

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2013.06.010

两种矩形板考虑初始恒载效应的位移伽辽金近似解

刘德贵, 周世军

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘要:基于板考虑初始恒载效应的应变能表达,运用变分原理导出了静力平衡控制微分方程。运用伽辽金法求解得到了四边固支、简支矩形板考虑初始恒载效应的近似活载(或后期荷载)位移表达式,并运用有限元法验证了公式的正确性。各近似位移表达式简单明了,清楚地反映了前期恒载和各因素对活载位移的影响,更为直观地说明了板的恒载效应这一概念。计算分析表明:初始恒载的存在增加了板的弯曲刚度,减小了活载位移;板的恒载效应主要受恒载大小、跨厚比和边界条件等因素的影响;对于较薄或弯曲刚度较小的板,在计算分析和结构设计中应考虑这种恒载效应对承受活载(或后期荷载)作用的受力行为影响。

关键词:近似解;恒载效应;位移;板

中图分类号:TU313 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2013)06-0058-09

Galerkin Approximate Solutions of Displacement Including the Effect of Dead Loads for Two Kinds of Rectangular Plates

Liu Degui, Zhou Shijun

(School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: Based on the strain energy considering the effect of dead loads, the general form static equilibrium differential equations were formulated by means of the potential energy principle. The approximate solutions of live load or later load displacement including the effect of dead loads for the clamped rectangular plate and the simply supported rectangular plate were generated by the Galerkin method. These formulas are simple and clear, and their physical concepts are explicit. The correctness of these formulas was verified by the finite element method. The dead loads and other factors that influence the effect of dead loads are shown by these formulas. The effect of dead loads on the two different boundary condition rectangular plate were analyzed by these approximate solutions. The effect of dead loads improves the bending stiffness of plate and minimizes the displacement of live loads or later loads. The key physical factors governing the effects of dead loads on plates are the dead load, the ration of span to thickness and boundary condition etc. This effect of dead loads is not negligible, especial in thinner plates or plates with smaller stiffness, more attention should be paid to the effect of dead load in the calculation and analysis for plates.

Key words: approximate solution; effect of dead loads; displacement; plate

收稿日期:2013-01-24

作者简介:刘德贵(1983-),男,博士生,主要从事结构工程研究,(E-mail)shll830520@163.com。

周世军(通信作者),男,教授,博士生导师,(E-mail)sjzhou8@163.com。

工程结构中,由于初始恒载的存在,当受到后续活载或荷载时,产生的位移和应力将受初始弯曲的影响而变小的现象被称为恒载效应^[1-4]。Taka-batake^[1-2]首次提出该概念,导出了梁考虑恒载效应的静、动力控制微分方程,并对简支梁和两端固定梁的恒载效应进行了研究,后来也分析了这一效应对板动力特性的影响^[3]。Zhou等^[4]和张家玮等^[5-7]进一步分析了恒载效应对梁受力性能的影响,提出了考虑恒载效应的有限梁单元;周世军^[8-9]提出了可供分析板恒载效应的矩形板单元。后来,张家玮等^[10-12]又提出了拱形梁考虑恒载效应的非线性控制微分方程,讨论恒载效应对拱形梁的动、静受力特性的影响。

目前为止,已有板的恒载效应研究未提出考虑板恒载效应的明确简单的活载(或后期荷载)位移解析解或近似解。本文基于板考虑恒载效应的应变能表达,运用变分原理推导出了直角坐标系下一般形式的静力平衡控制微分方程,运用伽辽金法解出了固支矩形板和简支矩形板考虑恒载效应的活载位移近似解,并用有限元法验证了近似解公式的正确性。该公式可直接用于考虑了恒载效应矩形板的受力分析。运用活载位移近似解,进行了不同长宽比的2种矩形板的恒载大小和厚度对活载(或后期荷载)位移影响分析。分析结果表明:板实际存在这种恒载效应,在较薄或弯曲刚度较小的板中表现明显,初始恒载的存在提高了板承受活载的弯曲刚度,减小了板活载位移;这种恒载效应主要受恒载大小、跨厚比和边界条件等因素的影响;对于较薄或弯曲刚度较小的板,计算分析中应考虑实际存在的这一恒载效应对板的受力行为产生的影响,以做到精确分析和合理结构设计。

1 板考虑恒载效应的应变能

基于假定^[3]:

- 1) Kirchhoff-Love 板理论的相关假定;
- 2) 忽略板中面的拉伸应变;
- 3) 已知恒载位移 \bar{w} 表达式。

板考虑恒载效应的应变能 U^* 可以表示为^[3]:

$$U^* = U + \bar{U} \quad (1)$$

式中: U 为活载 q 产生的应变能; \bar{U} 为恒载 \bar{q} 所产生初始弯曲应力产生的附加应变能。

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + t_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2)$$

$$\bar{U} = \iiint (\bar{\sigma}_x \epsilon_x + \bar{\sigma}_y \epsilon_y + \bar{t}_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (3)$$

对于应变能 U , 采用线性应变一位移关系; 而对于应变能 \bar{U} , 采用非线性应变一位移关系^[13]; 同时假定应力—应变关系是线性的, 最终应变能表达为:

$$U = \frac{D}{2} \iint \{ (\omega_{,xx} + \omega_{,yy})^2 + 2(1-\nu)[(\omega_{,xy})^2 - \omega_{,xx}\omega_{,yy}] \} dx dy \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{U} = D \iint [& \bar{w}_{,xx}\bar{w}_{,xx} + \bar{w}_{,yy}\bar{w}_{,yy} + 2\bar{w}_{,xy}\bar{w}_{,xy} + \\ & \nu(\bar{w}_{,yy}\bar{w}_{,xx} + \bar{w}_{,xx}\bar{w}_{,yy} - 2\bar{w}_{,xy}\bar{w}_{,xy})] dx dy + \\ & \frac{Eh}{4(1-\nu^2)} \iint \{ (\bar{w}_{,x})^2 (\omega_{,x})^2 + (\bar{w}_{,y})^2 (\omega_{,y})^2 + \\ & 2\bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y}\omega_{,x}\omega_{,y} + \nu[(\bar{w}_{,y})^2 (\omega_{,x})^2 + (\bar{w}_{,x})^2 (\omega_{,y})^2 - \\ & 2(\bar{w}_{,x})(\bar{w}_{,y})(\omega_{,x})(\omega_{,y})] \} dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

式中: E 为弹性模量; ν 为泊松比; h 为板的厚度; D 为板的弯曲刚度; ω 为活载(或后期荷载)位移; \bar{w} 为恒载位移。

2 静力平衡控制微分方程

假定板上只作用横向分布荷载, 忽略边界弯矩与作用力, 外力势能为:

$$V = \iint (\bar{q} + q) \omega dx dy \quad (6)$$

式中: \bar{q} 为分布恒载, q 为分布活载。

根据最小势能原理:

$$\delta(U^* - V) = 0 \quad (7)$$

可以得到直角坐标系下, 一般形式的考虑恒载效应的静力平衡控制微分方程, 如下所示:

$$\begin{aligned} D(\omega_{,xxxx} + 2\omega_{,xxyy} + \omega_{,yyyy}) - \\ \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(\bar{w}_{,x})^2 + \nu(\bar{w}_{,y})^2] \omega_{,x} + \right. \\ (1-\nu)\bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y}\omega_{,xy} + \frac{\partial}{\partial y} [(\bar{w}_{,y})^2 + \nu(\bar{w}_{,x})^2] \omega_{,y} + \\ \left. (1-\nu)\bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y}\omega_{,yx} \right\} = q \end{aligned} \quad (8)$$

3 位移近似解

3.1 伽辽金法

在加权余量法中, 若取权函数 W_j 等于试函数 φ_i , 这样求解微分方程近似解的方法称为伽辽金法^[13-14]。该方法在求解板的弹性位移近似解中得到了广泛的应用^[15], 本文也应用该方法求解板考虑恒载效应的活载位移表达式。

3.2 近似解法

板的理论位移精确解仅在形状规则和荷载简单的情况下能获得, 一般近似解都是通过伽辽金或里兹法等方法^[16]得到。板考虑恒载效应的活载位移近似解可基于本文假定, 取待定系数并满足边界条件的近似函数, 运用式(8)采用伽辽金法进行求

解。求解过程:

1) 认为恒载位移 \bar{w} 已知, 是满足弹性薄板弯曲静力平衡微分方程和边界条件的位移精确解或近似解 $\bar{w}(x, y)$ 。

2) 假定板考虑恒载效应的含未知待定系数的活载位移表达式, 需满足边界条件和微分方程的阶次要求。

3) 将已知恒载位移表达式及未知活载位移表达式代入板考虑恒载效应的静力平衡控制微分方程, 建立伽辽金方程组。

4) 求解伽辽金方程组, 解出活载位移表达式中

$$a_1 = \frac{77[7(a^8 + b^8) + 39(a^6b^2 + a^2b^6) + 715a^4b^4]\bar{q}}{64D[7(a^4 + b^4) + 4a^2b^2][35(a^8 + b^8) + 156(a^6b^2 + a^2b^6) + 2\ 288a^4b^4]}$$

$$a_2 = \frac{1\ 001(a^2 + b^2)\bar{q}}{128D[35(a^8 + b^8) + 156(a^6b^2 + a^2b^6) + 2\ 288a^4b^4]}$$

而对考虑恒载效应的活载位移近似解, 取满足边界条件的表达式:

$$w = b_1\varphi_1(x, y) + b_2\varphi_2(x, y) \quad (10)$$

式中: $\varphi_1(x, y) = (a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2$;

$\varphi_2(x, y) = (a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2(x^2 + y^2)$ 。

未知系数 b_1, b_2 由微分方程式(8)和试函数 $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$ 决定的伽辽金方程组给出。通过求解, b_1, b_2 解答如下:

$$b_1 = \frac{(S_3 + S_4 \frac{D_1 a^8 \bar{q}^2}{D^3})q}{Da^4 [1 + S_1 \frac{D_1 a^8 \bar{q}^2}{D^3} + S_2 (\frac{D_1 a^8 \bar{q}^2}{D^3})^2]} \quad (11a)$$

$$b_2 = \frac{(S_5 + S_6 \frac{D_1 a^8 \bar{q}^2}{D^3})q}{Da^6 [1 + S_1 \frac{D_1 a^8 \bar{q}^2}{D^3} + S_2 (\frac{D_1 a^8 \bar{q}^2}{D^3})^2]} \quad (11b)$$

式中: $D_1 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}$; 对于不同的长宽比 (b/a)

值, $S_i (i = 1, \dots, 6)$ 为常数, 如表 1 所示。

2) 简支矩形板

假定四边简支矩形板承受均布恒载和活载。恒

$$b_1 = \frac{a^4 q [S_5 + S_6 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}}) + S_7 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^2 + S_8 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^3]}{D\pi^6 [1 + S_1 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}}) + S_2 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^2 + S_3 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^3 + S_4 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^4]} \quad (14a)$$

$$b_2 = \frac{a^4 q (S_9 + S_{10} (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}}) + S_{11} (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^2 + S_{12} (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^3)}{D\pi^6 [1 + S_1 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}}) + S_2 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^2 + S_3 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^3 + S_4 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^4]} \quad (14b)$$

$$b_3 = \frac{a^4 q (S_{13} + S_{14} (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}}) + S_{15} (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^2 + S_{16} (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^3)}{D\pi^6 [1 + S_1 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}}) + S_2 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^2 + S_3 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^3 + S_4 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^4]} \quad (14c)$$

待定系数, 得到板考虑恒载效应的活载位移表达。

3.3 位移近似解

1) 固支矩形板

四边固支矩形板承受均布恒载和活载。根据上述求解步骤, 恒载位移取较为精确近似解, 由如下公式给出^[14]:

$$\bar{w} = (a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2 [(a_1 + a_2(x^2 + y^2))] \quad (9)$$

式中: a 为矩形板短边长度的一半; b 为矩形板长边长度的一半。

载位移采用重三角级数解^[16]:

$$\bar{w} = \frac{16\bar{q}}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^2} \quad (12)$$

式中: a 为矩形板短边长度, b 为矩形板长边长度。在此仅取级数的前 4 项, 即 $m = 1, n = 1, 3; m = 3, n = 1, 3$, 可以保证恒载位移足够的精度。而对考虑恒载效应的活载位移近似解, 也取满足边界条件的 4 项三角级数表达式:

$$w = b_1\varphi_1(x, y) + b_2\varphi_2(x, y) + b_3\varphi_3(x, y) + b_4\varphi_4(x, y) \quad (13)$$

其中: $\varphi_1(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$; $\varphi_2(x, y) =$

$\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}$; $\varphi_3(x, y) = \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$; $\varphi_4(x, y) =$

$\sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}$ 。未知系数 $b_i (i = 1, \dots, 4)$ 由微分方

程式(8)和试函数 $\varphi_i(x, y) (i = 1, \dots, 4)$ 决定的伽辽金方程组给出。通过求解, $b_i (i = 1, \dots, 4)$ 解答如下:

$$b_4 = \frac{a^4 q(S_{17} + S_{18} (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}}) + S_{19} (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^2 + S_{20} (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^3}{D\pi^6 [1 + S_1 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}}) + S_2 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^2 + S_3 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^3 + S_4 (\frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3 \pi^{12}})^4]} \quad (14d)$$

表 1 固支矩形板考虑恒载效应的活载位移表达式中常数 $S_i (i = 1, \dots, 6)$

b/a	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
1.0	$5.938\ 4 \times 10^{-5} + 9.331\ 9 \times 10^{-8} v$	$4.226\ 1 \times 10^{-10} + 4.213\ 2 \times 10^{-12} v$	$2.020\ 2 \times 10^{-2}$	$1.408\ 2 \times 10^{-7} + 1.885\ 3 \times 10^{-9} v$	$5.857\ 9 \times 10^{-3}$	$5.971\ 9 \times 10^{-7} + 5.466\ 6 \times 10^{-10} v$
1.1	$8.452\ 4 \times 10^{-5} + 2.417\ 3 \times 10^{-7} v$	$8.559\ 8 \times 10^{-10} + 1.552\ 1 \times 10^{-11} v$	$1.644\ 6 \times 10^{-2}$	$1.617\ 5 \times 10^{-7} + 3.975\ 4 \times 10^{-9} v$	$4.403\ 3 \times 10^{-3}$	$6.354\ 7 \times 10^{-7} + 1.064\ 4 \times 10^{-9} v$
1.2	$1.111\ 7 \times 10^{-4} + 6.981\ 4 \times 10^{-7} v$	$1.480\ 3 \times 10^{-9} + 5.882\ 0 \times 10^{-11} v$	$1.328\ 2 \times 10^{-2}$	$1.678\ 4 \times 10^{-7} + 9.272\ 8 \times 10^{-9} v$	$3.395\ 1 \times 10^{-3}$	$6.353\ 5 \times 10^{-7} + 2.370\ 2 \times 10^{-9} v$
1.3	$1.376\ 4 \times 10^{-4} + 1.555\ 4 \times 10^{-6} v$	$2.271\ 0 \times 10^{-9} + 1.616\ 8 \times 10^{-10} v$	$1.068\ 8 \times 10^{-2}$	$1.615\ 3 \times 10^{-7} + 1.662\ 5 \times 10^{-8} v$	$2.672\ 4 \times 10^{-3}$	$6.068\ 5 \times 10^{-7} + 4.156\ 7 \times 10^{-9} v$
1.4	$1.627\ 6 \times 10^{-4} + 2.851\ 2 \times 10^{-6} v$	$3.184\ 2 \times 10^{-9} + 3.487\ 8 \times 10^{-10} v$	$8.597\ 7 \times 10^{-3}$	$1.471\ 3 \times 10^{-7} + 2.451\ 4 \times 10^{-8} v$	$2.139\ 1 \times 10^{-3}$	$5.607\ 0 \times 10^{-7} + 6.098\ 9 \times 10^{-9} v$
1.5	$1.858\ 5 \times 10^{-4} + 4.573\ 3 \times 10^{-6} v$	$4.175\ 6 \times 10^{-9} + 6.349\ 8 \times 10^{-10} v$	$6.929\ 5 \times 10^{-3}$	$1.288\ 2 \times 10^{-7} + 3.169\ 0 \times 10^{-8} v$	$1.735\ 7 \times 10^{-3}$	$5.057\ 7 \times 10^{-7} + 7.937\ 9 \times 10^{-9} v$
1.6	$2.066\ 4 \times 10^{-4} + 6.673\ 7 \times 10^{-6} v$	$5.211\ 9 \times 10^{-9} + 1.022\ 8 \times 10^{-9} v$	$5.604\ 4 \times 10^{-3}$	$1.097\ 7 \times 10^{-7} + 3.740\ 2 \times 10^{-8} v$	$1.424\ 1 \times 10^{-3}$	$4.483\ 3 \times 10^{-7} + 9.504\ 0 \times 10^{-9} v$
1.7	$2.251\ 1 \times 10^{-4} + 9.082\ 8 \times 10^{-6} v$	$6.275\ 8 \times 10^{-9} + 1.504\ 0 \times 10^{-9} v$	$4.553\ 1 \times 10^{-3}$	$9.195\ 3 \times 10^{-8} + 4.135\ 5 \times 10^{-8} v$	$1.179\ 0 \times 10^{-3}$	$3.923\ 9 \times 10^{-7} + 1.070\ 9 \times 10^{-8} v$
1.8	$2.414\ 5 \times 10^{-4} + 1.172\ 1 \times 10^{-5} v$	$7.363\ 8 \times 10^{-9} + 2.062\ 4 \times 10^{-9} v$	$3.717\ 7 \times 10^{-3}$	$7.640\ 3 \times 10^{-8} + 4.357\ 4 \times 10^{-8} v$	$9.832\ 8 \times 10^{-4}$	$3.402\ 3 \times 10^{-7} + 1.152\ 5 \times 10^{-8} v$
1.9	$2.559\ 3 \times 10^{-4} + 1.450\ 5 \times 10^{-5} v$	$8.483\ 0 \times 10^{-9} + 2.677\ 8 \times 10^{-9} v$	$3.052\ 1 \times 10^{-3}$	$6.347\ 4 \times 10^{-8} + 4.427\ 0 \times 10^{-8} v$	$8.249\ 9 \times 10^{-4}$	$2.929\ 4 \times 10^{-7} + 1.196\ 7 \times 10^{-8} v$
2.0	$2.688\ 2 \times 10^{-4} + 1.735\ 7 \times 10^{-5} v$	$9.645\ 4 \times 10^{-9} + 3.329\ 0 \times 10^{-9} v$	$2.519\ 5 \times 10^{-3}$	$5.311\ 1 \times 10^{-8} + 4.373\ 0 \times 10^{-8} v$	$6.956\ 2 \times 10^{-4}$	$2.509\ 1 \times 10^{-7} + 1.207\ 4 \times 10^{-8} v$

$S_i (i = 1, \dots, 20)$ 为常数, 对于各 $b_i (i = 1, \dots, 4)$ 分别由表 2~6 给出。

表 2 简支矩形板考虑恒载效应的活载位移表达式中常数 $S_i (i = 1, \dots, 4)$

b/a	S_1	S_2	S_3	S_4
1.0	$(5.894\ 2 + 0.263\ 0 v)$	$1.365\ 4 (2.774\ 3 + v) (108\ 694 + v) 10^{-5}$	$6.933\ 6 (0.778\ 9 + v) (10\ 789. + v) 10^{-5}$	0
1.1	$(9.358\ 9 + 0.859\ 6 v)$	$0.181\ 1 (2.207\ 5 + v) (39.196\ 4 + v)$	$1.738\ 0 (1.261\ 7 + v) (4.769\ 1 + v) (85\ 004 + v) 10^{-5}$	$1.276\ 5 (0.794\ 1 + v) (1.714\ 4 + v) (839\ 7.29 + v) 10^{-4}$
1.2	$(12.834 + 1.167\ 4 v)$	$0.328\ 9 (2.217\ 4 + v) (40.140\ 0 + v)$	$6.805\ 3 (1.282\ 3 + v) (4.803\ 8 + v) (53\ 969.1 + v) 10^{-5}$	$6.851\ 3 (0.834\ 9 + v) (1.685\ 7 + v) (5\ 267.71 + v) 10^{-4}$
1.3	$(16.848\ 9 + 1.512\ 3 v)$	$0.539\ 1 (2.233\ 8 + v) (41.5619 + v)$	$2.235\ 5 (1.312\ 7 + v) (4.866\ 1 + v) (35\ 246.8 + v) 10^{-4}$	$2.951\ 5 (0.895\ 6 + v) (1.651\ 5 + v) (3\ 382.77 + v) 10^{-3}$
1.4	$(21.333\ 5 + 1.885\ 7 v)$	$0.812\ 8 (2.257\ 2 + v) (43.386\ 7 + v)$	$6.066\ 17 (1.351\ 2 + v) (4.960\ 6 + v) (24\ 701.4 + v) 10^{-4}$	$1.012\ 2 (0.972\ 3 + v) (1.621\ 1 + v) (2\ 324.38 + v) 10^{-2}$
1.5	$(26.204\ 3 + 2.279\ 2 v)$	$1.144\ 7 (2.288\ 6 + v) (45.561\ 5 + v)$	$1.400\ 5 (1.397\ 1 + v) (5.090\ 3 + v) (18\ 416.2 + v) 10^{-3}$	$2.862\ 1 (1.061\ 4 + v) (1.601\ 8 + v) (1\ 696.69 + v) 10^{-2}$
1.6	$(31.373\ 1 + 2.684\ 6 v)$	$1.523\ 6 (2.328\ 9 + v) (48.047\ 1 + v)$	$2.835\ 9 (1.450\ 3 + v) (5.255\ 8 + v) (14\ 404.7 + v) 10^{-3}$	$6.911\ 8 (1.159\ 1 + v) (1.599\ 7 + v) (1\ 298.76 + v) 10^{-2}$
1.7	$(36.754\ 1 + 3.094\ 3 v)$	$1.934\ 6 (2.378\ 8 + v) (50.813 + v)$	$5.162\ 9 (1.511\ 1 + v) (5.456\ 7 + v) (11\ 688.1 + v) 10^{-3}$	$0.146\ 7 (1.259\ 7 + v) (1.621\ 1 + v) (1\ 031.51 + v)$

续表 2

b/a	S_1	S_2	S_3	S_4
1.8	$(42.269\ 1+3.501\ 8v)$	$2.361\ 6(2.438\ 9+v)$ $(53.833\ 9+v)$	$8.613\ 0(1.579\ 9+v)$ $(5.691\ 0+v)(9\ 758.68+v)\ 10^{-3}$	$0.279\ 8(1.355\ 5+v)$ $(1.674\ 3+v)(843.471+v)$
1.9	$(47.850\ 2+3.901\ 2v)$	$2.788\ 7(2.509\ 8+v)$ $(57.089+v)$	$1.336\ 3(1.657\ 4+v)$ $(5.956\ 8+v)(8\ 335.3+v)\ 10^{-2}$	$0.488\ 0(1.439\ 7+v)$ $(1.765\ 3+v)(706.129+v)$
2.0	$(53.440\ 5+4.287\ 7v)$	$3.201\ 9(2.591\ 6+v)$ $(60.56+v)$	$1.950\ 9(1.744\ 1+v)$ $(6.251\ 5+v)(7\ 253.16+v)\ 10^{-2}$	$0.789\ 7(1.514\ 6+v)$ $(1.891\ 6+v)(602.762+v)$

表 3 简支矩形板考虑恒载效应的活载位移表达式中常数 $S_i(i=5, \dots, 8)$

b/a	S_5	S_6	S_7	S_8
1.0	4.000 0	$(3.237\ 9+1.052\ 1v)$	$5.614\ 2(0.846\ 5+v)$ $(11\ 087.9+v)\ 10^{-5}$	0
1.1	4.796 3	$(9.600\ 5+4.122\ 7v)$	$0.868\ 7(1.304\ 1+v)$ $(5.250\ 4+v)$	$8.335\ 8(0.859\ 5+v)(1.721\ 5+v)$ $(8\ 633.97+v)\ 10^{-5}$
1.2	5.572 7	$(15.265\ 3+6.505\ 4v)$	$1.833\ 1(1.331\ 7+v)$ $(5.294\ 6+v)$	$3.792\ 4(0.894\ 1+v)(1.711\ 2+v)$ $(5\ 422.74+v)\ 10^{-4}$
1.3	6.315 2	$(22.675\ 4+9.550\ 3v)$	$3.404\ 4(1.372\ 9+v)$ $(5.370\ 0+v)$	$1.411\ 8(0.945\ 6+v)(1.703\ 0+v)$ $(3\ 488.42+v)\ 10^{-3}$
1.4	7.015 3	$(31.901\ 4+13.229\ v)$	$5.702\ 4(1.425\ 4+v)$ $(5.480\ 1+v)$	$4.255\ 6(1.010\ 6+v)(1.703\ 7+v)$ $(2\ 402.1+v)\ 10^{-3}$
1.5	7.668 6	$(42.960\ 6+17.478\ 3v)$	$8.778\ 5(1.487\ 5+v)$ $(5.627\ 1+v)$	$1.074\ 0(1.086\ 4+v)(1.718\ 1+v)$ $(1\ 757.66+v)\ 10^{-2}$
1.6	8.273 7	$(55.833\ 6+22.211\ 2v)$	$12.605\ 6(1.558\ 4+v)$ $(5.811\ 6+v)$	$2.346\ 4(1.170\ 5+v)(1.749\ 7+v)$ $(1\ 348.95+v)\ 10^{-2}$
1.7	8.831 1	$(70.476\ 7+27.326\ 2v)$	$17.084\ 9(1.637\ 7+v)$ $(6.033+v)$	$4.559\ 4(1.261\ 2+v)(1.800\ 6+v)$ $(1\ 074.35+v)\ 10^{-2}$
1.8	9.342 8	$(86.830\ 4+32.716\ 5v)$	$22.064\ 1(1.725\ 2+v)$ $(6.289\ 9+v)$	$8.046\ 9(1.356\ 7+v)(1.872\ 0+v)$ $(881.043+v)\ 10^{-2}$
1.9	9.811 4	$(104.823+38.267\ 3v)$	$27.361\ 5(1.820\ 6+v)$ $(6.580\ 7+v)$	$0.131\ 1(1.456\ 2+v)(1.964\ 4+v)$ $(739.786+v)$
2.0	10.24	$(124.374+43.905\ 6v)$	$32.787\ 6(1.924\ 0+v)$ $(6.903+v)$	$0.199\ 8(1.559\ 2+v)(2.077\ 2+v)$ $(633.424+v)$

表 4 简支矩形板考虑恒载效应的活载位移表达式中常数 $S_i(i=9, \dots, 12)$

b/a	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
1.0	$5.333\ 3 \times 10^{-2}$	$(5.258\ 3+1.402\ 8v)\ 10^{-2}$	$7.281\ 9(-15\ 720.6+v)$ $(-1.733\ 2+v)\ 10^{-7}$	0
1.1	$7.490\ 6 \times 10^{-2}$	$(34.431\ 6+6.438\ 6v)\ 10^{-2}$	$(0.326\ 4+0.103\ 4v+0.013\ 568\ v^2)$	$1.301\ 9(-9\ 302.5+v)(-5.298\ 9+v)$ $(1.180\ 2+v)\ 10^{-6}$
1.2	0.101 5	$(0.911\ 1+0.118\ 5v)$	$(1.193\ 0+0.376\ 3v+0.033\ 377\ v^2)$	$6.905\ 1(-4\ 488.53+v)$ $(-10.7235+v)(1.016\ 3+v)\ 10^{-6}$
1.3	0.133 3	$(1.948\ 7+0.201\ 6v)$	$7.185\ 7(5.154\ 9+v)$ $(8.964\ 6+v)\ 10^{-2}$	$2.979\ 8(-2\ 208.71+v)$ $(-18.108\ 3+v)(0.9813+v)\ 10^{-5}$
1.4	0.170 6	$(3.636\ 1+0.321\ 6v)$	$0.138\ 6(4.882\ 1+v)$ $(11.426\ 3+v)$	$1.034\ 7(-1\ 133.1+v)(-28.504+v)$ $(1.004\ 7+v)\ 10^{-4}$
1.5	0.213 3	$(6.149\ 2+0.486\ 2v)$	$0.244\ 2(4.972\ 8+v)$ $(13.012\ 4+v)$	$2.987\ 6(-576.062+v)(-45.461\ 9+v)$ $(1.062\ 4+v)\ 10^{-4}$
1.6	0.261 6	$(9.643\ 9+0.702\ 2v)$	$0.398\ 5(5.198\ 6+v)$ $(14.076\ 5+v)$	$7.417\ 5(-234.018+v)(-91.843\ 8+v)$ $(1.144\ 4+v)\ 10^{-4}$

续表 4

b/a	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
1.7	0.315 1	(14.244+0.975 0 v)	0.609 6 (5.505 8 + v) (14.775 + v)	1.626 8 (1.245 7 + v) (17 881.6 - 153.936 $v+v^2$) 10^{-3}
1.8	0.373 7	(20.033 2+1.308 6 v)	0.882 5 (5.874 1 + v) (15.208 8 + v)	3.218 7 (1.363 47 + v) (15 078.6 - 49.389 3 $v+v^2$) 10^{-3}
1.9	0.437 1	(27.052 6+1.705 2 v)	1.219 0 (6.294 6 + v) (15.448 8 + v)	5.841 1(1.496 2+ v) (12 879.3 + 16.267 6 $v+v^2$) 10^{-3}
2.0	0.504 9	(35.300 7+2.165 0 v)	1.616 74 (6.763 45 + v) (15.545 2 + v)	9.850 7 (1.642 8 + v) (11 134.6 + 58.442 4 $v+v^2$) 10^{-3}

表 5 简支矩形板考虑恒载效应的活载位移表达式中常数 $S_i(i = 13, \dots, 16)$

b/a	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}
1.0	$5.333 3 \times 10^{-2}$	(5.258 3+1.402 8 v) 10^{-2}	7.281 9 (-15 720.6+ v) (-1.733 2 v) 10^{-7}	0
1.1	$5.523 4 \times 10^{-2}$	(-0.875 3+4.747 7 v) 10^{-2}	1.000 5 (-3.157 1+ v) (1.081 9+ v) 10^{-2}	9.599 5 (-15 998.5+ v) (-0.290 1+ v) (2.824 9+ v) 10^{-7}
1.2	$5.674 8 \times 10^{-2}$	(-0.180 0+0.066 247 v)	1.866 7 (-8.990 5+ v) (1.919 4+ v) 10^{-2}	3.861 9 (-12 759.2+ v) (0.163 6+ v) (3.687 4+ v) 10^{-6}
1.3	$5.797 0 \times 10^{-2}$	(-0.434 6+0.087 666 v)	3.125 1 (-14.118 1+ v) (2.203 7+ v) 10^{-2}	1.295 9 (-10 156.3+ v) (0.399 4+ v) (4.089 9 + v) 10^{-5}
1.4	$5.896 8 \times 10^{-2}$	(-0.767 8+0.111 2 v)	4.793 2 (-19.018 9+ v) (2.381 6+ v) 10^{-2}	3.577 1 (-8 452.77+ v) (0.585 2+ v) (4.193 46 + v) 10^{-5}
1.5	$5.979 2 \times 10^{-2}$	(-1.169 0+0.136 3 v)	6.844 6 (-23.836 9+ v) (2.522 5+ v) 10^{-2}	8.373 7 (-7 320.65+ v) (0.765 00+ v) (4.141 1 + v) 10^{-5}
1.6	$6.048 0 \times 10^{-2}$	(-1.624 1+0.162 4 v)	9.214 6 (-28.684+ v) (2.647 2+ v) 10^{-2}	1.715 2 (-6 529.5+ v) (0.954 6+ v) (4.017 9 + v) 10^{-4}
1.7	$6.105 8 \times 10^{-2}$	(-2.117 6+0.188 9 v)	0.118 1 (-33.658 7+ v) (2.763 8+ v)	3.152 4(-5 949.02+ v) (1.162 12+ v) (3.868 3 + v) 10^{-4}
1.8	$6.154 8 \times 10^{-2}$	(-2.635 0+0.215 5 v)	0.145 4 (-38.846 4+ v) (2.876 2+ v)	5.301 25 (-5 505.87+ v) (1.393 6+ v) (3.712 0+ v) 10^{-4}
1.9	$6.197 0 \times 10^{-2}$	(-3.162 8+0.241 8 v)	0.172 8 (-44.318 3+ v) (2.986 6+ v)	8.281 3 (-5 157.11+ v) (1.657 0+ v) (3.552 8 + v) 10^{-4}
2.0	$6.233 3 \times 10^{-2}$	(-3.689 8 + 0.267 3 v)	0.199 6 (-50.131 5+ v) (3.096 4 + v)	1.216 0(-4 876.39+ v) (1.968 3+ v)(3.379 3+ v) 10^{-3}

表 6 简支矩形板考虑恒载效应的活载位移表达式中常数 $S_i(i = 17, \dots, 20)$

b/a	S_{17}	S_{18}	S_{19}	S_{20}
1.0	$5.486 9 \times 10^{-3}$	(0.182 6+0.001 443 3 v)	7.491 7 (14.316 + v) (97 987.4 + v) 10^{-8}	0
1.1	$6.579 3 \times 10^{-3}$	(0.319 8 + 0.005 655 v)	1.191 7 (3.113 9 + v) (139.673 + v) 10^{-3}	1.143 5 (1.724 0 + v) (14.019 5+ v) (77 197.5 + v) 10^{-7}
1.2	$7.644 3 \times 10^{-3}$	(0.499 8 + 0.008 923 8 v)	2.514 6(3.119 4 + v) (137.948 + v) 10^{-3}	5.202 2(1.715 7 + v) (13.288 1 + v) (49 946.8+ v) 10^{-7}
1.3	$8.662 9 \times 10^{-3}$	(0.723 4 + 0.013 101 v)	4.670 0 (3.125 2 + v) (135.578 + v) 10^{-3}	1.936 7 (1.698 5 + v) (12.341 4 + v) (33 459.5+ v) 10^{-6}
1.4	$9.623 2 \times 10^{-3}$	(0.984 2 + 0.018 147 v)	7.822 2 (3.128 9 + v) (132.865 + v) 10^{-3}	5.837 6 (1.667 6 + v) (11.339 + v) (24 124.5 + v) 10^{-6}
1.5	$1.051 9 \times 10^{-2}$	(1.273 3 + 0.023 976 v)	1.204 2 (3.127 9 + v) (130.009 + v) 10^{-2}	1.473 2 (1.617 8 + v) (10.376 4 + v) (18 518.9 + v) 10^{-5}

续表 6

b/a	S_{17}	S_{18}	S_{19}	S_{20}
1.6	1.1349×10^{-2}	$(1.5806 + 0.030468v)$	$1.7292(3.1202 + v)$ $(127.121 + v) 10^{-2}$	$3.2186(1.5427 + v)$ $(9.5030 + v)(14907.2 + v) 10^{-5}$
1.7	1.2114×10^{-2}	$(1.8960 + 0.037484v)$	$2.3436(3.10368 + v)$ $(124.251 + v) 10^{-2}$	$6.25432(1.4359 + v)$ $(8.7405 + v)(12434.9 + v) 10^{-5}$
1.8	1.2816×10^{-2}	$(2.2101 + 0.044877v)$	$3.0266(3.0764 + v)$ $(121.403 + v) 10^{-2}$	$1.1038(1.2912 + v)$ $(8.0952 + v)(10658. + v) 10^{-4}$
1.9	1.3459×10^{-2}	$(2.5148 + 0.052505v)$	$3.7533(3.0361 + v)$ $(118.557 + v) 10^{-2}$	$1.7985(1.1035 + v)$ $(7.5657 + v)(9330.73 + v) 10^{-4}$
2.0	1.4047×10^{-2}	$(2.8034 + 0.060227v)$	$4.49761(2.9805 + v)$ $(115.68 + v) 10^{-2}$	$2.7404(0.8699 + v)$ $(7.1460 + v)(8308.32 + v) 10^{-4}$

2 种矩形板考虑恒载效应的活载位移近似解,是基于静力平衡微分方程,采用伽辽金法求解得到的;且每一近似解系数中无一例外地都包含 $\frac{D_1 a^8 \bar{q}^2}{D^3}$;当恒载为 0 时,考虑恒载效应的活载或后期荷载位移也都等同于弹性活载位移。

4 验证

为验证上述矩形板考虑恒载效应的近似解的正

确性,将上述近似解与文献[9]提出的有限元法计算结果进行对比。相关计算参数如下:矩形板短边边长均为 2 m,长边边长视长宽比 b/a 值而定,固支矩形板厚 $h = 10$ mm,简支矩形板厚 $h = 15$ mm;材料和荷载参数同文献[3]: $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, $\nu = 0.3$;恒载: $\bar{q}_0 = 3825$ N/m²,活载 $q = 5884$ N/m²。计算结果对比如表 7 和 8 所示。

表 7 固支矩形板形心位置活载位移计算结果对比

b/a	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
有限元解 ^[9]	5.53	6.27	6.84	7.24	7.50	7.65	7.73	7.75	7.74	7.70	7.65
本文解	5.50	6.25	6.82	7.22	7.49	7.65	7.74	7.77	7.76	7.72	7.66

表 8 简支矩形板形心位置活载位移计算结果对比

b/a	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
有限元解 ^[9]	5.20	5.90	6.44	6.80	7.02	7.11	7.11	7.03	6.92	6.77	6.61
本文解	5.21	5.94	6.51	6.91	7.16	7.28	7.30	7.25	7.14	7.00	6.84

从上述计算结果对比可以看出,上述矩形板考虑恒载效应的活载位移近似解具有足够的精确度;因此近似解合理正确,可以用于分析 $1.0 \leq b/a \leq 2.0$ 的矩形板恒载效应分析。

5 分析

为进一步明确恒载效应及相关因素对上述 2 种板受力性能带来的影响,如下作考虑恒载效应的活载位移分析。计算分析中作如下规定:假定板在恒载作用下,恒载位移按板的弹性理论进行计算;而计算活载位移时,考虑恒载效应的影响,按本文得到的近似解进行计算。

从上述矩形板考虑恒载效应的活载位移近似解可以看出:该解不同于板的弹性理论解,近似解的系

数都包含 $\frac{D_1 a^8 \bar{q}^2}{D^3}$,可更为明确地表示为:
 $\frac{864(1-\nu^2)^2}{E^2} \left(\frac{a}{h}\right)^8 \bar{q}^2$,该项表明当板的边界条件和材料确定,恒载效应主要受恒载大小、几何尺寸和厚度的影响。如定义 $\left(\frac{a}{h}\right)$ 为板的跨厚比,则厚度的改变意味着跨厚比的影响;同时考虑实际结构中板受到恒载和活载作用后的受力、变形在合理范围内,并保证在小变形范围内;对于既定的结构,恒载取值也很少出现大幅度变化。因此,下文进行合理恒载大小和厚度对活载位移的影响分析。

在以下分析计算和图表表达中, w_{\max} 表示板形心位置考虑恒载效应的最大活载(或后期荷载)位

移; w_{\max}^* 表示板形心位置未考虑恒载效应的最大活载位移; \bar{q}_0 为选定的参考分布恒载; \bar{q} 表示实际施加的分布恒载。材料参数: $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, $\nu = 0.3$; 参考恒载 $\bar{q}_0 = 2\ 500$ N/m², 活载 $q = 3\ 000$ N/m²。分析结果采用无量纲坐标系 $w_{\max}/w_{\max}^* - \bar{q}/\bar{q}_0$ 的图表形式表达。

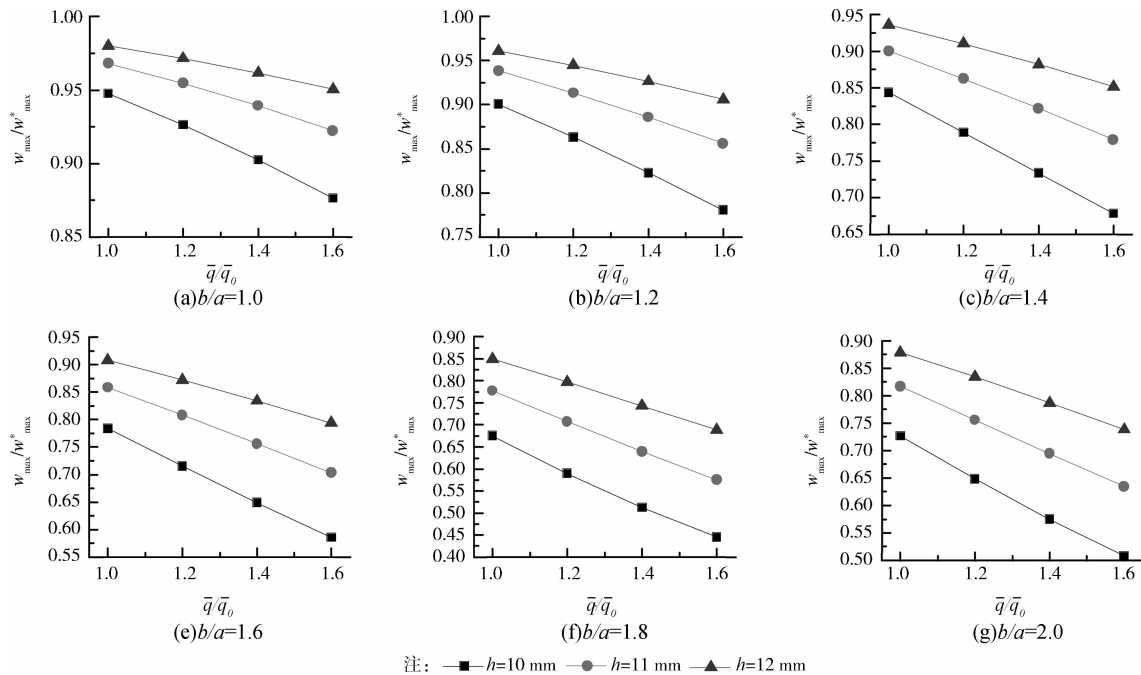


图1 固支矩形板 $w_{\max}/w_{\max}^* - \bar{q}/\bar{q}_0$ 关系曲线

2) 简支矩形板

简支矩形板的短边长 $a = 2$ m, 对厚 h 分别为 15、16 和 17 mm 的 3 类板进行分析。通过计算分析, 得到了如图 2 所示不同长宽比 (b/a) 值矩形板 w_{\max}/w_{\max}^* 随恒载比率 \bar{q}/\bar{q}_0 变化的关系曲线。

从以上 2 种不同支撑条件的矩形板考虑恒载效应的活载位移计算结果可以看出: 考虑了初始恒载效应的活载或后期荷载伽辽金近似解计算结果明显小于弹性理论计算结果, 这说明初始恒载提高了板在承受活载(或后期荷载)时的弯曲刚度。而且, 恒载越大, 板的厚度越小, 这种初始恒载效应越明显; 简支边界条件板的恒载效应明显于固支边界条件板; 对上述 2 种矩形板来说, 荷载和厚度、短边尺寸一定, 恒载效应随长宽比的增加而增加。导致这种与弹性薄板理论计算结果差异的主要原因在于: 已有弹性薄板理论忽略了初始荷载产生的初始弯曲应力与后期荷载应变耦合所产生的附加应变能 \bar{U} , 以致最终形成了与已有弹性薄板理论不同的应变能表达和静力平衡控制微分方程及活载或后期荷载位移计算公式。另外, 上述计算分析中, 考虑恒载效应的

1) 固支矩形板

为清楚各因素对固支矩形板恒载效应的影响, 设定矩形板的短边长 $2a = 2$ m, 设定 3 种不同的厚度, 分别为 10、11 和 12 mm。通过计算分析, 得到了如图 1 所示不同长宽比 (b/a) 值矩形板 w_{\max}/w_{\max}^* 随恒载比率 \bar{q}/\bar{q}_0 变化的关系曲线。

总位移均小于或略大于板的厚度, 且板在最大的恒载 ($1.6\bar{q}_0$) 和活载的作用下, 按弹性理论^[16] 计算获得的最大应力分别为: 139.3、74.6 MPa。表明活载和恒载合理的取值范围内。这说明在合理的恒载和活载的取值范围内, 2 种不同支撑条件的矩形板恒载效应明显, 因此在板的计算和分析中应考虑这种恒载效应。

6 结论

基于考虑初始恒载效应的应变能公式, 运用变分原理导出考虑板恒载效应一般形式的静力平衡控制微分方程; 运用伽辽金法求解得到了固支和简支矩形板考虑恒载效应的活载位移近似计算公式, 提供了可供查询的活载位移表达式中的常数表格。并运用位移表达式进行了计算分析, 得到了有关板恒载效应的结论。

1) 2 种矩形板考虑恒载效应的伽辽金位移近似解的获得, 更为清楚地说明了恒载对板承受活载(或后期荷载)受力性能产生的影响, 初始恒载增大了板活载的弯曲刚度, 减小了活载位移; 各位移表达式简

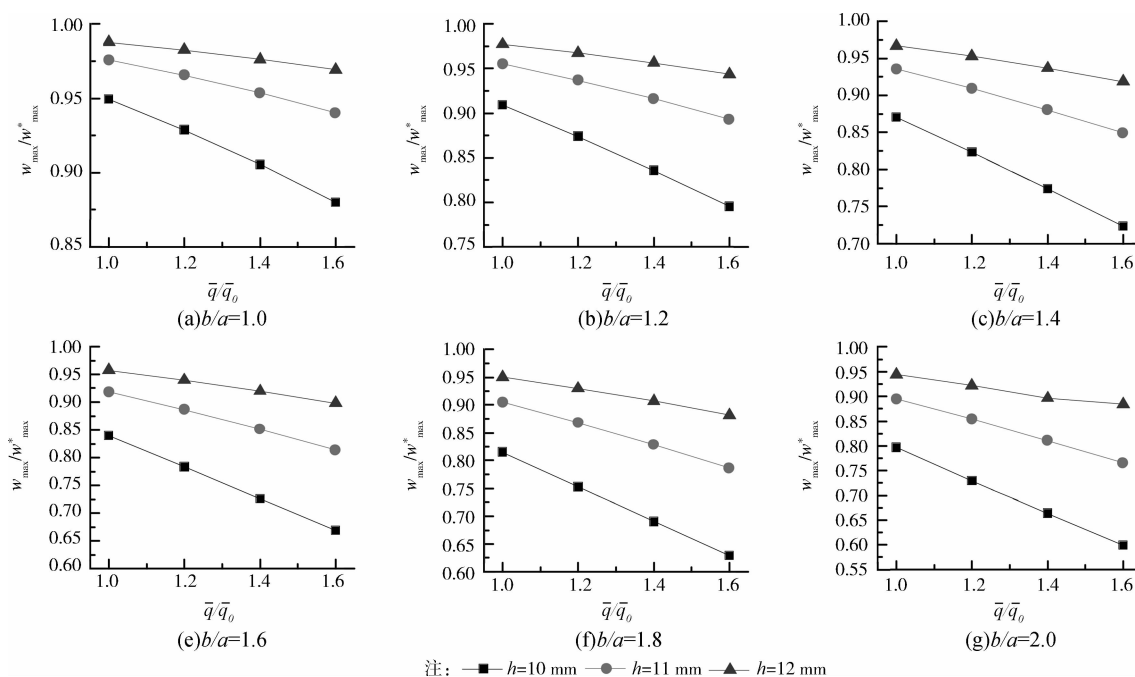


图 2 简支矩形板 $w_{max}/w_{max}^* - \bar{q}/\bar{q}_0$ 关系曲线

单明了,物理意义明确,可方便运用于 2 种矩形板在均布荷载作用下考虑恒载效应的受力分析。

2) 矩形板的恒载效应主要受恒载大小、板的尺寸、厚度和边界条件的影响。初始恒载越大,跨厚比越大,边界约束越弱,这种效应越明显。

3) 恒载效应对板的受力性能产生了不可忽略的影响,在厚度较薄或弯曲刚度较小的板中表现尤为明显,在计算分析与结构设计中,应充分细致考虑实际存在的这一恒载效应,以做到精确分析与合理设计。

参考文献:

[1] Takabatake H. Effects of dead loads in static beams [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1990, 116(4): 1102-1120.
 [2] Takabatake H. Effects of dead loads on natural frequencies of beams [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1991, 117(4): 1039-1052.
 [3] Takabatake H. Effects of dead loads in dynamic plate [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1992, 118(1): 34-51.
 [4] Zhou S J, Zhu X. Analysis of effect of dead loads on natural frequency of beams using finite element techniques [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1996, 122(5): 512-516.
 [5] 张家玮,赵建昌. 恒载对大挠度梁变形影响的研究[J]. 兰州交通大学学报,2009,28(1): 31-33.
 Zhang J W, Zhao J C. Effect of dead loads on static

beam deflection [J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2009, 28(1): 31-33.
 [6] 张家玮. 恒载效应对梁变形影响的数值分析法[J]. 甘肃科学学报,2009,21(3):139-142.
 Zhang J W. The numerical analysis method of dead loads effect on static deformation of beams [J]. Journal of Gansu Sciences, 2009, 21(3): 139-142.
 [7] 张家玮,刘合敏,杨国治,等. 考虑初始恒载效应影响下的梁动力特性的有限元分析[J]. 振动与冲击,2012,31(12):120-124.
 Zhang J W, Liu H M, Yang G Z, et al. Finite element analysis for effect of initial load on dynamic characteristic of beam [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(12): 120-124.
 [8] Zhou S J. Load-induced stiffness matrix of plates [J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 2002, 29(1): 181-184.
 [9] 周世军. 板恒载效应的非线性分析的刚度法[J]. 振动与冲击,2007,26(2):33-36.
 Zhou S J. Stiffness method for nonlinear analysis of effect of dead loads on plate [J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(2): 33-36.
 [10] 张家玮,周世军. 恒载效应对拱形梁自振频率的影响分析[J]. 振动与冲击,2009,28(8):163-167.
 Zhang J W, Zhou S J. Analysis on effect of dead loads on natural frequencies of arch beams [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(8): 163-167.

- (1):7-11.
Jin Z Q, Hou B R, Zhao T J, et al. Influence of shrinkage cracks on chloride penetration and carbonation of concrete [J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2011, 33 (1): 7-11.
- [10] Kwon S J, Na U J, Park S S, et al. Service life prediction of concrete wharves with early-aged crack; Probabilistic approach for chloride diffusion [J]. Structural Safety, 2009, 31(1): 75-83.
- [11] Ishida T, Iqbal P O, Anh H T L. Modeling of chloride diffusivity coupled with non-linear binding capacity in sound and cracked concrete [J]. Cement and Concrete Research, 2009, 39(7): 913-923.
- [12] Gowripalan N, Sirivivatnanon V, Lim C C. Chloride diffusivity of concrete cracked in flexure [J]. Cement and Concrete Research, 2000, 30(5): 725-730.
- [13] 张奕. 氯离子在混凝土中的运输机理研究[D]. 浙江: 浙江大学, 2008.
- [14] 金伟良, 金立兵, 延永东, 等. 海水干湿交替区氯离子对混凝土侵入作用的现场检测和分析[J]. 水利学报, 2009, 40(3): 364-370.
- Jin W L, Jin L B, Yan Y D, et al. Field inspection on chloride ion-intrusion effect of seawater in dry-wet cycling zone of concrete structure [J]. Shuili Xuebao, 2009, 40(3): 364-370.
- [15] Dura Crete. General guidelines for durability design and redesign [S]. European Union-Brite Euram III, 2000.
- (编辑 王秀玲)

(上接第 66 页)

- [11] 周世军, 张家玮. 恒载效应对拱形梁的影响分析[J]. 工程力学, 2010, 27(7): 120-125.
Zhou S J, Zhang J W. Analysis of the effect of dead loads on static arch beams [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(7): 120-125.
- [12] 张家玮, 周世军, 赵建昌. 考虑恒载效应的拱形梁静力近似解[J]. 计算力学学报, 2010, 27(4): 655-660.
Zhang J W, Zhou S J, Zhao J C. Approximate solutions of static arch beams considering static loads effect [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2010, 27 (4): 655-660.
- [13] Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity [M]. 3rd ed. Pergamon Press, 1982.
- [14] 老大中. 变分法基础[M]. 北京, 国防工业出版社, 2007.
- [15] Szileard R. 板的理论与分析[M]. 陈太平, 等. 译. 北京: 中国铁道出版社, 1984.
- [16] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells [M]. 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, 1959.
- (编辑 薛婧媛)