应位移法

**中图分类号:** TU311.4    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1674-4764(2013)06-0028-05

## Solving Method for Soil Spring Stiffness of Shallow Shield Tunneling

Dong Zhengfang, Wang Junjie, Zhao Dongxiao, Wang Wenbiao

(Department of Bridge Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

**Abstract:** Based on complex variable theory in plane elasticity, the equivalent spring stiffness is derived from the analytical solution by means of simplifying shallow shield tunneling to semi-infinite plane with hole, which is applied to response displacement method. The performances of the analytical solution are evaluated and compared with that of the deep shield tunneling through a series of selected various tunnel depths and soil Poisson's ratios. The relation of compression and shear spring stiffness is discussed. Meanwhile, two factors affected soil spring stiffness, tunnel depth and soil Poisson's ratio, are also analyzed. It is shown that soil spring stiffness of shallow shield tunneling is different from that of deep shield tunneling, and the ratio of compression and shear spring stiffness varies along shallow shield tunneling. It is also found that the value and distribution law of soil spring stiffness of shallow shield tunneling greatly depend on tunnel depth and soil Poisson's ratio.

**Key words:** shield tunneling; complex functions; soil spring stiffness; response displacement method

20 世纪 70 年代,日本学者提出了盾构隧道抗震设计的反应位移法<sup>[1]</sup>。该法需要计算隧道周围的地基弹簧刚度,并且地基弹簧刚度值的变化对隧道结构内力有很大影响<sup>[2-3]</sup>,然而地基弹簧刚度的求解至今未有满意的成果,因此研究地基弹簧刚度的求解显得十分重要。

地基弹簧刚度的求解有 3 种方法:理论推导、试

验测得、数值计算<sup>[4]</sup>。其中后 2 种方法费时费力,而理论推导一般会得到解析或半解析公式,使用简单、快捷,因此大量学者在理论推导方面开展了大量研究<sup>[5]</sup>。理论推导大都简化为弹性理论的无限平面或半无限平面中挖孔的边界求解问题,但以前的研究要么不是针对反应位移法、要么就是不考虑隧道的埋深<sup>[6-9]</sup>。Verruijt<sup>[5]</sup>提出了利用复变函数理论求解

收稿日期:2013-03-21

基金项目:国家自然科学基金(90715022);住房和城乡建设部科技项目(2008-K3-1)

作者简介:董正方(1980-),男,博士,主要从事轨道交通结构抗震研究,(E-mail)carmanhouse@126.com。

半无限平面的圆孔问题,可以给出特殊边界条件的应力场和位移场,但没有给出地基弹簧刚度的解析公式。本文在 Verruijt 研究成果的基础上,利用复变函数理论,给出求解浅埋盾构隧道的径向压缩和剪切地基弹簧刚度的解析公式,并讨论二者的关系。

## 1 问题的描述

盾构隧道的反应位移法的地基弹簧分为压缩弹簧和剪切弹簧,其刚度的求解一般根据局部变形理论,利用一点上的力除以该力引起的变形得到。在弹性理论中,就是求解隧道周边应力边界条件下的应力场和位移场,然后得到弹簧刚度。深埋隧道的问题可简化为无限平面中的挖孔问题,浅埋隧道则可简化为半无限平面中的挖孔问题。其中,压缩弹簧刚度可通过隧道周边径向应力  $q$  边界条件得到,剪切弹簧刚度可通过隧道周边切向应力  $\tau$  边界条件得到,如图 1。其中 A 点表示地表原点, B 点表示无限远点,孔洞半径为  $r$ ,孔洞中心埋深为  $h$ 。

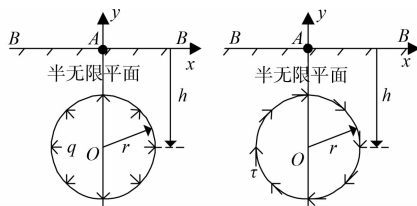


图 1 地基弹簧刚度求解示意图

上述问题可通过保角映射函数<sup>[5]</sup>:

$$z = \omega(\zeta) = -ih \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \quad (1)$$

其中,  $\alpha$  为由  $\frac{r}{h}$  的值确定的参数。

$$\frac{r}{h} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \quad (2)$$

将  $z$  平面的半无限区域映射为  $\zeta$  平面内的由  $|\zeta| = 1$  和  $|\zeta| = \alpha$  ( $\alpha < 1$ ) 围成的环域,如图 2。在  $\zeta$  平面内,圆  $|\zeta| = 1$  对应于  $y = 0$ ; 圆  $|\zeta| = \alpha$  对应于圆  $x^2 + (y + h)^2 = r^2$ 。 $z$  平面的原点对应于  $\zeta = -1$ ;  $z$  平面的无限远点对应于  $\zeta = 1$ 。当  $\alpha \rightarrow 0$ , 则为深埋隧道; 当  $\alpha \rightarrow 1$ , 则覆盖深度相当小。

## 2 边界条件

应力边界条件的复变函数形式为<sup>[13]</sup>:

$$\varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = F(\zeta) + C \quad (3)$$

其中,  $F(\zeta)$  为沿孔周边界给定的函数,  $C$  为未知的积分常数。

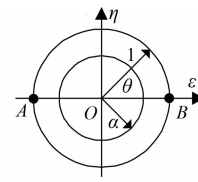


图 2 保角映射后的区域

地表为完全自由边界条件,在该边界上,  $\rho = 1$ , 因此应力边界条件可表示为:

$$\varphi(\sigma) + \frac{1}{2}(1 - \sigma^{-2})\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0 \quad (4)$$

孔周边界条件为应力边界,在该边界上,  $\rho = \alpha$ , 因此应力边界条件可表示为:

$$\left( \varphi(\alpha\sigma) + \frac{\omega(\alpha\sigma)}{\omega'(\alpha\sigma)} \overline{\varphi'(\alpha\sigma)} + \overline{\psi(\alpha\sigma)} \right) (1 - \alpha\sigma) = F^*(\alpha\sigma) + C(1 - \alpha\sigma) \quad (5)$$

其中:

$$F^*(\alpha\sigma) = (1 - \alpha\sigma)F(\alpha\sigma) \quad (6)$$

对于如图 1 所示的应力边界,上式可表示为:

径向应力:

$$F^* = \frac{2iqh\alpha}{1 + \alpha^2} (\alpha - \sigma + i(1 - \alpha\sigma)) \quad (7)$$

剪切应力:

$$F^* = \frac{2\tau h\alpha}{1 + \alpha^2} (\alpha - \sigma + i(1 - \alpha\sigma)) \quad (8)$$

## 3 推导地基弹簧刚度

### 3.1 复势函数

有了边界条件,就可以求解环形区域内的复势函数  $\varphi(\zeta)$  和  $\psi(\zeta)$ ,把复势函数表示成 Laurent 级数的形式,代入边界方程就可以求得。

径向应力的情况<sup>[5]</sup>:

$$\varphi(\zeta) = \left( -2(1 + \alpha^2) + 2\zeta + \frac{2\alpha^2}{\zeta} \right) \Gamma i \quad (9)$$

$$\psi(\zeta) = \left( 2\alpha^2\zeta + \zeta^2 + \frac{2}{\zeta} + \frac{\alpha^2}{\zeta^2} - 3(1 + \alpha^2) \right) \Gamma i \quad (10)$$

其中,  $\Gamma = \frac{\alpha^2 q h}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)}$ 。

切向应力的情况<sup>[14]</sup>:

$$\varphi(\zeta) = \left( 2\alpha^2 - 2 + 2\zeta - \frac{2\alpha^2}{\zeta} \right) \Gamma' \quad (11)$$

$$\psi(\zeta) = \left( 1 - \alpha^2 + 2\alpha^2\zeta + \zeta^2 - \frac{2}{\zeta} - \frac{\alpha^2}{\zeta^2} \right) \Gamma' \quad (12)$$

其中,  $\Gamma' = \frac{\alpha^2 \tau h}{((1 - \alpha^2)(1 + \alpha^2))^2}$ 。

### 3.2 位移场

得到复势函数,由弹性力学的位移公式<sup>[15]</sup>:

$$2G(u_\rho + iu_\theta) = \frac{\bar{\zeta}}{\rho} \frac{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}{|\omega'(\zeta)|} \cdot \left[ (3-4\nu)\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) - \bar{\psi}(\bar{\zeta}) \right] \quad (13)$$

其中,  $G$  和  $\nu$  为土体剪切刚度和泊松比, 可以得到位

其中:

$$W_1 = \sqrt{1 + \alpha^4 + 4\alpha^2 - (4\alpha^3 + 4\alpha)\cos\theta + 2\alpha^2\cos 2\theta} \quad (15)$$

$$W_2 = \frac{(6-8\nu)(2\alpha - (1+\alpha^2)\cos\theta)}{1-2\alpha\cos\theta + \alpha^2} \quad (16)$$

$$W_3 = \frac{2\alpha^2\cos 3\theta - 6(\alpha^4 + \alpha^2 + 1)\cos\theta + 2\alpha^{-1} + 6\alpha + 6\alpha^3 + 2\alpha^5}{1 + 4\alpha^2 + \alpha^4 - 4(\alpha + \alpha^3)\cos\theta + 2\alpha^2\cos 2\theta} \quad (17)$$

剪切应力的孔周环向位移为:

$$u_\theta = \frac{\tau r \alpha W_1}{4G(1-\alpha^4)} (W_4 + W_5 + W_6) \quad (18)$$

其中:

$$W_4 = \frac{(6-8\nu)((\alpha^4-1)\cos\theta + (\alpha^3-\alpha)\cos 2\theta - 3\alpha^3 + 3\alpha)}{1 + 4\alpha^2 + \alpha^4 - 4(\alpha + \alpha^3)\cos\theta + 2\alpha^2\cos 2\theta} \quad (19)$$

$$W_5 = \frac{2(\alpha^2 - \alpha^4)\cos 3\theta + 4(\alpha^5 - \alpha)\cos 2\theta + (2 + 8\alpha^2 - 8\alpha^4 - 2\alpha^6)\cos\theta - 4\alpha + 4\alpha^5}{1 + 9\alpha^2 + 9\alpha^4 + \alpha^6 - 6(\alpha + 3\alpha^3 + \alpha^5)\cos\theta + 6(\alpha^2 + \alpha^4)\cos 2\theta - 2\alpha^3\cos 3\theta} \quad (20)$$

$$W_6 = \frac{4(\alpha^4 - 1)\cos\theta + 2\alpha^{-1} + 2\alpha - 2\alpha^3 - 2\alpha^5}{1 + 4\alpha^2 + \alpha^4 - 4(\alpha + \alpha^3)\cos\theta + 2\alpha^2\cos 2\theta} \quad (21)$$

这里的角度  $\theta$  是  $\zeta$  平面的角度。

### 3.3 应力场

由弹性力学的应力公式<sup>[15]</sup>:

$$\begin{cases} \sigma_\rho + \sigma_\theta = 4\text{Re} \left[ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \\ \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \left[ \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \omega''(\zeta)\varphi'(\zeta)}{(\omega'(\zeta))^2} + \psi'(\zeta) \right] \end{cases} \quad (22)$$

其中径向应力情况需要径向应力, 剪切应力情况需要切向应力。

径向应力为:

$$\sigma_\rho = \frac{\alpha^2 q}{(1-\alpha^2)^3} W_7 \quad (23)$$

$$W_7 = (2-2\alpha^2)\cos 2\theta - 1 + \alpha^2 + \alpha^{-2} - \alpha^4 - 2\alpha^{-1}\cos\theta \quad (24)$$

切向应力为:

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{\alpha^2 \tau}{(1-\alpha^2)^2(1+\alpha^2)} W_8 \quad (25)$$

$$W_8 = \alpha^2 + \alpha^{-2} + \alpha^4 - 1 - 2\cos 2\theta - 2\alpha^3\cos\theta \quad (26)$$

### 3.4 地基弹簧刚度

因此隧道的地基弹簧刚度分别为:

$$k_n = \frac{\sigma_\rho}{u_\rho} = \frac{2G}{r} \frac{2\alpha W_7}{W_1(W_2 + W_3)(1-\alpha^2)} \quad (27)$$

$$k_t = \frac{\tau_{\rho\theta}}{u_\theta} = \frac{2G}{r} \frac{2\alpha W_8}{W_1[W_4 + W_5 + W_6](1-\alpha^2)} \quad (28)$$

移。其中径向应力情况需要径向位移, 剪切应力情况需要环向位移。

径向应力的孔周径向位移为:

$$u_\rho = \frac{qr\alpha W_1}{4G(1-\alpha^2)^2} (W_2 + W_3) \quad (14)$$

其中:  $k_n$  和  $k_t$  分别是隧道压缩和剪切地基弹簧刚度。

假设深埋隧道为无限平面中的挖孔问题, 利用复变函数的理论可以推得其压缩和剪切刚度都是  $\frac{2G}{r}$ <sup>[9]</sup>, 文献[11]中提供的深埋隧道的压缩和剪切弹簧刚度也是  $\frac{2G}{r}$ , 因此浅埋隧道的地基弹簧刚度相当于在深埋隧道刚度上乘以一个系数。当  $\alpha$  趋近于 0 时, 系数趋近于 1。

## 4 讨论

为了讨论埋深和泊松比对地基弹簧刚度的影响, 可取不同的埋深和不同的泊松比, 令  $\frac{r}{h}$  取 0.001~0.8, 令  $\nu$  取 0.2~0.4。通过前面得到的公式计算隧道的压缩弹簧刚度和剪切弹簧刚度, 如图 3~4; 0°、360°表示隧道顶部, 180°表示隧道底部。

可以看出: 深埋时, 隧道地基弹簧沿周边均匀分布; 当  $\frac{r}{h}$  值较小时 (例如  $\leq 0.01$ ), 基本上跟深埋情

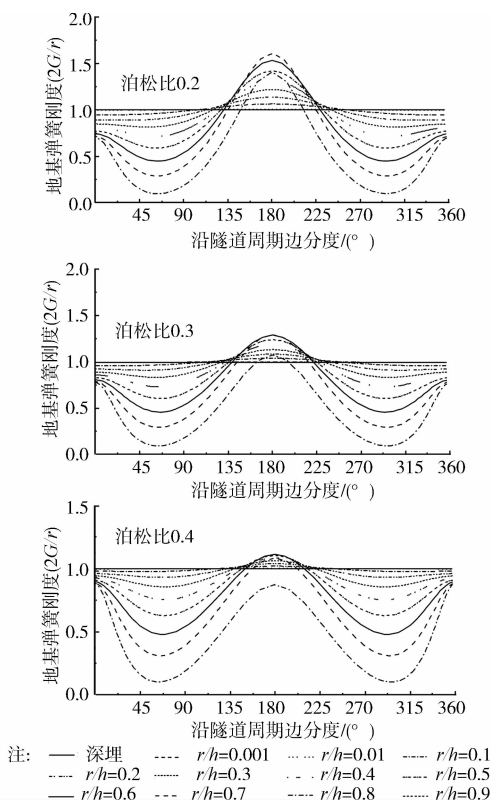


图 3 压缩地基弹簧刚度分布图

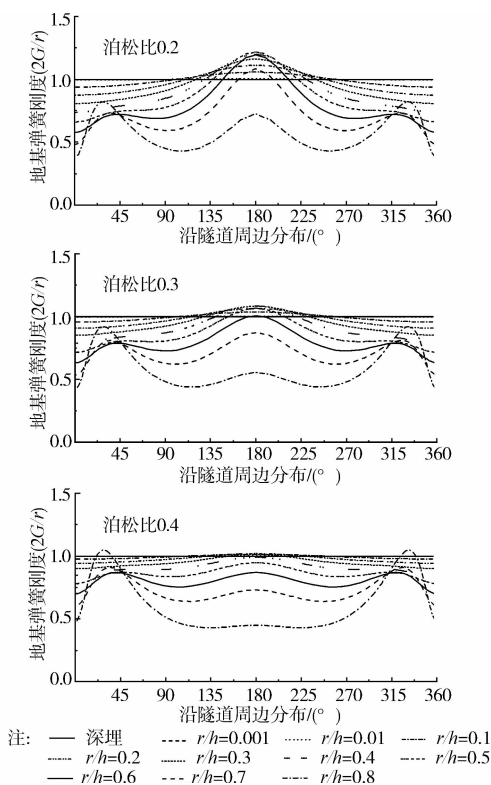


图 4 剪切地基弹簧刚度分布图

化;隧道顶部弹簧刚度比深埋时变小,底部弹簧刚度比深埋时变大,这是由于埋深的减小造成隧道孔周变形发生变化造成的。从隧道顶部到底部压缩弹簧刚度先变小后变大,剪切弹簧刚度逐渐变大(除了埋深很浅的情况)。弹簧刚度最大值一般出现在隧道底部,压缩弹簧刚度的最大值可达深埋时的 1.5 倍,剪切弹簧刚度的最大值可达深埋时的 1.2 倍;压缩弹簧最小值一般出现在正负 60°处,最小可达深埋时的 0.1 倍,剪切弹簧最小值一般出现在顶部,最小可达深埋时的 0.4 倍。泊松比越大,地基弹簧刚度最大值越小,说明土质条件越差,地基弹簧刚度越小。

为了讨论某点处剪切弹簧刚度和压缩弹簧刚度的关系,可以把剪切弹簧刚度和压缩弹簧刚度相除,得到的关系如图 5。

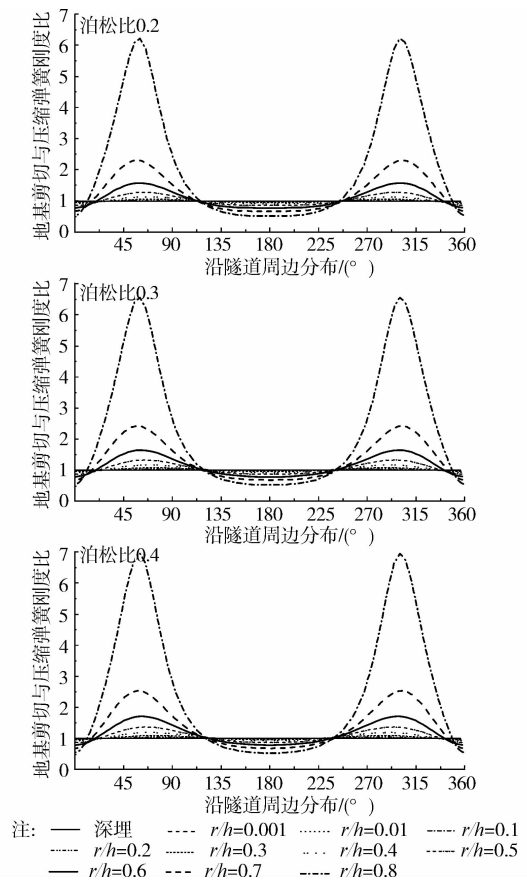


图 5 剪切与压缩地基弹簧刚度比分布图

从图 5 可看出:深埋时,地基弹簧的剪切刚度和压缩刚度相等。浅埋时,地基弹簧的剪切刚度和压缩刚度不总是相等;靠近隧道顶部和底部的区域,剪切刚度小于压缩刚度,其余区域情况相反。除了埋深较小的情况(例如  $\frac{r}{h} \geq 0.6$ ),剪切刚度与压缩刚度相差都在 50% 以内。土体泊松比对剪切与压缩地基弹簧刚度比的影响不大。

况类似。随着  $\frac{r}{h}$  的增大,即系数  $\alpha$  逐渐增大,隧道埋深逐渐减小,隧道的地基弹簧沿周边分布发生变

## 5 结 论

通过保角映射把无限半平面的挖孔问题转变为 $\zeta$ 平面的环域问题,利用复变函数的理论,推导出浅埋隧道的地基弹簧刚度的解析公式,并得出以下结论:

1)浅埋隧道的地基弹簧刚度相当于在深埋隧道地基弹簧刚度上乘以一个系数,沿隧道周边的分布不再均匀。

2)随着隧道埋深逐渐减小,隧道顶部弹簧刚度比深埋时变小,底部弹簧刚度比深埋时变大;泊松比越大,地基弹簧刚度最大值越小。

3)浅埋隧道剪切与压缩地基弹簧刚度不总是相等。

### 参考文献:

- [1] Tateishi A. Underground structures using static finite element method [J]. Journal of Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE, 2005, 22(1): 41-53.
- [2] 刘如山,胡少卿,石宏彬. 地下结构抗震计算中拟静力法的地震荷载施加方法研究[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(2): 237-242.  
Liu R S, Hu S Q, Shi H B. Study on seismic loading of pseudo-static approach used in the seismic design of underground structure [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(2): 237-242.
- [3] 刘晶波,王文晖,赵冬冬. 地下结构横截面抗震设计分析方法综述[J]. 施工技术, 2010, 39(6): 91-97.  
Liu J B, Wang W H, Zhao D D. Review of methods for seismic design and analysis of underground structure cross-section [J]. Construction Technology, 2010, 39(6): 91-97.
- [4] Sadrekarimi J, Akbarzad M. Comparative study of methods of determination of coefficient of subgrade reaction [J]. Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 14(E): 1-14.
- [5] Verruijt A. Deformations of an elastic half plane with a circular cavity [J]. Journal of Solids Structures, 1998, 35(21): 2795-2804.
- [6] Bobet A. Analytical solution for shallow tunnels in saturated ground [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2001, 127(12): 1258-1266.
- [7] Park K H. Elastic solution for tunneling-induced ground movement in clays [J]. International Journal of Geomechanics, 2004, 4(4): 310-318.
- [8] 刘齐建. 软土地铁建筑结构抗震设计计算理论的研究[D]. 上海: 同济大学, 2005.
- [9] 涂忠仁, 孙钧, 蔡晓鸿. 海底隧道围岩抗力系数计算方法研究[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(8): 1002-1007.  
Tu Z R, Sun J, Cai X H. Researches on calculation methods of rock resistant coefficients of submarine tunnels [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(8): 1002-1007.
- [10] 谷音, 刘晶波, 杜义欣. 三维一致粘弹性人工边界及等效粘弹性边界单元[J]. 工程力学, 2007, 24(12): 31-37.  
Gu Y, Liu J B, Du Y X. 3D consistent viscous-spring artificial boundary and viscous-spring boundary element [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(12): 31-37.
- [11] 小泉·淳. 盾构隧道的抗震研究及算例[M]. 张稳军, 袁大军. 译. 北京: 中国建筑工业出版社, 2009.
- [12] 黄茂松, 曹杰. 隧道地震响应简化分析与动力离心试验验证[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(2): 271-280.  
Huang M S, Cao J. Simplified analysis of tunnel earthquake response and centrifuge modeling calibration [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics And Engineering, 2010, 29(2): 271-280.
- [13] England A H. Complex variable methods in elasticity [M]. New York: Dover Publications, 2003: 24-25.
- [14] Wang L Z, Li L L, Lyu X J. Complex variable solutions for tunneling-induced ground movement [J]. International Journal of Geomechanics, ASCE, 2009, 9(2): 63-72.
- [15] 吕爱钟, 张路青. 地下隧洞力学分析的复变函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

(编辑 王秀玲)