

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2014.01.015

深埋马蹄形隧道开挖围岩应力与位移的复变函数解

施有志¹, 高轩能²

(1. 厦门理工学院 土木工程与建筑学院, 福建 厦门 361021; 2. 华侨大学 土木工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要:利用复变函数解法中的柯西积分法, 求解工程中常用的单心圆仰拱马蹄形隧道在弹性半空间内任意一点处的应力值和位移值解析解表达式。由于是深埋隧道, 且埋深与孔径之比较大, 故不考虑重力梯度影响, 直接把重力作用化为无限远处作用有 P_1 、 P_2 的外载; 求解出马蹄形隧道孔洞在弹性半空间内任意一点处的应力值和位移值解析解表达式。结合典型断面, 利用三维有限元分析软件 MADIS/GTS 建立二维平面应变模型, 对理论推导单心圆马蹄形隧道在弹性平面内的解析解公式进行验证。分析表明, 有限元结果和解析解结果有较好的吻合性, 证明了新方法的准确性, 针对深埋马蹄形隧道开挖工程, 可以快捷地评估围岩应力状态及位移变形。

关键词:复变函数法; 柯西积分法; 最优化理论; 隧道; 解析解

中图分类号: TU457 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2014)01-0101-05

Complex Variable Function Solution of Stress and Displacement of Surrounding Rock Buried Deep Horseshoe-Shaped Tunnel Excavation

Shi Youzhi¹, Gao Xuanneng²

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Xiamen University of Technology, Xiamen 361021, Fujian, P. R. China;
2. School of Civil Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, Fujian, P. R. China)

Abstract: An analytical solution was presented for the stresses and displacements around horseshoe-shaped tunnel using Cauchy integral method and Optimization theory in an elastic half-plane. Since the depth of a tunnel was larger than the size of the tunnel, gravity loads were simplified as uniform normal loads along far-field boundary. Finite element model was used to verify the accuracy of analytical solutions. Comparison between the results of numerical analysis by finite element method and those from the closed solutions indicates that the closed solution is reliable and applicable for the stress and displacement field around horseshoe-shaped tunnel tunnels at great depth.

Key words: complex variable function method; Cauchy integral method; optimization theory; tunnels; analytical solutions

地下工程稳定性分析和设计中, 经常遇到可假定为平面应变问题的单洞及多洞问题。1920 年, Jeffery^[1] 利用双极坐标法给出了圆形洞室的平面应力和应变的解答, 但其解是建立在一些限制条件基础上的, 过程繁琐且未能给出位移边界条件下该问题的解答。Mindlin^[2-3] 同样采用双极坐标解法, 在

应力势函数的推导过程中加入了介质所受的重力场和初始应力场, 从满足隧道周边的无法向和切向应力条件开始, 提取出包括扩开挖体重量的应力势函数, 然后为了满足位移单值和水平向无法向和切向应力边界条件采用试凑的办法开展一系列工作, 由于双极坐标法本身的局限性最终仍然未能给出位移

收稿日期: 2013-02-28

基金项目: 国家自然科学基金(51278208)

作者简介: 施有志(1976-), 男, 博士生, 高级工程师, 主要从事岩土、隧道及地下工程研究, (E-mail) shiyouzhi_hqu@163.com。
高轩能(通信作者), 男, 教授, 博士生导师, (E-mail) gaoxn1962@163.com。

场的公式; 双极坐标法一般只求一些简单孔洞的应力场, 不能给出位移场。且当孔洞距离地表较近时, 双极坐标法往往给出错误的数值计算结果, 从而迫使专家学者们寻求到解决固定边界条件下半空间含一个孔洞问题的另外一种更重要的方法, 即复变函数法。自 1777 年 Euler 首创虚数单位符号“ i ”, 并系统地建立复变函数理论以来^[4], 到 20 世纪复变函数已经形成了非常系统的理论, 并已经被广泛地应用到弹性力学领域, 如徐芝纶^[5]、Timoshenko 等^[6]、Muskhelishvili^[7]、路见可^[8] 等的力学专著中都有相关论述。复变函数求解单孔洞问题可以归结为 2 种方法: 柯西积分法和解析延拓法。Verruijt^[9] 采用柯西积分法对半平面含单个孔洞的问题作了一系列研究。1997 年他给出了满足水平面无法向和切向应力的第一边界条件和孔洞周边的位移可展开成映射后域内单位复数的幂级数形式的第二边界条件的解的递推公式, 给出了洞室周边均布位移条件下解的递推公式。1998 年 Verruijt^[10] 给出了满足水平面无法向和切向应力的第一边界条件、孔洞周边的应力可展成单位复数的幂级数形式的第一边界条件的解的递推公式, 并给出了洞室周边在均布法向应力条件下的精确解。但 Verruijt 的工作仅限于简单形状(圆形、椭圆形)的隧道。陈子荫^[11], 吕爱钟^[12] 用柯西积分法求解出了任意形状孔洞在半空间的应力解和位移解, 但他们的模型边界条件没有考虑隧道实际施工情况, 没有考虑隧道开挖过程中衬砌力对围岩的影响, 且因其解的表达式复杂, 仅给出了解的隐式表达, 对于工程问题中常用的均为复杂的孔口问题(如马蹄形断面孔口)并没有给出确定的显式表达。王志良^[13]、张顶锋^[14]、晏莉等^[15] 的推导, 则直接将隧道简化为圆形。童磊^[16] 推导了圆形隧道基于任意衬砌变形边界条件的复变函数弹性解, 来预测软土中隧道开挖时短期地表竖向沉降与侧向位移。笔者在吕爱钟等^[12] 的研究基础上, 利用复变函数中的柯西积分法求解工程问题中常用的单心圆仰拱马蹄形隧道在二维平面弹性半空间内任意一点处的值和位移值解析解; 结合马蹄形隧道的典型断面, 采用有限元数值分析来检验解析解精度, 验证了结果的精确性。

1 马蹄形隧道开挖的柯西积分法求解

地下洞室埋置深度与孔径比较大时, 可不考虑重力梯度的影响, 把重力作用化为无限远处作用有 P_1 、 P_2 的外载来求解, 图 1 给出了 z 平面半无限空间单心圆仰拱马蹄形隧道的构形, 图 2 为通过复变

函数中保角映射后把 z 平面单心圆仰拱马蹄形外隧道域转化为 ξ 平面单位圆外域后的情况, 其中 P_1 、 P_2 表示无穷远处水平原岩和竖向原岩的应力值。

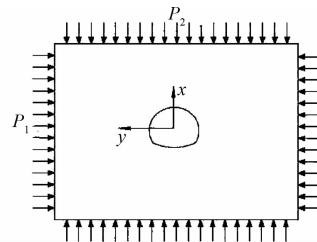


图 1 分析模型示意图

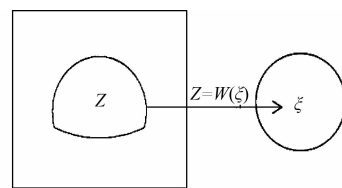


图 2 映射函数与逆映射函数

引用 Muskhelishvili 平面问题的复变函数解法^[7], 对于平面应变问题, 其应力与位移分量可由复平面上 2 个解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 来确定, 具体求解即根据边界条件求解 2 个复应力函数。对于单孔问题, 无限域中的 2 个复应力函数可表示为^[11]

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{2\pi(1+k)}(X + iY)\ln z + Bz + \varphi_1^0(z) \quad (1)$$

$$\psi_1(z) = \frac{k}{2\pi(1+k)}(X - iY)\ln z + (B' + C')z + \psi_1^0(z) \quad (2)$$

式中: $B = \frac{P_1 + P_2}{4}$, $B' = \frac{P_2 - P_1}{2}$, $C' = \tau_{xy}^\infty$; P_1 和 P_2 分别为直角坐标系下无穷远处作用的水平外载和竖向外载; 考虑无穷远处应力分量 $\tau_{xy}^\infty = 0$; X 和 Y 为孔边作用的非平衡力矢量在 2 个直角坐标系方向上的分量; $\psi_1^0(z)$ 和 $\varphi_1^0(z)$ 为孔外包括无穷远点在内的单值解析函数, 其形式为

$$\begin{cases} \varphi_1^0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \\ \psi_1^0(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_n}{z^n} \end{cases} \quad (3)$$

式中: 系数 a_0, a_1, \dots, a_n 和 b_0, b_1, \dots, b_n 为单值解析函数的常数项系数, 由具体边界条件和复平面点所在的具体位置求得。

如图 2 所示, 将半无限平面 z 上单心圆仰拱马蹄形隧道孔口的外域映射到 ξ 平面的单位圆外域, 其映射函数采用最普遍的形式, 可用 Laurent 表示

为^[12]

$$z = w(\zeta) = R(\zeta + \sum_{k=0}^n C_k \zeta^{-k}) \quad (4)$$

式中: R 反映孔洞的大小; C_1, C_2, \dots, C_n 反映了孔洞的形状; C_0 反映了孔洞所处坐标系中的位置; z 和 ζ 分别为物理平面和映射平面上的复数坐标。

根据已经确定映射函数 $z = w(\zeta)$, 把 z 物理平面的应力函数转化到 ζ 平面的应力函数, 为此引用如下记号:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi_1(z) = \varphi_1(w(\zeta)) = \\ &-\frac{1}{2\pi(1+k)}(X+iY)\ln w(\zeta) + Bw(\zeta) + \varphi_0(\zeta) = \\ &-\frac{1}{2\pi(1+k)}(X+iY)\ln\left[R\left(\zeta + \sum_{k=0}^n C_k \zeta^{-k}\right)\right] + \\ &BR\left(\zeta + \sum_{k=0}^n C_k \zeta^{-k}\right) + \varphi_0(\zeta) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \psi_1(z) = \psi_1[w(\zeta)] = \\ &\frac{k}{2\pi(1+k)}(X-iY)\ln w(\zeta) + (B'+iC')w(\zeta) + \psi_0(\zeta) = \\ &\frac{k}{2\pi(1+k)}(X-iY)\ln\left[R\left(\zeta + \sum_{k=0}^n C_k \zeta^{-k}\right)\right] + \\ &(B'+iC')R\left(\zeta + \sum_{k=0}^n C_k \zeta^{-k}\right) + \psi_0(\zeta) \end{aligned} \quad (6)$$

考虑边界条件为无穷远点刚体转动为 0, 孔洞周边没有作用面力, 则根据边界条件:

$$\varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = 0 \quad (7)$$

把式(5)和式(6)代入边界条件式(7)可得:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'_0(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} &= -2B\omega(\zeta) - \\ B' \overline{\omega(\zeta)} \end{aligned} \quad (8)$$

对式(8)两边分别运用柯西积分, 可求得:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= -\sum_{k=1}^n a_k \zeta^{-k} = \\ a_1 \zeta^{-1} + a_2 \zeta^{-2} + \dots + a_n \zeta^{-n} \end{aligned} \quad (9)$$

对式(9)两边先取共轭, 然后利用柯西积分可求得:

$$\begin{aligned} \psi_0(\zeta) &= \sum_{k=1}^{n-2} S_k \zeta^k - \frac{\overline{\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'_0(\zeta)} - 2BR\zeta^{-1} - \\ B'R \sum_{k=2}^n C_k \zeta^{-k} \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{cases} a_1 = -S_1 - 2BRC_1 - B'R \\ a_2 = -S_2 - 2BRC_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-2} = -S_{n-2} - 2BRC_{n-2} \\ a_{n-1} = -2BRC_{n-1} \\ a_n = -2BRC \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} S_{n-2} = -C_n \bar{a}_1 \\ S_{n-3} = -(2C_n \bar{a}_2 + C_{n-1} \bar{a}_1) \\ S_{n-4} = -[3C_n \bar{a}_3 + 2C_{n-1} \bar{a}_2 + (C_{n-2} + C_1 C_n) \bar{a}_1] \\ \dots\dots\dots \\ S_1 = -[(n-2)C_n \bar{a}_{n-2} + (n-3)C_{n-1} \bar{a}_{n-3} + \\ (n-4)(C_{n-2} + C_1 C_n) \bar{a}_{n-4} + (n-5)(C_{n-3} + \\ 2C_2 C_n + C_1 C_{n-1}) \bar{a}_{n-5} + \dots\dots + [C_3 + \\ (n-4)C_{n-4} C_n + (n-3)C_{n-3} C_{n-1} + \dots\dots + \\ C_1(C_{n-4} + 3C_3 C_n + 2C_2 C_{n-1} + C_1 C_{n-2})] \bar{a}_1] \end{cases} \quad (12)$$

把式(9)、(10)代入式(5)和(6), 经过化简可求得应力函数

$$\varphi(\xi) = BR\left(\xi + \sum_{k=0}^n C_k \xi^{-k}\right) + \sum_{k=0}^n a_k \xi^{-k} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= -\frac{\overline{\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)}}{\omega'(\xi)} \overline{\varphi'_0(\xi)} + \sum_{k=1}^{n-2} S_k \xi^k - 2BR\xi^{-1} + \\ B'R\xi + B'RC_0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Phi(\xi) = \varphi'_1(z) = \frac{\varphi'_0(\xi)}{\omega'(\xi)} = B + \frac{\varphi'_0(\xi)}{\omega'(\xi)} \quad (15)$$

$$\Psi(\xi) = \psi'_1(z) = \frac{\psi'_0(\xi)}{\omega'(\xi)} = (B'+C') + \frac{\psi'_0(\xi)}{\omega'(\xi)} \quad (16)$$

2 平面内应力解、位移解表达式

在求得应力函数后, 利用到正交曲线坐标系下求解应力分量的表达式

$$\begin{cases} \sigma_\theta + \sigma_\rho = 4Re[\Phi(\xi)] \\ \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = \frac{2\xi^2}{\rho^2} \frac{1}{\omega'(\xi)} [\overline{\omega(\xi)} \Phi'(\xi) + \\ \omega'(\xi) \Psi(\xi)] \end{cases} \quad (17)$$

可求得:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{2} \left(4Re(\varphi(\zeta)) - Re\left(\frac{2\xi^2}{\rho} \frac{1}{\omega'(\zeta)} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. [\overline{\omega(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \psi(\zeta)] \right) \right) \\ \sigma_\theta = \frac{1}{2} \left(4Re(\varphi(\zeta)) + Re\left(\frac{2\xi^2}{\rho} \frac{1}{\omega'(\zeta)} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. [\overline{\omega(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \psi(\zeta)] \right) \right) \\ \tau_{\rho\theta} = \frac{1}{2i} \text{Imag}\left(\frac{2\xi^2}{\rho} \frac{1}{\omega'(\zeta)} [\overline{\omega(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \right. \\ \left. \omega'(\zeta) \psi(\zeta)] \right) \end{cases} \quad (18)$$

式中: $\sigma_\theta, \sigma_\rho$ 和 $\tau_{\rho\theta}$ 分别为正交曲线坐标系下环向应力、径向应力和剪切应力; ρ 为映射平面上径向坐标; 接着根据的求的 $\sigma_\theta, \sigma_\rho$ 和 $\tau_{\rho\theta}$ 求出在物理坐标下的 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 。

由应力边界条件和位移边界条件确定的应力复变函数有所差别,利用应力边界确定的两应力复变函数来计算位移场时会使整个围岩多出一个刚性位移。研究表明,此刚性位移可通过一定的边界条件予以消除,即距离两洞足够远处(理论上应该是无穷远处)的位移为 0。以应力函数 $\varphi_1^\nabla(z_1)$ 、 $\psi_1^\nabla(z_1)$ 表示消除了刚性位移后的应力函数表达式,在第 1 映射坐标系 $x_1 O_1 y_1$ 、 $\varphi_1^\nabla(z_1)$ 、 $\psi_1^\nabla(z_1)$ 按照下式确定:

$$\varphi_1^\nabla(z_1) = \varphi_1(z_1) + m + ni \quad (19)$$

$$\psi_1^\nabla(z_1) = \psi_1(z_1) + m' + n'i \quad (20)$$

式中: $\varphi_1(z_1)$ 、 $\psi_1(z_1)$ 为应力边界条件下求出的复应力函数; m 、 n 、 m' 、 n' 均为实常数,其具体大小由带入的边界条件确定。

根据位移场边界条件式就可确定下来围岩内任一点的位移:

$$2G(u + iv) = k \varphi_1^\nabla(z_1) - z_1 \overline{\varphi_1^\nabla(z_1)} - \overline{\psi_1^\nabla(z_1)} \quad (21)$$

式中 u 、 v 分别表示两坐标轴方向即水平方向位移和垂直方向位移。

3 马蹄形隧道映射函数参数的确定

根据式(4)求映射函数最终化为求解映射函数中的参数 R 和 C_k , 求解步骤如下:

1) 在 z 平面选定直角坐标系,使单心圆仰拱隧道对称于 x 轴分布,在 x 轴左边圆周上逆时针任取点 i ,使得点 i 的直角坐标和相应极坐标为 (x_i, y_i) 和 (r_0, a_i) ,令 $i = 0$ 对应坐标点 $(r_0, 0)$, ζ 平面单位圆圆周上对应的点的直角坐标和极坐标均为 $(1, 0)$,则最终可推出:

$$R = \frac{r_0}{1 + \sum_{k=0}^n C_k} \quad (22)$$

2) 用复合最优化技术^[17]来确定 C_k , 设目标函数为:

$$f = \sum_{i=1}^m \left\{ r_i - R \left[\cos(a_i - \beta_i) + \sum_{k=0}^n C_k \cos(a_i + k\beta_i) \right] \right\}^2 \quad (23)$$

以 C_k 、 B_i 为未知量,通过最优化拟合来确定参数 C_k ; 根据验证,在式(4)映射函数的级数中只需取很少几项计算的结果就已经足够精确。经验证,本例中的单心圆仰拱马蹄形隧道断面(如图 3 所示)的映射函数中取 $k = 5$ 就已经足够精确。

图 3 所示为某工程单心圆仰拱隧道的典型断面图,其中 $R_1 = 6$ m, $R_2 = 15$ m,无穷远处作用的竖向地表外荷载取 $P_2 = 20$ MPa,弹性模量取 $E = 4.3$ GPa,泊松比 $\mu = 0.28$ 。水平向为固定边界条件

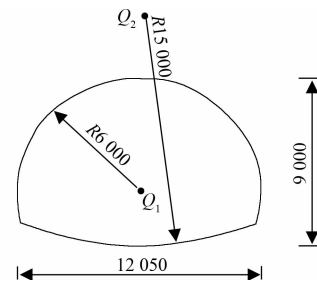


图 3 单心圆仰拱隧道断面尺寸

($P_1 = 0$)。其余尺寸如图 3 所示,经过最优化计算得单心圆仰拱隧道的保形变换函数为:

$$\omega(\zeta) = 5.5701(\zeta - 0.1701 - 0.1385\zeta^{-1} + 0.0734\zeta^{-2} - 0.0334\zeta^{-3} + 0.0119\zeta^{-4} + 0.00589\zeta^{-5}) \quad (24)$$

将保形变换函数的系数 C_k 值代入式(4)、然后代入式(5)、(6),最终求的应力函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 。把应力函数带入式(18)、(21)最终求得单心圆仰拱隧道的 $(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta})$ 和位移 (u, v) 。

4 解析解与有限单元法计算结果比较

采用三维有限元分析软件 ANSYS 建立二维平面应变模型,对理论推导单心圆仰拱隧道解析解公式进行验证,有限元模型如图 4。为了与解析解计算结果进行对比分析,模型中取单一岩层进行分析,根据相关工程经验,参数在合理的经验范围内假定取值,岩层重度取 24 kN/m³,岩层弹性模量取 $E = 4.3$ GPa,竖向地表外荷载取 $P_2 = 2$ MPa,泊松比 $\mu = 0.28$ 。水平向为固定边界条件($P_1 = 0$)。模型计算范围水平方向左右两边各取 3 倍洞跨宽;垂直方向上下边界也各取 3 倍洞跨宽。为了便于分析,把单心圆隧道用角度划分成 12 等份,分别比较了解析解所得的隧道洞周附近区域各的 σ_r 、 σ_θ 和 $\tau_{r\theta}$ 等应力值和 u 、 v 等位移值(取上半平面),见图 5~7,并对其误差大小进行分析,见表 1。由计算结果可以看出各点的周边的应力值与位移值变化趋势基本一致,隧道环向应力值 σ_θ 解析解计算的最大值为 5.682 MPa,最大值出现在逆时针方向 120° ,环向应力值的最大误差为仅为 8.8%,水平位移最大误差为 11.3%,而竖向位移的最大误差为 7.3%。结果证明了公式的可靠性。

表 1 解析解和有限元结果比较

参数	解析解计算最大值	有限元计算最大值	最大误差/%
σ_θ /MPa	5.682	6.202	8.8
u /mm	1.714	1.932	11.3
v /mm	1.133	1.222	7.3

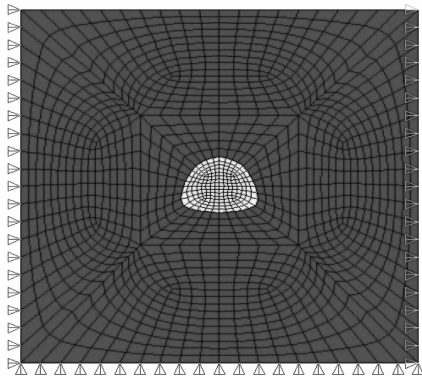
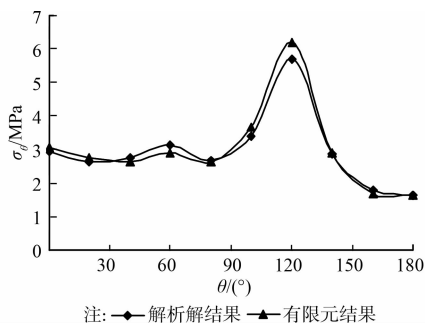
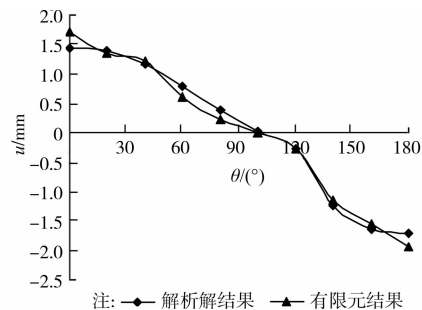
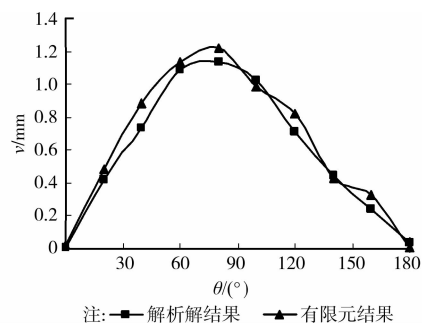


图 4 有限元模型

图 5 隧道周边 σ_θ 值结果比较图 6 隧道周边 u 值结果比较图 7 隧道周边 v 值结果比较

5 结 语

分析马蹄形这种不规则形状的隧道,一般需要试验或有限元法分析,笔者直接用隐式解析解进行

分析。将深埋单心圆仰拱马蹄形隧道所处的地下空间转换为平面应变情况下的弹性半空间,考虑隧洞埋深与孔径相比比较大从而不考虑重力梯度影响,将重力作用化为作用于远场边界上的外荷载,利用复变函数柯西积分法结合最优化理论求解出了地下半空间典型断面的单心圆仰拱马蹄形隧道在其所在的弹性半空间内任意一点的应力解和位移解解析解的表达式。解析解结果与有限元计算结果的验证表明公式的正确性。

笔者的求解方法拓展了柯西积分法的应用,但还有若干问题须进一步研究,如考虑岩土体为粘弹性情况。同时,本文解只针对深埋隧道,浅埋马蹄形断面隧道的解的表达式也有待于进一步研究。

参考文献:

- [1] Jeffery G B. Plane stress and plane strain in Bipolar Coordinates [J]. Transaction of the Royal Society, Series A, 1920, 221: 265-293.
- [2] Mindlin R D. Stress distribution around a tunnel [J]. Transaction of the ASCE, 1940, 190: 1117-1153.
- [3] Mindlin R D. Stress distribution around a hole near the edge of a plate under tension [J]. Proceedings of the Society Experimental Stress Analysis, 1948(5): 56-67.
- [4] Green A E. General biharmonic analysis for a plate containing circular holes [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Engineering Sciences, 1940, 964(176): 121-139.
- [5] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [6] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [7] Muskhelishvili N I. Mathematical theory of elasticity [M]. Leyden: International Publishing, 1954.
- [8] 路见可. 平面弹性复变方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.
- [9] Verruijt A. A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half plane [J]. Geotechnique, 1997, 21(4): 77-89.
- [10] Verruijt A. Deformations of an elastic half plane with a circular cavity [J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, 35(21): 2795-2804.
- [11] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994: 70-76.
- [12] 吕爱钟, 张路青. 地下隧洞力学分析的复变函数方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2007: 51-73.
- [13] 王志良, 申林方, 姚激, 等. 浅埋隧道围岩应力场的计算复变函数求解法[J]. 岩土力学, 2010, 31(Sup1): 86-90.

(下转第 118 页)

- 温升的影响[J]. 混凝土, 2009(10): 10-12.
- Han J G, Zhang R, Hao W Z. Influence of water-binder ratio and fly ash on the adiabatic temperature rise of concrete [J]. Concrete, 2009(10): 10-12.
- [12] Shen D J, Luan H, Jia D Q, et al. Influence of environmental conditions on temperature field of concrete [J]. Advanced Materials Research, 2011(7): 1661-1666.
- [13] Shehata M H, Thomas M D A. The role of alkali content of Portland cement on the expansion of concrete prisms containing reactive aggregates and supplementary cementing materials [J]. Cement and Concrete Research, 2010,40: 569-574.
- [14] 何真, 梁文泉, 陈美祝, 等. 碱对水泥基材料早期收缩性能的影响[J]. 硅酸盐学报, 2004, 32(10): 1293-1299.
- He Z, Liang W Q, Chen M Z, et al. Effects of alkalinity on early age shrinkage characteristic of cement-based materials [J]. Journal of the Chinese Ceramic Society, 2004, 32(10): 1293-1299.
- [15] Massazza F D. 水泥和胶凝材料的水化化学[C]//印度新德里: 第 9 届国际水泥化学会议综合报告译文集(印度新德里). 南京化工学院材料科学与工程系. 编译. 1992:155-239.
- [16] 彭家惠, 楼宗汉. 钙矾石形成机理的研究[J]. 硅酸盐学报, 2000, 26(6): 511-517.
- Peng J H, Lou Z H. Study on the mechanism of ettringite formation [J]. Journal of the Chinese Ceramic Society, 2000, 26(6): 511-517.
- [17] 杨南如, 钟白茜, 董攀, 等. 钙矾石的形成和稳定条件[J]. 硅酸盐学报, 1984, 12(2): 155-165.
- Yang N R, Zhong B Q, Dong P, et al. Ettringite formation and conditions for its stability [J]. Journal of the Chinese Ceramic Society, 1984, 12(2): 155-165.

(编辑 王秀玲)

(上接第 105 页)

- Wang Z L, Shen L F, Yao J, et al. Calculation of stress field in surrounding rocks of shallow tunnel using computational function of complex variable method [J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(Sup1):86-90.
- [14] 张顶锋, 杜守继. 盾构隧道并行施工对既有隧道影响的理论分析[J]. 力学季刊, 2010, 31(4): 582-588
- Zhang D F, Du S J. Theoretical analysis of existing tunnel affect under shield tunnel parallel construction [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2010, 31(4): 582-588.
- [15] 晏莉, 阳军生, 刘宝琛. 浅埋双孔平行隧道开挖围岩应力和位移分析[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(3): 413-419
- Yan L, Yang J S, Liu B C. Stress and displacement of surrounding rock with shallow twin-parallel tunnels [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(3): 413-419.
- [16] 童磊, 谢康和, 卢萌盟, 等. 盾构任意衬砌变形边界条件下复变函数弹性解[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2010, 44(9): 1825-1830.
- Tong L, Xie K H, Lu M M, et al. Elastic complex variables solution for general arbitrary ground deformation of tunnels in clays [J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2010, 44(9): 1825-1830.
- [17] 刘伟. 信机械最优化理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997: 143-149.

(编辑 胡英奎)