

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2013.06.008

混凝土板带平裂段曲母线冲切锥组合模型

任 达^{1,2}, 周朝阳¹, 贺学军¹, 王超峰¹

(1. 中南大学 土木工程学院, 长沙 410075; 2. 广州大学 土木工程学院, 广州 510006)

摘 要:针对受冲切混凝土板中常存在水平受拉劈裂段情况,基于二次抛物线屈服准则,考虑冲切斜锥面混凝土受压和纵筋平面内混凝土受拉极限并存的临界状态,建立了带有沿纵筋平面水平劈裂段(简称平裂段)的曲母线冲切破坏斜锥面组合错动模型,求得了冲切承载力上限解,并进一步推广导出了任意次(含二次)抛物线准则下的冲切抗力统一解;基于理论解,对二次抛物线准则冲切模型进行了简化和可靠度计算,结果表明,简化公式计算值与试验值(231 块板)之比的变异系数为 0.201,离散性较直母线破坏斜锥面带平裂段组合模型(0.250)更小,且略优于规范公式(0.202),均值为 0.940,明显优于现行规范(0.799),可供工程设计应用。

关键词:混凝土板;冲切;模型;屈服准则;承载力

中图分类号:TU375.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2013)06-0046-05

A Refined Punching Model for Concrete Slabs with Horizontal Cracking Zone

Ren Da^{1,2}, Zhou Chaoyang¹, He Xujun¹, Wang Chaofeng¹

(1. School of Civil Engineering, Central-south University, Changsha 410075, P. R. China;

2. School of Civil Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510006, P. R. China)

Abstract:Based on the yield criteria of second-order parabola, a refined translational model for punching failure has been developed, assuming that the critical ultimate state is characterized by cracking of the compression concrete on the punching cone and simultaneous splitting of the tension concrete at longitudinal-rebar level. An upper-bound solution was obtained and a general one was developed under arbitrary-order parabola yield criteria. Moreover, the deduced complex model was simplified for better practice. The statistical results, with a collection of 231 specimens, show that for the proposed curved-generatrix model, the coefficient of variation for the prediction-to-observation ratios(i. e., 0.201) is much less than that for the straight-generatrix model previously proposed(i. e., 0.250). In addition, it is slightly lower than that for the current GB code(i. e., 0.202), and its mean(i. e., 0.940) is obviously superior over the latter(0.799).

Key words:concrete slabs; punching; model; yield criteria; strength

受集中荷载作用的混凝土板常有冲切破坏之患,为合理把握其抗冲切能力,各国学者开展了大量试验,并且引入了很多理论方法或模型,如极限平衡

法、弹性理论法、塑性理论法及有限元分析法等等^[1-8]。有的模型所做假定缺乏试验依据,有的不能反映冲切发生时材料的真实状态,而数值模型则无

收稿日期:2013-04-25

基金项目:国家自然科学基金(51378507、50778176);长江学者创新研究团队项目(IRT1296);住建部项目(2013-K2-24)

作者简介:任达(1974-),男,博士生,主要从事土木工程研究,(E-mail)renda20099@126.com。

法获得解析解。相对而言,塑性极限分析法由于物理概念明确、数学推导严谨、能在一定程度上反映材料的非线性特征等特点较多被采用。倘若材料屈服准则、破坏机构等设取得当,塑性理论模型在符合其假定的适用范围内应可得到合理解答。所设机构按构件破坏类型的不同大致分为错动和转动两类。前者一般用于描述普通楼板因混凝土剪压破坏引起的冲切,后者用来描述沿冲切锥面混凝土应力为拉的基础类板斜拉破坏类型。塑性理论最初被用于分析混凝土构件的抗剪问题, Braestrup^[6]将其应用于轴对称板的冲切分析,他按照错动机构假设,采用修正的莫尔-库仑材料破坏准则,从虚功方程导出一个形式复杂的上限解; Jiang 等^[7]基于二次抛物线屈服准则得到了一个形式更为简单的解答;文献^[8]另按平衡条件直接推得任意抛物线屈服准则上限解;分析并指出了错动机构仅适用描述冲切斜锥面剪压区混凝土达到复合受压极限状态。然而,据试验观测^[3],冲切破坏板沿纵筋平面的混凝土常存在水平受拉劈裂的情况,这是以往的错动机构所没有考虑的。笔者曾将回转破坏斜锥面母线简化为^[9],起自柱边止于纵筋水平劈裂面的斜直线(实际多为类抛物曲线),同时考虑冲切斜锥面混凝土受压和纵筋平面内混凝土受拉极限并存的临界状态,建立了源于纵筋面劈裂的直母线冲切破坏斜锥面带水平劈裂段模型,它对工程中配筋率较大,厚度较薄的板具有良好适用性,但对于更一般的情形离散性仍偏大。作为新尝试,以下基于更符合实际的曲母线破坏斜锥面假定,提出曲母线斜锥面带水平劈裂段(或平裂段)组合错动冲切模型。

1 冲切破坏的机构特征与建模

可靠度理论将破坏机构分为串联和并联两类。冲切破坏截锥面本质上属并联机构,但带有一定的串联特征。冲切斜锥面上的剪压区混凝土、骨料咬合、纵筋销栓三者中,任何部分失效后都会瞬即卸荷给其它部分,这些部分则因不堪重负而在瞬间相继破坏,使破坏锥从母体冲出。故构建冲切模型应将连锁破坏起始时刻的状态视为临界状态;塑性分析中,错动机构假定破坏斜锥面分割的两个刚性体部分沿竖向平移错动。其破坏面上的正应力恒不为拉^[8],描述的是混凝土剪压(非剪拉)破坏引起的冲切,本质是剪压区的混凝土达到复合受力极限状态,这等于认为:试件的破坏源于剪压区未裂混凝土部分的失效。然而,由试验现象来看,从距柱周约 $2h_0$ (h_0 为有效板厚)的冲切破坏锥扩底起,向外沿纵

筋平面常存在水平劈裂段 ae (图 1),文献^[3]对此做了细致的报道。由此推断,上部纵筋平面某环向区域内,混凝土因达到极限抗拉强度而被水平劈裂,可能致使纵筋销栓失效而引起连锁破坏,破坏源并不一定是剪压区混凝土的开裂软化,建模必须同时考虑纵筋平面内,混凝土即将开裂而未裂时的受拉极限状态。鉴于实际破坏斜锥面母线通常不是直线,现提出曲母线带平裂段组合模型,假定如下:1)破坏面几何构成:冲切破坏面是由与柱边相连的曲母线带水平段(即图 1 中 oa 带 ae 段)以柱边为流动准线(图 1 点 o 的轨迹)回转而成的周界面;2)运动特征:以此破坏面为界,将板分成冲切破坏锥和外部刚域两部分,错动发生时,破坏锥沿与板面垂直方向相对于外部刚域产生竖向位移;3)材料屈服准则:岩土力学中对混凝土一般采用莫尔-库仑准则,它是由关于 σ 轴对称的两条直线构成,即 $\tau = c - \sigma \tan \varphi$, 其中 φ 为内摩角, c 与 φ 相关,表示粘聚力,二者均为常数。由于临近破坏时(即临界状态)破坏界面上的应力分布较复杂,各点应力并非处处屈服,最可能情形是,有的点尚未屈服,有的恰好达到极限状态,还有的则已进入软化阶段,为更好的反映冲切面上的实际应力分布,从莫尔-库仑准则出发,不妨假定屈服包络线可用如下单根曲线(图 2)表示。

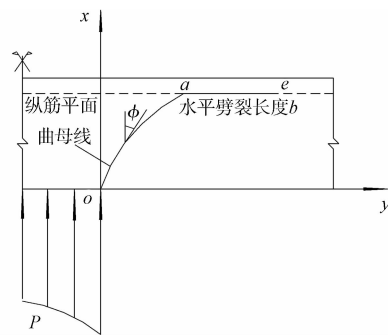


图 1 带水平劈裂段组合错动模型

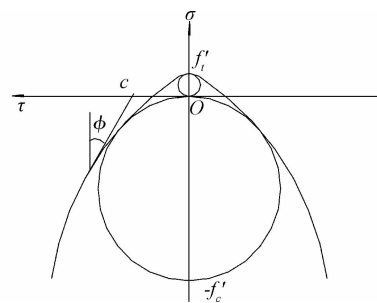


图 2 屈服包络线

$$\tau = c - \sigma \tan \varphi \quad (1)$$

式中: φ 为变量; c 随 φ 变化,称似粘聚力^[8]。

2 冲切抗力上限解

图 3(a)破坏面 oa 段上的应力状态随各处对竖轴的夹角而改变,由式(1),其应力可以等效成图 3(b)中相应段的切向剪应力和径向应力,根据构件在竖向内外力相互平衡这一条件,可建立平衡方程得极限破坏荷载如下:

$$p = \int_0^{x_1} (u_0 + 2\pi y)c dx + \left[u_0 + 2\pi \left(y_1 + \frac{b}{2} \right) \right] b f_t' \quad (2)$$

式中: u_0 为柱周长, f_t' 为混凝土塑性抗拉强度 ($= f_t \nu_t, \nu_t$ 抗拉强度折减系数), b 为水平劈裂段宽度, x_1 为构件有效厚度, $y_1 = y(x_1)$, 为冲切锥面与纵筋面相交处(即点 a)到柱边的距离。从与屈服条件相关联的流动法则可知,图 3 中 σ 、 τ 及似粘聚力 c 应按照角度 φ 和图 2 中屈服包络线上各点一一对应,即

$$y'(x) = \tan \varphi = -\frac{d\tau}{d\sigma} \quad (3)$$

由式(1)知 $c = c(y') = \tau(y') + \sigma(y')y'$, 于是冲切抗力成为一个关于冲切破坏锥母线的带终端函数的泛函。因实际破坏锥面一端通过柱周边,相当于图中破坏锥母线左端固定于坐标原点,即有本质边界条件

$$y(0) = 0 \quad (4)$$

同时, u_0 、 f_t' 、 b 均为常量,原泛函最小上限解的确定实际可转化为求解如下新目标泛函极值问题

$$\min p' = \int_0^{x_1} F(y, y') dx \quad (5)$$

式中, $F(y, y') = (u_0 + 2\pi y)(\tau + \sigma y') + 2\pi b f_t' y'$ 。

对 p' 求一阶变分并注意到 $\delta x_1 = 0$ (\because 右端点 (x_1, y_1) 仅仅在直线 $x = x_1$ 上可动),可得到如下自然边界条件:

$$(u_0 + 2\pi y_1)\sigma(x_1) + 2\pi b f_t' = 0 \quad (6)$$

由不显含 x 的欧拉方程 $F - y'F_{y'} = A$ (常数),得如下极值条件:

$$(u_0 + 2\pi y)\tau = A \quad (7)$$

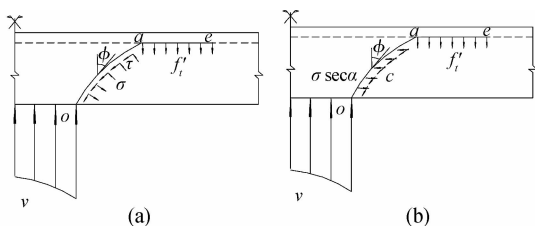


图 3 破坏面上的应力等效

3 二次抛物线屈服准则相关解

二次抛物线屈服准则方程可以表示为

$$\frac{\sigma}{f_t'} = 1 - \left(\frac{\tau}{M_2 f_t'} \right)^2 \quad (8)$$

式中, $M_2 = \sqrt{1 + \frac{f_c'}{f_t'}} - 1$, f_c' 为混凝土塑性抗压强度 ($f_c' = f_c \nu_c, \nu_c$ 为抗压强度折减系数)。由式(1)、(3)和(8)知

$$\sigma = f_t' \left[1 - \left(\frac{M_2}{2} \frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 \right] = f_t' \left[1 - \left(\frac{M_2}{2y'} \right)^2 \right] \quad (9)$$

$$\tau = \frac{M_2^2 f_t'}{2y'} \quad (10)$$

$$c = f_t' \left(y' + \frac{M_2^2}{4y'} \right) \quad (11)$$

把式(10)代入式(7),并由边界条件式(4)和式(6)求得极值锥母线方程为:

$$\frac{M_2}{2} x = [(r_0 + y_1)(r_0 + y_1 + b)]^{\frac{1}{2}} \ln \left(1 + \frac{y}{r_0} \right) \quad (12)$$

式中 $r_0 = u_0/2\pi$, 即周长为 u_0 的柱等效半径。当 $x = x_1$ 时, y_1 可由下式求得

$$J_2 = \left[\left(1 + \frac{y_1}{r_0} \right) \left(1 + \frac{y_1}{r_0} + \frac{b}{r_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \ln \left(1 + \frac{y_1}{r_0} \right) \quad (13)$$

式中 $J_2 = \frac{M_2 x_1}{2r_0}$, 若 $y_1 > y_a$ (柱边到支座内侧的距离),取 $y_1 = y_a$ 即可。积分式(2),并由式(11)、(12)及(13),得冲切抗力最小上限解

$$\frac{p}{\pi r_0^2 f_t'} = \left(1 + \frac{y_1}{r_0} \right)^2 - 1 +$$

$$2J_2 \left(1 + \frac{y_1}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{y_1}{r_0} + \frac{b}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(1 + \frac{y_1}{r_0} + \frac{b}{2r_0} \right) \frac{b}{r_0} \quad (14)$$

当 $y_1 \leq y_a$ 时,由式(13),上式还可写为

$$\frac{p}{\pi r_0^2 f_t'} = \left(1 + \frac{y_1}{r_0} \right)^2 - 1 +$$

$$2 \left(1 + \frac{y_1}{r_0} \right) \left(1 + \frac{y_1}{r_0} + \frac{b}{r_0} \right) \ln \left(1 + \frac{y_1}{r_0} \right) + 2 \left(1 + \frac{y_1}{r_0} + \frac{b}{2r_0} \right) \frac{b}{r_0} \quad (15)$$

4 n ($n > 1$) 次抛物线准则统一解

类似地,基于任意 n 次抛物线准则,可以推得在任意非二次抛物线屈服准则

$$\frac{\sigma}{f_t'} = 1 - \left(\frac{\tau}{M_n f_t'} \right)^n \quad (n > 1 \text{ 且 } n \neq 2) \quad (16)$$

下的冲切承载力上限解为,

$$\frac{p}{\pi r_0^2 f_t'} = \left(1 + \frac{y_1}{r_0}\right)^2 - 1 + 2 \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{y_1}{r_0}\right)^{2-n}\right] \left(1 + \frac{y_1}{r_0} + \frac{b}{r_0}\right) \left(1 + \frac{y_1}{r_0}\right)^{n-1} + 2 \left(1 + \frac{y_1}{r_0} + \frac{b}{2r_0}\right) \frac{b}{r_0} \quad (17)$$

当 $y_1 \leq y_a$ 时,经简化上式可写为

$$\frac{p}{\pi r_0^2 f_t'} = \left(1 + \frac{y_1}{r_0}\right)^2 - 1 + 2J_n \left(1 + \frac{y_1}{r_0} + \frac{b}{r_0}\right)^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{y_1}{r_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} + 2 \left(1 + \frac{y_1}{r_0} + \frac{b}{2r_0}\right) \frac{b}{r_0} \quad (18)$$

式中: $J_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{M_n x_1}{r_0}$; M_n 为 $\frac{f_c'}{f_t'}$ 的函数,通过屈服包络线与单向受拉应力莫尔圆相切确定;若 $y_1 > y_a$ (柱边到支座内侧的距离),即取 $y_1 = y_a$ 。

显然,对照式(14)知(即 $n = 2$ 情形),与 $n(n > 1)$ 次抛物线屈服准则相关的塑性上限解可以统一写成式(18)的形式,即包含二次抛物线准则在内的冲切抗力统一解。关于 n 的取值,实际应用时可根据需要灵活选取,通过次数的变化得到不同的计算模型,为有关应用提供多种选择。

5 冲切公式的实用简化

考察式(15),其中包含 y_1 、 b 、 ν_t 等 3 个待定参

量,其中, $y_1 = y(x_1)$ 是有效板厚的函数, b 也与有效板厚有关^[10],由此可知, $p/(\pi r_0^2 f_t')$ 最终可表为以 (h_0/r_0) 为“唯一”变量的函数。因此在找到更好的简化方法之前,不妨直接以 $(h_0/r_0, p/(\pi r_0^2 f_t'))$ 描点作二次拟合,考虑到纵筋平面某环域(即图 1ae 段)内的混凝土已达抗拉强度极限, ν_t 反映的是单轴抗拉强度的折减程度,取 $f_t' = f_t$,并经可靠度分析(过程略,方法详文献[10-11]),得到实用计算式如下

$$\frac{p}{\pi r_0^2 f_t} = 1.1 \left(\frac{h_0}{r_0}\right)^2 + 1.6 \frac{h_0}{r_0} \quad (19)$$

两边同乘以 $\pi r_0^2 f_t$,并注意到 $r_0 = u_0/2\pi$,可写成

$$p = 0.8 f_t (u_0 + 4.3 h_0) h_0 \quad (20)$$

式中 u_0 (柱周长)当为矩形柱支承时取 $4c'$ (c' 为柱边长)。可见,式(20)与现行规范 GB 冲切公式形式相似,仅公式前的系数和控制截面位置有所区别,这说明规范公式所采取的形式在理论上有其合理性。将所掌握的国内外大量试验数据与理论进行比较分析,结果表明(见表 1),实用公式变异系数为 0.201,其离散性较直母线锥面带平裂段组合模型(变异系数为 0.250)^[9] 更小,并略优于规范公式(0.202);其均值为 0.940 则明显优于规范(0.799);表 2 列出了可靠指标计算结果,显见各种情形均能满足可靠度要求。应予指出,上述做法是以二次抛物线准则冲切模型为例的,其它任意次抛物线准则亦可作类似处理。

表 1 理论值与试验值的比较

试验者 年份/试件数	哈建工 1985/12	大连理工 1994/2	湖南大学 1985/14	Criswell 1974/4	Kinnunen 1960/8	Moe 1961/13	Elstner 1956/21	角田,史雄 1974/48
μ_{21}	0.920	1.065	0.802	1.257	0.895	0.959	0.943	0.962
μ_{co}	0.786	0.909	0.685	1.078	0.757	0.818	0.806	0.814
试验者 年份/试件数	Regan 1986/30	Rankin 1987/19	Taylor 1965/8	Yitzhaki 1966/17	Ramdane 1996/9	Chana 1992/8	Scordelis 1958/2	Marzouk 1991/16
μ_{20}	0.982	0.900	0.857	0.887	1.004	0.995	0.830	0.917
μ_{co}	0.832	0.760	0.726	0.757	0.848	0.846	0.712	0.778
式(20)/规范式	总平均值		0.940/0.799		变异系数		0.201/0.202	

注:1.表中试件(231个)均为周边简支无腹筋板,主要来源参见文献[10-15],不含小剪跨、边约束、钢纤维、轻骨料情形。

2.当纵向配筋较弱时,试件易发生弯曲破坏或者先纵筋屈服再冲坏的延性冲切类型,均与本文模型假定不符,因此也不包括低配筋(≤ 0.6)与延性冲坏等情况。

3. μ_{20} 与 μ_{co} 分别指式(20)和规范公式对各组试件理论计算值与试验值之比的均值。

4.计算过程中,关于混凝土抗拉强度 $f_t = 0.23(f_{cu})^{2/3}$, f_{cu} 均为边长 150 mm 的混凝土立方体抗压强度,对于边长为 200 和 100 mm 的情形分别乘以 1.05 和 0.95 换算而来,对 $\varphi 150 \times 300$ 的圆柱体试件,取 $f_c' = 0.8 f_{cu}$ 。

表 2 简化式可靠指标值

f_{cu}	1/3	1	3
C15	4.015	4.002	3.989
C50	4.069	4.054	4.024
C80	3.853	3.838	3.808
C110	3.743	3.722	3.700

注:表中第 2 行为有效板厚与柱边长之比。

6 结论

在直母线冲切破坏斜锥面带水平劈裂段模型的基础上加以改进,建立了带平裂段曲母线破坏锥组合错动冲切模型。

1)回转破坏面母线按曲线考虑,以冲切斜锥面

受压混凝土极限和纵筋面受拉混凝土同时达到临界极限状态,基于二次抛物线屈服准则,推得冲切承载力上限解。

2) 基于 n 次 ($n > 2$) 抛物线准则,推导得到了包含二次抛物线准则在内的冲切抗力统一解,通过次数的变化可得到不同计算模型,为有关应用提供了多种选择。

3) 以二次抛物线准则冲切模型为例,通过对模型中待定参数的分析,利用统计方法对公式作了简化,并经可靠度分析得到一个新的实用公式,其形式与规范公式相近,从而为规范提供了理论支持。

4) 根据 231 个试验数据,按本文公式与规范公式,分别计算了冲切承载力值和试验观测值之比:实用公式的变异系数为 0.201,离散性较直母线锥面带平裂段组合模型(0.250)更小,并略优于规范公式(0.202),其均值为 0.940 则明显优于规范(0.799)。

参考文献:

- [1] Muttoni A. Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement [J]. ACI Structural Journal, 2008, 105(4):440-450.
- [2] Lee J H, Yoon Y S, Lee S H, et al. Enhancing performance of slab-column connections [J]. J. Struct. Engrg, 2008, 134(3): 448-457.
- [3] Guandalini S, Burdet O L, Muttoni A. Punching tests of slabs with low reinforcement ratios [J]. ACI Structural Journal, 2009, 106(1): 87-95.
- [4] Esfahani M R, Kianoush M R, Moradi A R. Punching shear strength of interior slab-column connections strengthened with carbon fiber reinforced polymer sheets [J]. Engineering Structures, 2009, 31(7): 1535-1542.
- [5] Theodorakopoulos D D, Swamy R N. A design model for punching shear of FRP-reinforced slab-column connections [J]. Cement and Concrete Composites, 2008, 30(6): 544-555.
- [6] Braestrup M W. punching shear in concrete slabs [R]. Introductory Report, IABSE Colloquium, Plasticity in Reinforced Concrete. Copenhagen, Denmark, 1979: 115-136.
- [7] Jiang D H, Shen J H. Strength of concrete slabs in punching shear [J]. Journal of Structural Engineering, 1986, 112(12): 2578-2591.
- [8] 周朝阳. 钢筋混凝土板和基础的冲切承载力[R]. 混凝土结构设计规范课题复合受力专题组研究报告(冲-1-3),长沙:长沙铁道学院,1991.
- [9] 任达, 刘坚, 焦楚杰. 源于纵筋面混凝土劈裂的无腹筋板冲切模型[J]. 土木建筑与环境工程, 2011, 33(2): 24-27.
- Ren D, Liu J, Jiao C J, Modeling of punching failure Initiated by concrete splitting at longitudinal Bar level for slabs without shear reinforcement [J]. Journal of Civil, Architectural & Enviromental Engineering, 2011, 33(2):24-27.
- [10] 任达. 无腹筋混凝土板受冲、剪承载力研究[D]. 长沙:中南大学,2002.
- [11] 周朝阳, 贺学军, 任达. 高强混凝土板的抗冲切能力 [J]. 结构工程与振动:研究报告集 6, 2003(6):35-46.
- [12] Elstner R C, Hognestad E. Shearing strength of reinforced concrete slabs [J]. Journal of ACI, 1956, 53(1):29-58.
- [13] Moe J. Shearing strength of reinforced concrete slabs and footings under concentrated loads [R]. Development Department Bulletin D47, Portland Cement Association, Skokie, Skokie, IL, 1961, 144.
- [14] Regan P E. Symmetric punching of reinforced concrete slabs [J]. Magazine of Concrete Research, 1986, 136(38):18-26.
- [15] 角田与史雄, 井藤昭夫, 藤田嘉夫. 鉄筋コンクリートスラブの押抜きせん断耐力に関する为实验的研究[R]. 土木学会論文報告集, 1974, 229(6).

(编辑 胡 玲)