

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2013.06.014

考虑 $P-\Delta$ 效应的结构响应函数简化求解方法

梁仁杰^a, 吴京^{a,b}, 王春林^{a,b}

(东南大学 a. 混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室;

b. 国家预应力工程技术研究中心, 南京 210096)

摘要: $P-\Delta$ 效应是引起结构在强烈地震下倒塌的重要原因之一。由于几何非线性和材料非线性的共同作用, 结构的骨架曲线会出现负刚度。为了快速求解地震作用下结构的响应函数, 推导了相似弹塑性系统在同一地震波形激励下, 结构的屈服水平系数与地震强度成正比的规律。基于这一规律, 建立了等效单自由度体系屈服水平系数与延性系数之间的关系, 即 $\eta-\mu$ 曲线, 提出了求解推覆曲线上每个点所对应地震强度的简化方法, 从而快速建立结构的响应曲线。选择了 20 条实际地震动对一个六层钢框架结构进行分析, 得到其 16%、50%、84% 分位值的顶点位移角响应曲线, 并和增量动力分析对比, 结果显示所提方法在响应全过程(从弹性、塑性到倒塌)都具有较高精度。

关键词: 基于性能地震工程; 结构响应函数; $P-\Delta$ 效应; 骨架曲线; 屈服水平系数

中图分类号: TU973.31 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2013)06-0089-07

A Simplified Calculation Method of Structural Response Function by Considering the $P-\Delta$ Effect

Liang Renjie^a, Wu Jing^{a,b}, Wang Chunlin^{a,b}

(a. Key Laboratory of Concrete & Prestressed Concrete Structures, Ministry of Education;

b. National Prestress Engineering Research Center, Southeast University, Nanjing 210096, P. R. China)

Abstract: The $P-\Delta$ effect is one of crucial reasons causing the structure to collapse under the excitation of strong earthquakes. Under the interaction of the geometric nonlinearity and the material nonlinearity, the backbone curve of structure behaves a negative post-yield slope. In order to calculate the structural response function rapidly, the proportion rule between the seismic intensity and the normalized yield strength for the similar inelastic systems under the same ground motion is revealed. Based on this rule, the relationship curve between the normalized yield strength η and the ductility factor μ of the equivalent single-degree-of-freedom system is established, and the simplified procedure to calculate the seismic intensity of each point in the pushover curve is derived, which generates the structural response curve. A numerical example of six-storey steel building is conducted, calculating using the proposed procedure and the exact incremental dynamic analysis method respectively for an ensemble of 20 ground motions to obtain the 16%, 50% and 84% fractile response curves of the roof drift ratio, which demonstrates the simplified method agrees with the IDA from elastic, inelastic to collapse.

Key words: performance-based earthquake engineering; structural response function; $P-\Delta$ effect; backbone curve; normalized yield strength

收稿日期: 2013-03-20

基金项目: 国家自然科学基金(51278105, 51008077); 江苏省青蓝工程

作者简介: 梁仁杰(1985-), 男, 博士, 主要从事工程抗震研究, (E-mail) liangrenjie@gmail.com。

吴京(通信作者), 男, 教授, 博士生导师, (E-mail) seuwj@seu.edu.cn。

地震的发生存在很大的随机性和不可预见性,特别是地震动幅值很难在设计阶段进行估计,按照传统抗震分析方法设计的工程结构很可能无法满足实际遭遇强震时安全性和经济性等方面的需求。基于性能地震工程(Performance-based Earthquake Engineering, PBEE)旨在克服这一缺陷,通过先进的分析手段和综合多个学科使抗震设计更具可靠性,成为近年来研究的热点^[1-2]。基于性能地震工程的分析框架主要由地震灾害函数、结构响应函数、损伤函数和损失函数组成,通过全概率公式将地震动强度指标(Intensity Measure, IM)、工程需求参数(Engineering Demand Parameter, EDP)、损伤指标(Damage Measure, DM)和决策变量(Decision Variable, DV)联系起来,评估结构遭遇随机地震作用后的经济损失和人员伤亡损失,其框架如图 1 所示。

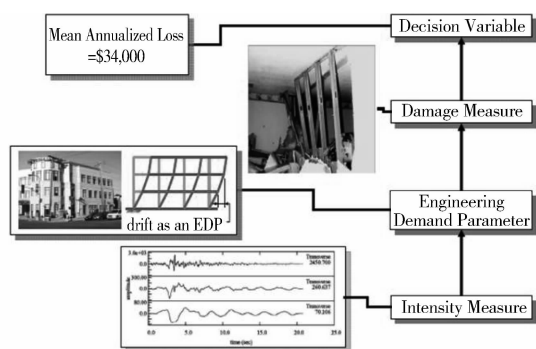


图 1 基于性能地震工程的框架

其中,求解结构的响应函数,即得到结构在不同强度地震激励下的全过程(从弹性、塑性到倒塌)响应曲线是这一分析框架的关键。现有方法大多采用非线性动力分析求解响应函数,如增量动力分析(Incremental Dynamic Analysis, IDA)^[3-4],但其计算代价较高,不易为工程设计人员掌握。为此,有学者提出了 IN2^[5]、SPO2IDA^[6]等简化计算方法。作者前期^[7]研究了采用非线性静力分析求解结构响应函数的可行性,通过建立弹塑性动力放大系数与延性系数之间的关系,可以从推覆曲线出发直接求解每一点所能抵抗的地震强度,既保持了 Pushover 简便快速的优点,又可得到完整的响应曲线。

$P-\Delta$ 效应是影响结构抗震能力的重要因素。地震作用下,结构的最终倒塌大多是由于过大的 $P-\Delta$ 效应使结构产生了不可恢复的侧移。Montgomery^[8]研究发现当基底承载力与结构总重量的比值小于 0.1 或结构的位移延性大于 2 时, $P-\Delta$ 效应对结构的影响十分显著;Gupta 等^[9]对钢框架结构的 $P-\Delta$ 效应和动力失稳进行了研究,指出地震动特性和计算模型都

会对 $P-\Delta$ 效应的敏感性产生影响;Vian 等^[10]研究了高速公路桥墩的 $P-\Delta$ 效应,并开展了 15 个倒塌试验,指出二阶效应系数 θ 是影响倒塌的重要因素,当 θ 大于 0.1 时,结构能达到的极限延性和承载力都大大降低。杜修力等^[11]对钢筋混凝土框架结构的倒塌和负刚度的影响进行了研究;童根树等^[12]分析了动力 $P-\Delta$ 效应对理想弹塑性模型和克拉夫模型地震力调整系数的影响;翟长海等^[13]讨论了 $P-\Delta$ 效应对等延性位移比谱的影响,并给出了考虑 $P-\Delta$ 效应的修正公式;魏斌等^[14]研究了桥梁结构在考虑 $P-\Delta$ 效应后的地震响应,指出现有的位移和内力增大系数计算公式在塑性阶段均有较大误差,并统计回归了新的计算公式,同时建议二阶效应系数限值取 0.1,且在不大于 0.025 时才可忽略 $P-\Delta$ 效应。

本文首先讨论了 $P-\Delta$ 效应对结构动力响应的影响及考虑 $P-\Delta$ 效应后结构骨架曲线的特点,进而根据相似弹塑性系统的概念,推导了结构响应函数的简化求解方法和过程,最后通过算例验证了所提方法的准确性。

1 考虑 $P-\Delta$ 效应的骨架曲线

$P-\Delta$ 效应是指多高层结构在风荷载或地震作用下,由于水平位移导致竖向荷载对结构产生的内力与侧移增大的现象,也称为二阶效应。当变形达到一定程度,抗力的增加无法与竖向荷载引起的内力相平衡,即无法承受竖向荷载时,结构就会出现整体失稳和倒塌。图 2 所示为一个钢框架结构在同样强度的地震激励下,不考虑 $P-\Delta$ 效应和考虑 $P-\Delta$ 效应的地震响应。从图中可以看到,不考虑 $P-\Delta$ 效应时,结构的位移响应较小,滞回曲线比较对称;考虑 $P-\Delta$ 效应后,位移响应明显增大,并逐渐偏向一侧。从滞回曲线上看, $P-\Delta$ 效应使结构的抗侧刚度减小,并在屈服后出现了明显的负刚度,很难再形成对称、饱满的滞回环。这表明:考虑 $P-\Delta$ 效应后,结构的动力响应会变大,在强烈地震作用下,实际结构往往进入塑性,动力 $P-\Delta$ 效应更加显著,由此造成的几何非线性与材料非线性叠加,使得结构倒塌的概率大大增加。因此,在求解结构响应函数时考虑 $P-\Delta$ 效应的影响是非常必要的。

实际结构中, $P-\Delta$ 效应对动力稳定性的影响与结构形式、侧向变形、是否具有薄弱层等因素有关,大多采用 IDA 来进行分析,结构倒塌的主要标志是 IDA 曲线出现明显的平直段,即较小的地震强度变化产生很大的位移增量。但由于实际结构的复杂性和 IDA 计算的繁琐,将其转化为等效的单自由度体

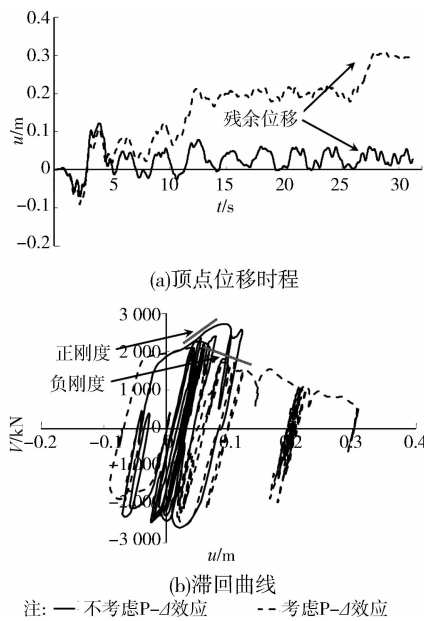


图 2 钢框架结构的地震响应

系是研究 $P-\Delta$ 效应和结构倒塌的常用简化方法。对于图 3 所示的单自由度体系,假设转角位移均集中在基底的非线性弹簧铰中,不考虑 $P-\Delta$ 效应时,结构在弹性阶段的平衡方程为:

$$V = \frac{k_r \varphi}{h} = \frac{k_r}{h^2} u = k_0 u \quad (1)$$

式中: V 为水平力; u 为水平位移; φ 为弹簧转角; h 为质点高度; k_r 为弹簧屈服前刚度; k_0 为相对于整体结构的一阶刚度。考虑 $P-\Delta$ 效应后,平衡方程变为:

$$V = \frac{k_r u}{h^2} - \frac{Pu}{h} = (k_0 - k_G) u = (1 - \theta) k_0 u \quad (2)$$

式中: P 为结构重力; $k_G = P/h$ 为代表 $P-\Delta$ 效应的几何刚度; $\theta = k_G/k_0$ 为二阶效应系数。当结构屈服后,假设非线性弹簧屈服后的切线刚度为 $\alpha_1 k_r$, 其中 α_1 为屈服后刚度比,此时的平衡方程为:

$$\Delta V = \frac{\alpha_1 k_r \Delta u}{h^2} - \frac{P \Delta u}{h} = (\alpha_1 k_0 - k_G) \Delta u = (\alpha_1 - \theta) k_0 \Delta u \quad (3)$$

这时整体刚度一般还是正值,承载力随着位移的增加而增加。但当结构进入屈服后刚度比为 α_2 的区域后, $\Delta V = (\alpha_2 - \theta) k_0 \Delta u$, 若 α_2 较小,同时考虑地震往复作用下结构强度和刚度的退化,骨架曲线就会出现负刚度,承载力将随位移的增加而下降,直至到达 0 出现动力失稳。

文献[7]的研究指出:相同骨架形状的弹塑性体系,当在同种波形的地面运动激励下表现出同样大小的延性时,其谱加速度与地面运动峰值加速度成

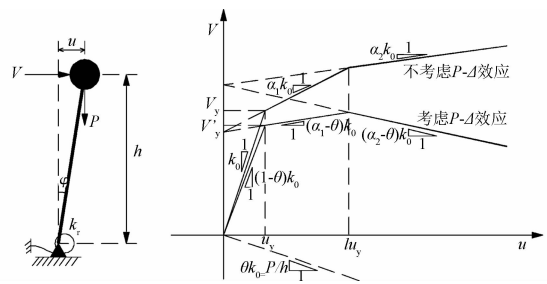


图 3 单自由度体系的 $P-\Delta$ 效应

正比,其实质是揭示了相同形状骨架曲线的弹塑性体系地震响应的相似性。本文将这一思路扩展至骨架曲线中带有下降段的结构体系,通过对原结构进行 Pushover 分析,并将推覆曲线转化为等效单自由度体系的骨架曲线,由此建立屈服水平系数与延性系数的对应关系,从而快速求解结构的响应函数,避免对原结构进行复杂的 IDA 计算。

2 屈服水平系数和 $\eta-\mu$ 曲线

结构响应函数是指 IM 和 EDP 之间的关系,EDP 包含多种性能指标,其中,位移角(如顶点位移角、最大层间位移角)是最基本也最容易得到的指标。本文选择顶点位移角 θ_{roof} 作为 EDP,选择地面运动峰值加速度 PGA 作为 IM。

图 4(a)表示了单自由度体系 S_a-S_d 格式的简化骨架曲线,可以通过在 Pushover 中考虑 $P-\Delta$ 效应,将基底剪力和顶点位移转化后得到。图中, A 为结构的初次屈服点, S_{dy} 和 S_{ay} 分别为屈服时的谱位移和谱加速度; ω_n 为结构的初始固有频率; α_1 和 α_2 分别为第 2 段和第 3 段骨架曲线斜率相对于第 1 段斜率的比值,称为屈服后刚度比。 B 点表示了骨架曲线第 2 次转折时的谱位移和谱加速度, ι 为此时的延性比。显然, $\omega_n, \iota, \alpha_1$ 和 α_2 描述了骨架曲线的形状特征,可称之为骨架曲线的形状参数。对于具有同样形状参数骨架曲线的弹塑性体系,本文称之为相似弹塑性系统。

当具有图 4(a)所示骨架曲线的单自由度弹塑性体系承受 \ddot{x}_g 所代表的地震动激励时,其运动方程为:

$$\ddot{S}_d + 2\xi\omega_n \dot{S}_d + S_a(S_d, \dot{S}_d) = -\ddot{x}_g \quad (4)$$

式中: ξ 为体系的固有阻尼比, $S_a(S_d, \dot{S}_d)$ 代表了各时间步的结构恢复力,包含了骨架曲线的幅值、形状和加载历史等信息。令:

$$\bar{S}_d = \frac{S_d}{S_{dy}} \quad (5)$$

$$\bar{S}_a(\bar{S}_d, \dot{\bar{S}}_d) = \frac{S_a(\bar{S}_d S_{dy}, \dot{\bar{S}}_d S_{dy})}{S_{ay}} \quad (6)$$

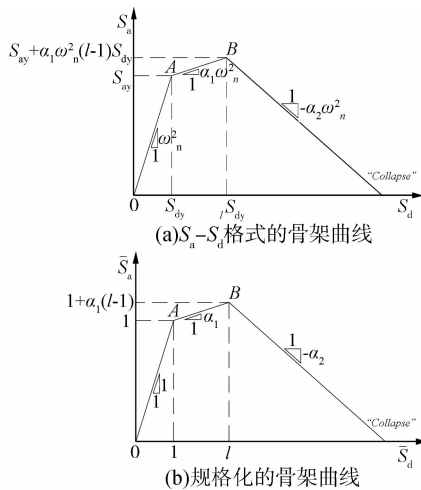


图 4 Sa-Sd 格式和规格化的骨架曲线

$$\ddot{x}_{g1} = \frac{\ddot{x}_g}{PGA} \quad (7)$$

式中： \bar{S}_d 、 \bar{S}_a 分别为相对于首次屈服点规格化的谱位移和谱加速度，与图 4(a) 相对应的 $\bar{S}_a - \bar{S}_d$ 曲线表示在图 4(b) 中，可见这一曲线保持了实际骨架曲线的形状。PGA 为 \ddot{x}_g 的峰值， \ddot{x}_{g1} 为峰值加速度规格化为 1 的地震动记录，通过式 (7) 可以将原始地震记录分离为幅值和波形两个因素。从而，式 (4) 可转化为：

$$\bar{S}_d + 2\xi\omega_n \bar{S}_d + \omega_n^2 \bar{S}_a(\bar{S}_d, \bar{S}_d) = -\omega_n^2 \frac{PGA}{S_{ay}} \ddot{x}_{g1} \quad (8)$$

式 (8) 中，除了 PGA/S_{ay} ，其余参数仅与骨架曲线的形状、结构阻尼比和地面运动波形有关，即两个相似弹塑性系统承受同种波形的地面运动激励时，只要屈服时的谱加速度与地面运动峰值加速度的比值相同，其在 $\bar{S}_a - \bar{S}_d$ 格式下的地震响应也相同。定义：

$$\eta = \frac{S_{ay}}{PGA} \quad (9)$$

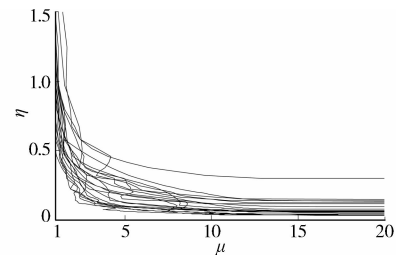
则式 (8) 可转化为：

$$\bar{S}_d + 2\xi\omega_n \bar{S}_d + \omega_n^2 \bar{S}_a(\bar{S}_d, \bar{S}_d) = -\omega_n^2 \frac{1}{\eta} \ddot{x}_{g1} \quad (10)$$

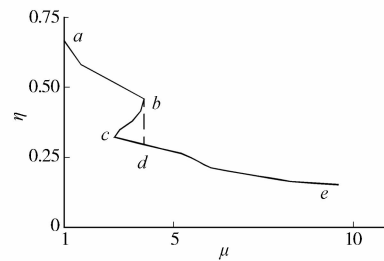
当给定一个 η 值时，通过逐步积分的方法对式 (10) 进行求解，可以得到 \bar{S}_d 和 \bar{S}_a 。根据 \bar{S}_d 的定义可知其最大值即为当前系统的延性系数 μ ，给定不同的 η 值，可以求得相应的 μ 值，从而建立 $\eta-\mu$ 曲线。另一方面，对比式 (8) 和式 (10) 可知， η 的物理意义是在单位峰值的地面运动激励下，规格化弹塑性系统表现出延性系数 μ 时，系统应具有屈服强度，因此可称为与延性系数相对应的屈服水平系数。

针对骨架曲线的形状参数、结构的阻尼比、固有频率和单位峰值的地面运动加速度时程，建立 $\eta-\mu$ 曲线后，根据式 (9) 即可求出能力曲线上具有同样延性系数的每个点所对应的地震强度，从而建立 PGA- μ 和 PGA-EDP 曲线。

图 5(a) 绘出了采用表 1 所列的 20 条地震波生成的 $\eta-\mu$ 曲线。从图中可以看到，由于地震动的复杂性， $\eta-\mu$ 曲线并不总是单调的，同一个 μ 可能对应多个 η ，如图 5(b) 所示。偏于安全，此时应选择最大的 η 计算，即采用图 5(b) 中的 a-b-d-e 曲线。



(a) 20 条地震波生成的 $\eta-\mu$ 曲线



(b) $\eta-\mu$ 曲线的特征

图 5 $\eta-\mu$ 曲线

3 算例分析

三跨六层钢框架，梁、柱采用工字型截面，钢材为双线型随动强化模型，强化系数 1%，弹性模量 2.06×10^5 MPa，梁和柱的屈服强度分别为 248、345 MPa，不考虑强度和刚度的退化，结构基本信息和梁、柱截面如图 6。采用 SeismoStruct 软件进行计算，构件采用非线性纤维截面框架单元模拟，荷载通过集中质量单元施加，分析中考虑 P- Δ 效应。

对结构进行一阶模态下的 Pushover，并按照文献 [15] 提出的折线化方法得到如图 7 所示的三线型简化能力曲线。根据图 7 的骨架参数和表 1 所列的 20 条地震波，由公式 (10) 可以得到等效单自由度体系的 20 条 $\eta-\mu$ 曲线，如图 5(a) 所示。采用公式 (9) 计算得到每条地震波下结构顶点位移角 θ_{root} 对应于不同地震强度 PGA 的响应曲线，结果如图 8(a)。为验证所提方法的准确性，对原结构进行了同样 20 条地震波的 IDA 分析，结果如图 8(b)。

表 1 20 条地震波的具体信息

序号	地震事件	台站	方向/(°)	场地	震级	震中距/km	PGA/g
1	Loma Prieta, 1989	Agnews State Hospital	090	C,D	6.9	28.2	0.159
2	Imperial Valley, 1979	Plaster City	135	C,D	6.5	31.7	0.057
3	Loma Prieta, 1989	Hollister Diff. Array	255	-,D	6.9	25.8	0.279
4	Loma Prieta, 1989	Anderson Dam Downstream	270	B,D	6.9	21.4	0.244
5	Loma Prieta, 1989	Coyote Lake Dam Downstream	285	B,D	6.9	22.3	0.179
6	Imperial Valley, 1979	Cucapah	085	C,D	6.5	23.6	0.309
7	Loma Prieta, 1989	Sunnyvale Colton Ave	270	C,D	6.9	28.8	0.207
8	Imperial Valley, 1979	El Centro Array \$ 13	140	C,D	6.5	21.9	0.117
9	Imperial Valley, 1979	Westmoreland Fire Station	090	C,D	6.5	15.1	0.074
10	Loma Prieta, 1989	Hollister South & Pine	000	-,D	6.9	28.8	0.371
11	Loma Prieta, 1989	Sunnyvale Colton Ave	360	C,D	6.9	28.8	0.209
12	Superstition Hills, 1987	Wildlife Liquefaction Array	090	C,D	6.7	24.4	0.180
13	Imperial Valley, 1979	Chihuahua	282	C,D	6.5	28.7	0.254
14	Imperial Valley, 1979	El Centro Array # 13	230	C,D	6.5	21.9	0.139
15	Imperial Valley, 1979	Westmoreland Fire Station	180	C,D	6.5	15.1	0.110
16	Superstition Hills, 1987	Plaster City	135	C,D	6.7	21.0	0.186
17	Superstition Hills, 1987	Wildlife Liquefaction Array	360	C,D	6.7	24.4	0.200
18	Imperial Valley, 1979	Plaster City	045	C,D	6.5	31.7	0.042
19	Loma Prieta, 1989	Hollister Diff. Array	165	-,D	6.9	25.8	0.269
20	Superstition Hills, 1987	Brawley	225	C,D	6.7	18.2	0.156

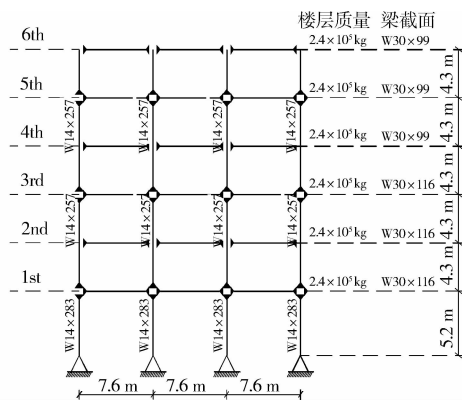
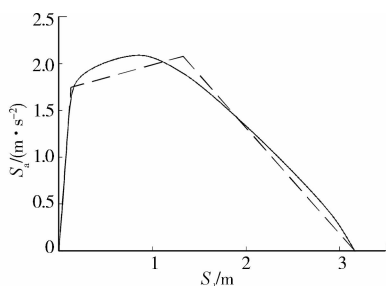
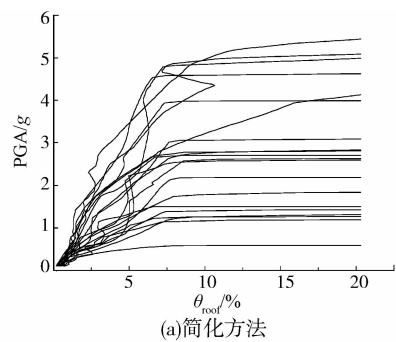


图 6 结构模型

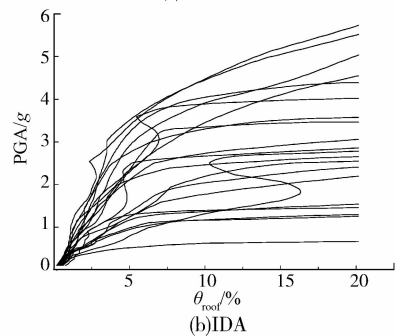


注:—实际能力曲线 -- 简化能力曲线

图 7 等效单自由度体系的能力曲线



(a)简化方法



(b)IDA

图 8 20 条地震波计算的顶点位移角响应曲线

由于不同地震波计算的结构响应曲线有很大的离散性,故应对结果进行统计,以得到具有一定可靠

度的概率响应曲线。统计可按照 IM 或 EDP 进行。从图 8 可以看到,当地震强度较大时,按照 IM 统计只有少数曲线被计算到,容易由样本缺失引起较大的统计误差,因此本文按照 EDP 进行统计。由于同一 EDP 下的 IM 符合对数正态分布的规律,基于已有结果,可以得到 16%、50%、84% 3 个分位值对应的响应曲线,结果如图 9。同时,图 10 还绘出了对于单条地震动的两种方法的计算结果。

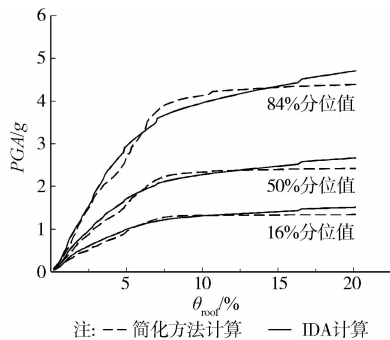


图 9 16%、50%和 84%分位值的响应曲线对比

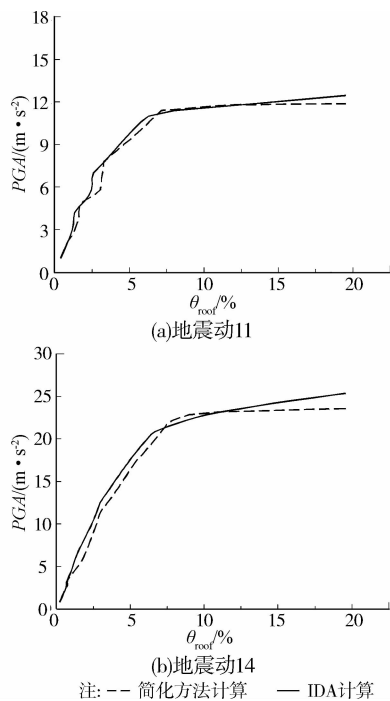


图 10 单条地震动计算结果对比

对比图 9 和图 10 可知,对于单条地震波和 20 条波的统计结果,采用本文提出的基于 Pushover 的简化方法和 IDA 的结果非常接近,特别是在倒塌临界状态,两者所能达到的最大 PGA 相差很小。而对该结构进行简化方法和 IDA 分析,计算和数据整理耗时相差 5 倍,可见简化方法在保证精度的情况下大大提高了计算效率。

4 结论

对考虑 $P-\Delta$ 效应的结构响应函数开展研究,主要结论有:

1) 具有同样骨架形状的相似弹塑性系统在同一地震波形激励下具有相似的地震响应。通过求解等效单自由度体系屈服水平系数 η 与延性系数 μ 之间的关系,即构造 $\eta-\mu$ 曲线,可以方便地从 Pushover 出发,快速求解结构的全过程响应。

2) 对多条地震波下的响应曲线进行统计时,采用地震强度指标 IM 统计会造成样本的缺失,建议采用 EDP 统计以避免这一问题。

3) 算例显示简化方法与 IDA 计算结果基本一致,可用于基于性能地震工程中结构响应函数的求解,且计算时间减少,适于工程应用。

参考文献:

- [1] 韩建平, 吕西林, 李慧. 基于性能的地震工程研究的新进展及对结构非线性分析的要求[J]. 地震工程与工程振动, 2007, 27(4): 15-23.
Han J P, Lyu X L, Li H. State-of-the-art of performance-based earthquake engineering and need for structural nonlinear analysis [J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2007, 27(4): 15-23.
- [2] 贾立哲, 段忠东. 基于性能的地震工程理念的研究现状与分析[J]. 工程抗震与加固改造, 2011, 33(2): 122-129.
Jia L Z, Duan Z D. Research and development of performance-based earthquake engineering [J]. Earthquake Resistant Engineering and Retrofitting, 2011, 33(2): 122-129.
- [3] Vamvatsikos D, Cornell C A. Incremental dynamic analysis [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2002, 31(3): 491-514.
- [4] 陆新征, 叶列平. 基于 IDA 分析的结构抗地震倒塌能力研究[J]. 工程抗震与加固改造, 2010, 32(1): 13-18.
Lu X Z, Ye L P. Study on the seismic collapse resistance of structural system [J]. Earthquake Resistant Engineering and Retrofitting, 2010, 32(1): 13-18.
- [5] Dolsek M, Fajfar P. IN2-a simple alternative for IDA [C]//13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, 2004:3353.
- [6] Vamvatsikos D, Cornell C A. Direct estimation of seismic demand and capacity of multidegree-of-freedom systems through incremental dynamic analysis of single

- degree of freedom approximation [J]. Journal of Structural Engineering, 2005, 131(4): 589-599.
- [7] 吴京, 梁仁杰, 王春林, 等. 基于非线性静力分析的地震强度直接计算方法[J]. 建筑结构学报, 2011, 32(9): 44-49.
- Wu J, Liang R J, Wang C L, et al. Direct calculation of seismic intensity based on non-linear static analysis [J]. Journal of Building Structures, 2011, 32(9): 44-49.
- [8] Montgomery C J. Influence of p-delta effects on seismic design [J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 1981, 8(1): 31-43.
- [9] Gupta A, Krawinkler H. Dynamic $P-\Delta$ effects for flexible inelastic steel structures [J]. Journal of Structural Engineering, 2000, 126(1): 145-54.
- [10] Vian D, Bruneau M. Tests to structural collapse of single degree of freedom frames subjected to earthquake excitations [J]. Journal of Structural Engineering, 2003, 129(12): 1676-1685.
- [11] 杜修力, 李小军, 尹之潜. 极限后负刚度模型对 RC 框架结构地震倒塌反应的影响[J]. 计算结构力学及其应用, 1993, 10(2): 179-186.
- Du X L, Li X J, Yin Z Q. The influence of restoring force model with post-ultimate negative stiffness on earthquake collapse response of RC frame structures [J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1993, 10(2): 179-186.
- [12] 童根树, 赵永峰. 动力 $P-\Delta$ 效应对地震力调整系数的影响[J]. 浙江大学学报:工学版, 2007, 41(1): 120-125.
- Tong G S, Zhao Y F. Dynamic $P-\Delta$ effects on seismic force modification factors [J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2007, 41(1): 120-125.
- [13] 翟长海, 孙亚民, 谢礼立. 考虑 $P-\Delta$ 效应的等延性位移比谱[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2007, 39(10): 1513-1516.
- Zhai C H, Sun Y M, Xie L L. Estimation of $P-\Delta$ effect on constant-ductility inelastic displacement ratio spectra [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2007, 39(10): 1513-1516.
- [14] 魏斌, 李建中, 蒋娜芳. 考虑 $P-\Delta$ 效应的桥梁地震反应分析与设计[J]. 地震工程与工程振动, 2010, 30(3): 129-135.
- Wei B, Li J Z, Jiang N F. Seismic analysis and design of bridge piers considering $P-\Delta$ effects [J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2010, 30(3): 129-135.
- [15] Han S W, Moon K H, Chopra A K. Application of MPA to estimate probability of collapse of structures [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2010, 39(11): 1259-1278.

(编辑 王秀玲)