

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2014.02.002

RL 型截面冷弯薄壁型钢的畸变屈曲荷载算式

姚 谏^{1,2}, 卢哲刚^{2,3}

(1. 浙江树人大学 城建学院, 杭州 310015; 2. 浙江大学 结构工程研究所, 杭州 310058;
3. 浙江绿城建筑设计有限公司, 杭州 310007;)

摘要:为了对 RL 型截面冷弯薄壁型钢的畸变屈曲作进一步研究,以既有研究成果为基础,根据广义梁理论推导了两端简支和固支边界条件下 RL 型截面冷弯薄壁型钢的畸变屈曲荷载计算式。通过求解矩阵的广义特征值,利用推导的算式计算 RL 型截面型钢构件在轴压、绕弱轴和强轴弯曲下的畸变屈曲荷载和屈曲半波长,并与有限条软件 CUFSM 分析结果和既有理论公式的解相比,结果表明所得算式具有较高的精度。公式推导过程和结论可以为工程设计和进一步研究中计算畸变屈曲荷载提供参考。

关键词:冷弯薄壁型钢; RL 型截面; 广义梁理论; 荷载

中图分类号: TU318 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2014)02-0006-08

Distortional Buckling Formulae of Cold-Formed Thin-Walled Rack Members Upright with Rear Flange and Additional Lip Stiffeners

Yao Jian^{1, 2}, Lu Zhegang^{2, 3}

(1. College of Urban Construction, Zhejiang Shuren University, Hangzhou 310015, P. R. China;
2. Institute of Structural Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, P. R. China;
3. Zhejiang Greentown Architectural Design Co, Ltd, Hangzhou 310007, P. R. China)

Abstract: According to the generalised beam theory based on the exist studies, the aim of this paper is to derive the distortional buckling formulae of pinned or fixed cold-formed thin-walled rack members upright with rear flanges and additional lip stiffeners. The formulae is adopted to calculate the distortional buckling load and the buckling half-wave length of the member subjected to axial compression or minor and major axis bending. Meanwhile, the results are compared to those of finite strip program CUFSM and other analytical formulae. The derived formulae is proved to be accurate enough. As a result, it may be directly used in practical design as well as further study.

Key words: cold-formed thin-walled section; rack section upright with rear flange and additional lip stiffener; generalised beam theory; loads

畸变屈曲作为控制冷弯薄壁型钢设计的一种重要屈曲模式,得到了研究人员的高度关注和广泛研究。迄今为止,研究最多的发生畸变屈曲的典型截面有以下 3 种:普通卷边槽型或卷边 Z 型(以下简称 C 或 Z 型)、带后翼缘的槽型(以下简称 RA 型^[1])和

带后翼缘与后卷边的槽型(以下简称 RL 型^[1])。对于笔者研究的 RL 型截面(见图 1),文献[2]基于稳定理论,给出了轴心压力作用下两端简支构件的畸变屈曲荷载计算式;文献[3]采用与文献[2]相同的模型,对腹板提供给翼缘的转动约束刚度进行深入

收稿日期:2013-02-21

基金项目:浙江省科技计划项目(2011C31006);教育部博士学科点专项科研基金(J20120118)

作者简介:姚 谏(1958-),男,教授,博士生导师,主要从事钢结构稳定、FRP 研究,(E-mail) yaojian58@hznc.com。

的研究,给出了两端简支的RL型截面构件在轴心压力和绕弱轴弯矩作用下的畸变屈曲荷载简化计算式。已有的对C或Z型、RA型截面的研究中^[4-11],广义梁理论(Generalized Beam Theory,以下简称GBT)给出的计算结果常可以作为其他研究的精确解,文献[4]、[12-15]给出了C或Z型、RA型截面在多种边界和荷载情况下的畸变屈曲荷载计算公式,但对于RL型截面目前仍没有相应的计算式。笔者根据GBT的基本原理,推导了两端简支和固支的RL型截面构件,在轴心压力、绕弱轴和强轴弯矩作用下的计算式。需要说明的是,笔者基于GBT给出的RL截面构件的计算式与文献[14]给出的RA型截面计算式一样,其中包括一个求解 10×10 阶广义特征值的过程,通常需借助软件(如Matlab)完成,因此也属于准解析的计算式。

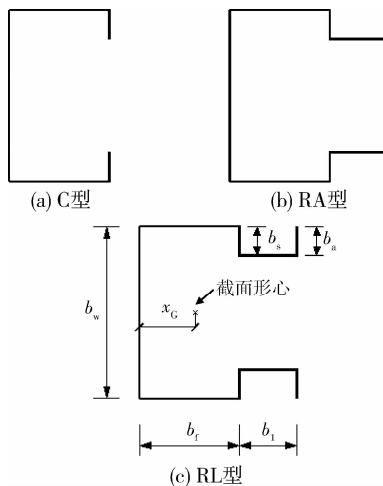


图1 3种典型截面示意图

1 RL截面基于GBT的计算公式

GBT最早是由Schardt提出的,用于分析冷弯薄壁构件的稳定^[16],它将构件的屈曲模态分解为一系列横截面变形模态(包括整体、畸变和局部屈曲)的线性组合。当一些模态的作用不显著时,GBT可以选择性地对作用显著的模态进行研究。

对于每一个模态,都有以下平衡方程^[3,5]

$$C_{ij}\varphi_{j,xxxx} - GD_{ij}\varphi_{j,xx} + B_{ij}\varphi_j + W_k X_{kij}\varphi_{j,xx} = 0 \quad (1)$$

式中: x 为构件纵向坐标;函数 $\varphi_j(x)$ 为模态 j 对应的沿构件纵向的振幅函数; E 、 G 为弹性模量和剪切模量; C_{ij} 、 D_{ij} 、 B_{ij} 分别为与屈曲时的模态 i 、 j 相关的截面翘曲常数、扭转常数、横向弯曲刚度, X_{kij} 为与屈曲前模态 k 、屈曲时模态 i 、 j 相关的几何刚度, W_k 为截面应力合力,分别按式(2)计算。

$$\begin{aligned} C_{ij} &= t \int_c u_i u_j ds; \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} t^3 \int_c \tau_{i,x} \tau_{j,x} ds; \\ B_{ij} &= K \int_c \omega_{i,xx} \omega_{j,xx} ds \\ X_{kij} &= \frac{t}{C_{kk}} \int_c u_k (v_i v_j + \omega_i \omega_j) ds; \\ W_k &= -EC_{ik} \varphi_{k,xx} \end{aligned} \quad (2)$$

式中: t 、 K 为板件的厚度和弯曲刚度($K = Et^3/[12(1-\nu^2)]$); s 为沿截面板厚中线的曲线坐标; c 为沿曲线坐标的截面周长。 u 、 v 、 w 为沿 x 、 s 、 z 坐标的位移,如图2所示。

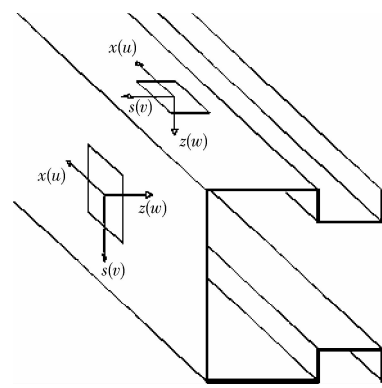


图2 构件坐标示意图

对于RL型截面构件,在轴向压力、绕截面弱轴或强轴的弯矩作用下发生畸变屈曲时,图3所示模态(对称S、反对称D)是截面畸变过程中的主要模态,即包括翼缘、卷边、后翼缘及后卷边4块板件的畸变。采用伽辽金法求解相应的平衡微分方程,求解时不同边界条件下构件位移函数的选取可参考文献[14]。限于篇幅,笔者直接给出构件畸变屈曲荷载计算式的表达式。

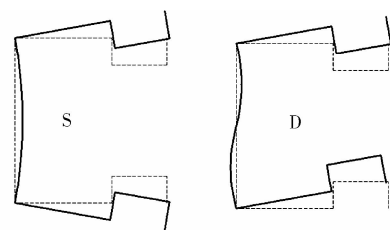


图3 RL型截面畸变的主要模态

1)对于轴心受压柱,相关的屈曲模态主要为S。对于两端简支和固支的构件,屈曲荷载的表达式均可写为

$$P = \frac{1}{X_S} \left[EC_S \mu c \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + GD_S + B_S \mu_B \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \right] \quad (3)$$

式中: μ_B 、 μ_C 为与构件变形相关的参数, 取决于描述振幅函数的选取, 与构件的边界条件和屈曲半波数 n 有关, 而 C_s 、 D_s 、 B_s (为了与文献[12-15]中的命名统一, 分别为 C_{SS} 、 D_{SS} 、 B_{SS} 的简写) 分别为对应模式 S 的翘曲常数、扭转常数和横向弯曲刚度。

当构件两端简支时, 对式(3)关于构件长度 L 求导, 即 $dP/dL=0$, 可得构件的屈曲半波长和屈曲荷载的最小值为

$$L = \lambda_{cr} = \pi \sqrt{\frac{4EC_s}{B_s}} \sqrt{\frac{\mu_C}{\mu_B}} \quad (4a)$$

$$P_{\min} = \frac{2 \sqrt{EC_s B_s} \sqrt{\mu_C \mu_B} + GD_s}{X_s} \quad (4b)$$

式中 X_s 为 X_{1SS} 的简写, 为轴向荷载下与模式 S 相关的几何刚度。

2) 对于受弯构件, 当构件绕弱轴弯曲时, 相关的主要屈曲模式也为 S , 屈曲荷载和半波长计算与轴心受压柱相同, 仅几何刚度 X_s^I 的计算略有差异 (见本文第 2.2 节, X_s^I 为绕截面弱轴 (II 轴) 弯曲时与模式 S 相关的几何刚度)。当构件绕强轴弯曲时, 相关的主要屈曲模式为 $S+D$ 组合, 对于简支和固支的构件, 其屈曲荷载的表达式也均可写为

$$M = \frac{1}{X_{SD}^I} \sqrt{EC_s \mu_C \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + GD_s + B_s \mu_B \left(\frac{L}{\pi}\right)^2} \cdot \sqrt{EC_D \mu_C \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + GD_D + B_D \mu_B \left(\frac{L}{\pi}\right)^2} \quad (5)$$

式中 X_{SD}^I 为绕截面强轴 (I 轴) 弯曲时与模式 S 、 D 相关的几何刚度。

当构件两端简支时, 由于对式(5)求导较为麻烦, 文献[14]提出下式计算畸变屈曲时半波长 (误差很小, 一般 $\leq 1\%$):

$$\lambda_{cr} = \pi \sqrt{\frac{8E^2 C_s C_D}{B_s B_D}} \sqrt{\frac{\mu_C}{\mu_B}} \quad (6)$$

此时的屈曲荷载可用式(6)的计算结果带入式(5)求得。对于两端固支的构件, 由于构件发生畸变屈曲时, 沿构件长度的半波数与构件长度等因素有关, 可以根据伽辽金法假设的位移函数以及发生屈曲时的荷载来加以确定。

式(3)~(6)中的参数 μ_B 、 μ_C 可按下列取值:

1) 对于两端简支的构件, 采用正弦的振幅函数可以得到屈曲荷载的精确解^[3], 参数 μ_B 、 μ_C 表达式为

$$\mu_B = \frac{1}{n^2} \quad (7a)$$

$$\mu_C = n^2 \quad (7b)$$

2) 对于两端固支的构件, 其屈曲荷载随构件长度变化而变化, 通过假定的位移函数, 再利用式(3)或(5), 可以得到屈曲荷载的近似解^[15], 参数 μ_B 、 μ_C 表达式为

$$\mu_B = \frac{3(\text{if } n=1) \text{ 或 } 2(\text{if } n \geq 2)}{(n-1)^2 + (n+1)^2} \quad (8a)$$

$$\mu_C = \frac{(n-1)^4 + (n+1)^4}{(n-1)^2 + (n+1)^2} \quad (8b)$$

2 RL 截面的参数确定

计算构件的畸变屈曲荷载时, 截面的翘曲常数 C_s 、 C_D , 扭转常数 D_s 、 D_D 以及弯曲刚度 B_s 、 B_D 的计算只与截面尺寸参数有关, 而几何刚度 X_s 、 X_s^I 、 X_{SD}^I 还与屈曲前的荷载情况有关。采用软件 Matlab 推导这些参数的计算表达式, 在此之前, 需先求解一个广义特征值问题, 以求得 S 、 D 模式下 RL 截面 10 个节点的广义翘曲位移。

2.1 节点位移

计算步骤如下:

1) 初始形函数 $u_k(s)$ 。选取方法为依次在 RL 型截面各个节点上施加单位翘曲位移 $u_k = -1$, 在相邻节点间线性分布, 且 $u_{k-1} = u_{k+1} = 0$ 。图 4 为在节点 5 上施加单位翘曲位移的示意。

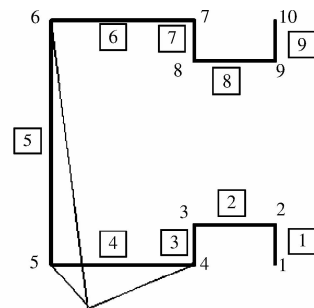


图 4 初始形函数施加示意图

2) 由剪应变 $\gamma_{rs}^M = 0$ 的假设和力法原理, 计算初始形函数 $v_k(s)$ 、 $w_k(s)$, 对于任一板单元 $v_k(s)$ 为常数, $w_k(s)$ 为三次式。计算柔度矩阵 $[F]$ 和矩阵 $[\tilde{w}]$, 结果见文后附录。

3) 根据式(2)和假设的初始形函数积分计算矩阵 $[C]$, 结果见附录。根据式(9)计算矩阵 $[B]$ 。此处矩阵 $[B]$ 、 $[C]$ 都是高度耦合的矩阵, 并且只用于截面参数分析。

$$[M] = -[F]^{-1}[\tilde{w}], [B] = -[\tilde{w}]^T[M] \quad (9)$$

4) 求解下列广义特征值问题

$$([B] - \lambda_\alpha [C])\{u_\alpha\} = 0 (\alpha = 1, \dots, 10) \quad (10)$$

可得到对应于每一模态 α 的特征向量 $\{u_\alpha\} = \{u_1, u_2, \dots, u_9, u_{10}\}^T$, 其中 S、D 模态分别对应 2 个最小的非零特征值 $\lambda_S, \lambda_D (0 < \lambda_S < \lambda_D)$ 。

5) 由式(11)计算向量 $\{m_S\}, \{m_D\}$ (对应各个节点沿构件纵向的均布弯矩)

$$\{m_S\} = [M]\{u_S\}, \{m_D\} = [M]\{u_D\} \quad (11)$$

根据上述步骤, 可得 RL 型截面 S、D 模态的特征向量 $\{u\}$ 、弯矩向量 $\{m\}$ 为

$$\{u\} = \{1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ \gamma u_5 \ \gamma u_4 \ \gamma u_3 \ \gamma u_2 \ \gamma\}^T \quad (12a)$$

$$\{m\} = \{0 \ 0 \ m_3 \ m_4 \ m_5 \ \gamma m_5 \ \gamma m_4 \ \gamma m_3 \ 0 \ 0\}^T \quad (12b)$$

式中参数 γ 对模态 S 取 1, 对模态 D 取 -1, 以下所有算式取值均同此处。

对于截面的各板单元, 其平面内膜位移 $\{v\}$ 、板件转角 $\{\varphi\}$ 和弯曲位移 $\{w\}$ 可表示为

$$\{v\} = \{v_a \ v_1 \ v_s \ v_f \ v_w \ -\gamma v_f - \gamma v_s - \gamma v_1 - \gamma v_a\}^T \quad (13a)$$

$$\{\varphi\} = \{\varphi_a \ \varphi_1 \ \varphi_s \ \varphi_f \ \varphi_w \ -\gamma \varphi_f - \gamma \varphi_s - \gamma \varphi_1 - \gamma \varphi_a\}^T \quad (13b)$$

$$\{w\} = \{w_a \ w_1 \ w_s \ w_f \ w_w \ \gamma w_f \ \gamma w_s \ \gamma w_1 \ \gamma w_a\}^T \quad (13c)$$

$\{v\}, \{\varphi\}$ 和 $\{w\}$ 中各分量具体的计算式为

膜位移 $v_{a,S}, v_{1,S}, v_{s,S}, v_{f,S}, v_{w,S}$ 和 $v_{a,D}, v_{1,D}, v_{s,D}, v_{f,D}, v_{w,D}$ 为

$$v_a = \frac{1-u_2}{b_a}, v_1 = \frac{u_2-u_3}{b_1}, v_s = \frac{u_3-u_4}{b_s}, v_f = \frac{u_4-u_5}{b_f}, v_w = \frac{(1-\gamma)u_5}{b_w} \quad (14)$$

式(14)各式对 S、D 模态都适用, 但 γ 应取相应的值, 下同。

板单元弦转角 $\varphi_{w,S}, \varphi_{f,S}, \varphi_{s,S}, \varphi_{1,S}, \varphi_{a,S}$ 和 $\varphi_{w,D}, \varphi_{f,D}, \varphi_{s,D}, \varphi_{1,D}, \varphi_{a,D}$ 为

$$\varphi_w = \frac{v_f(1-\gamma)}{b_w}, \varphi_f = \frac{v_s+v_w}{b_f}, \varphi_s = \frac{v_f-v_1}{b_s}, \varphi_1 = \frac{-v_s-v_a}{b_1}, \varphi_a = \varphi_1 + \frac{b_1 m_3}{6K} \quad (15)$$

弯曲位移 $w_{w,S}, w_{f,S}, w_{s,S}, w_{1,S}, w_{a,S}$ 和 $w_{w,D}, w_{f,D}, w_{s,D}, w_{1,D}, w_{a,D}$ 为

$$w_w = -\frac{v_f}{2}(1+\gamma), w_f = \frac{v_w-v_s}{2}, w_s = \frac{v_f+v_1}{2}, w_1 = \frac{v_a-v_s}{2}, w_a = \frac{b_a(v_s+v_a)-2b_1v_1-b_3b_1m_3}{2b_1-12K} \quad (16)$$

2.2 截面参数计算公式

利用上述节点位移计算表达式, 由式(2)可得横

截面力学参数 C_S, B_S, D_S 和 C_D, B_D, D_D ($\gamma=1, -1$, 下标分别为 S、D) 为

$$C = \frac{t}{3} [2b_a(u_2^2 + u_2 + 1) + 2b_1(u_2^2 + u_2u_3 + u_3^2) + 2b_s(u_3^2 + u_3u_4 + u_4^2) + 2b_f(u_4^2 + u_4u_5 + u_5^2) + b_w u_5^2(2+\gamma)] \quad (17a)$$

$$B = \frac{1}{3K} [2b_1m_3^2 + 2b_s(m_3^2 + m_3m_4 + m_4^2) + 2b_f(m_4^2 + m_4m_5 + m_5^2) + (2+\gamma)b_w m_5^2] \quad (17b)$$

$$D = \frac{t^3}{3} (2b_a\varphi_a^2 + 2b_1\varphi_1^2 + 2b_s\varphi_s^2 + 2b_f\varphi_f^2 + b_w\varphi_w^2) \quad (17c)$$

截面几何刚度按式(18)计算, 即

$$X = \frac{t}{15 \ 120K^2 C} \sum_i X_i \quad (18)$$

式中 C 为对应构件屈曲前模态的截面翘曲常数, 对于研究的轴压、绕强轴或弱轴纯弯情况, C 分别为截面面积 A 、绕强轴惯性矩 I_I 和绕弱轴惯性矩 I_{II} , 如表 1 所示。

对于截面几何刚度 $X_S, X_D, X_S^{\parallel}, X_D^{\parallel}$, 共包含 6 项,

$$X_1 = 15 \ 120K^2 [b_a(v_a^2 + w_a^2)(U_1 + U_2) + b_1(v_1^2 + w_1^2)(U_2 + U_3) + b_s(v_s^2 + w_s^2)(U_3 + U_4) + b_f(v_f^2 + w_f^2)(U_4 + U_5) + b_w(v_w^2 + w_w^2)U_5]$$

$$X_2 = 1 \ 260K^2 [b_s^3\varphi_s^2(U_1 + U_2) + b_f^3\varphi_f^2(U_2 + U_3) + b_s^3\varphi_s^2(U_3 + U_4) + b_f^3\varphi_f^2(U_4 + U_5) + b_w^3\varphi_w^2U_5]$$

$$X_3 = 5 \ 040K^2 [b_a^2\varphi_a w_a(U_2 - U_1) + b_f^2\varphi_f w_f(U_3 - U_2) + b_s^2\varphi_s w_s(U_4 - U_3) + b_f^2\varphi_f w_f(U_5 - U_4)]$$

$$X_4 = b_f^5 m_3^2 (29U_2 + 35U_3) + b_s^5 [m_3^2 (29U_4 + 35U_3) + m_4^2 (29U_3 + 35U_4) + 62m_3 m_4 (U_3 + U_4)] + b_f^5 [m_4^2 (29U_5 + 35U_4) + m_5^2 (29U_4 + 35U_5) + 62m_4 m_5 (U_4 + U_5)] + (62\gamma + 64)b_w^5 m_5^2 U_5$$

$$X_5 = 168K [b_f^3 w_f m_3 (7U_2 + 8U_3) + b_s^3 w_s m_3 (7U_4 + 8U_3) + b_s^3 w_s m_4 (7U_3 + 8U_4) + b_f^3 w_f m_4 (7U_5 + 8U_4) + b_f^3 w_f m_5 (7U_4 + 8U_5) + 7.5b_w^3 w_w m_5 (1+\gamma)U_5]$$

$$X_6 = 42K [b_f^4 \varphi_f m_3 (4U_3 - 2U_2) + b_s^4 \varphi_s m_3 (2U_4 - 4U_3) + b_s^4 \varphi_s m_4 (4U_4 - 2U_3) + b_f^4 \varphi_f m_4 (2U_5 - 4U_4) + b_f \varphi_f m_5 (4U_5 - 2U_4) + b_w \varphi_w m_5 (\gamma - 1)U_5]$$

式中 $U_i (i=1, \dots, 10)$ 是构件屈曲前的节点轴向位移。

对于截面几何刚度 X_{SD}^{\perp} , 同样包含 6 项,

$$X_1 = 15 \ 120K^2 [b_a(v_{a,S}v_{a,D} + w_{a,S}w_{a,D})(U_1 + U_2) + b_1(v_{1,S}v_{1,D} + w_{1,S}w_{1,D})(U_2 + U_3) + b_s(v_{s,S}v_{s,D} + w_{s,S}w_{s,D})(U_3 + U_4) + b_f(v_{f,S}v_{f,D} + w_{f,S}w_{f,D})(U_4 +$$

$U_5]$

$$X_2 = 1\ 260K^2 [b_a^3 \varphi_{a,S} \varphi_{a,D} (U_1 + U_2) + b_i^3 \varphi_{i,S} \varphi_{i,D} (U_2 + U_3) + b_s^3 \varphi_{s,S} \varphi_{s,D} (U_3 + U_4) + b_f^3 \varphi_{f,S} \varphi_{f,D} (U_4 + U_5)]$$

$$X_3 = 2\ 520K^2 [b_a^2 (\omega_{a,D} \varphi_{a,S} + \omega_{a,S} \varphi_{a,D}) (U_2 - U_1) + b_i^2 (\omega_{i,S} \varphi_{i,D} + \omega_{i,D} \varphi_{i,S}) (U_3 - U_2) + b_s^2 (\omega_{s,S} \varphi_{s,D} + \omega_{s,D} \varphi_{s,S}) (U_4 - U_3) + b_f^2 (\omega_{f,S} \varphi_{f,D} + \omega_{f,D} \varphi_{f,S}) (U_5 - U_4) - b_w^2 (\omega_{w,S} \varphi_{w,D} + \omega_{w,D} \varphi_{w,S}) U_5]$$

$$X_4 = b_i^5 m_{3,S} m_{3,D} (29U_2 + 35U_3) + b_s^5 [m_{3,S} m_{3,D} (29U_4 + 35U_3) + m_{4,S} m_{4,D} (29U_3 + 35U_4) + 31(m_{3,S} m_{4,D} + m_{4,S} m_{3,D}) (U_3 + U_4)] + b_f^5 [m_{4,S} m_{4,D} (29U_5 + 35U_4) + m_{5,S} m_{5,D} (29U_4 + 35U_5) + 31(m_{4,S} m_{5,D} + m_{5,S} m_{4,D}) (U_4 + U_5)] + 6b_w^5 m_{5,S} m_{5,D} U_5$$

$$X_5 = 84K [b_i^3 (\omega_{i,S} m_{3,D} + \omega_{i,D} m_{3,S}) (7U_2 + 8U_3) + b_s^3 (\omega_{s,S} m_{4,D} + \omega_{s,D} m_{4,S}) (7U_3 + 8U_4) + b_f^3 (\omega_{f,S} m_{5,D} + \omega_{f,D} m_{5,S}) (7U_4 + 8U_5) + b_i^3 (\omega_{f,S} m_{4,D} + \omega_{f,D} m_{4,S}) (7U_5 + 8U_4) + b_w^3 \omega_{w,S} m_{5,D} U_5]$$

$$X_6 = 42K [b_i^4 (\varphi_{i,S} m_{3,D} + \varphi_{i,D} m_{3,S}) (2U_3 - U_2) + b_s^4 (\varphi_{s,S} m_{4,D} + \varphi_{s,D} m_{4,S}) (2U_4 - U_3) + b_f^4 (\varphi_{f,S} m_{5,D} + \varphi_{f,D} m_{5,S}) (2U_5 - U_4) + b_i^4 (\varphi_{f,S} m_{4,D} + \varphi_{f,D} m_{4,S}) (U_5 - 2U_4) - 3b_w^4 \varphi_{w,D} m_{5,S} U_5]$$

对于轴压和绕弱轴弯曲的构件,横截面屈曲前的轴向位移是对称的,即 $U_1 = U_{10}, U_2 = U_9, U_3 = U_8, U_4 = U_7, U_5 = U_6$; 而对于绕强轴弯曲的构件,横截面屈曲前的轴向位移是反对称的,即 $U_1 = -U_{10}, U_2 = -U_9, U_3 = -U_8, U_4 = -U_7, U_5 = -U_6$ 。 $U_1 \sim U_5$ 的取值见表 1。

表 1 截面轴向位移 $U_1 \sim U_5$ 的取值

X	U_5	U_4	U_3	U_2	U_1	C
X_S, X_D	1	1	1	1	1	A
$X_S^{\parallel}, X_D^{\parallel}$	x_G	$x_G - b_f$	$x_G - b_f$	$x_G - b_f - b_l$	$x_G - b_f - b_l$	I_{\parallel}
X_S^{\perp}, X_D^{\perp}	$\frac{b_w}{2}$	$\frac{b_w}{2}$	$\frac{b_w}{2} - b_s$	$\frac{b_w}{2} - b_s$	$\frac{b_w}{2} - b_s + b_a$	I_{\perp}

注: x_G 为截面形心到腹板厚度中线的距离,见图 1(c)。

3 计算式验证

为了验证得到的计算式的正确性,把计算式得到的结果与有限条软件 CUFSM 的分析结果进行比较。CUFSM 软件是用于两端简支的冷弯薄壁构件

的计算程序^[17-18],通过把构件长度划分得足够精细,可以准确地分析具有各种形式截面(开口或闭口)构件的屈曲行为,所以把其计算结果作为精确解,与计算式的计算结果以及文献[2]和[3]给出算式的计算结果比较。由于 CUFSM 无法计算两端固支的构件,以下主要比较两端简支构件的计算结果。所有算例的截面如表 2 所示,截面厚度均为 1.0 mm。

表 2 RL 型截面尺寸 mm

编号	b_w	b_f	b_s	b_l	b_a	编号	b_w	b_f	b_s	b_l	b_a
1	90	40	10	30	10	13	120	90	15	30	15
2	90	40	10	30	5	14	120	90	15	30	10
3	90	45	10	30	10	15	150	60	15	30	15
4	90	45	10	30	5	16	150	60	15	30	10
5	90	60	10	30	10	17	150	90	10	30	10
6	90	60	10	30	5	18	150	90	10	30	5
7	120	45	10	30	10	19	150	90	15	30	15
8	120	45	10	30	5	20	150	90	15	30	10
9	120	60	10	30	10	21	150	90	10	45	10
10	120	60	10	30	5	22	150	90	10	45	5
11	120	90	10	30	10	23	150	90	15	45	15
12	120	90	10	30	5	24	150	90	15	45	10

注:表中截面主要来源于文献[2]和[3]。

对于给定截面,先利用 Matlab 或者 Maple 软件求解一个广义特征值问题,依据附录计算矩阵[B]、[C],由式(10)求解得到相对于模态 S 和 D 的特征值以及相应的特征向量,特征向量即为 S、D 模态截面各节点的广义翘曲位移。轴压下构件发生畸变屈曲时主要模态为 S,根据式(12)~(16)可计算得 S 模态下的向量 $\{u\}$ 、 $\{m\}$ 、 $\{v\}$ 、 $\{\varphi\}$ 、 $\{\omega\}$,进一步可计算得到截面参数 C_S 、 B_S 、 D_S 以及 X_S 。最后,根据边界条件求取构件的畸变屈曲荷载;当两端简支时,按式(4)计算构件的屈曲临界荷载和屈曲半波长;当两端固支时,需利用式(3),假设屈曲半波长为 L/n 替代式中的 L ,并分别取屈曲半波数 $n=1,2,3,\dots$,计算得到的最小值即为构件的畸变屈曲荷载。绕截面强轴或弱轴弯曲时的计算大致与上述过程相同,此处不再赘述。

表 3 和表 4 分别给出了构件轴心受压、绕截面弱轴弯曲和绕截面强轴弯曲时畸变屈曲荷载的计算结果与比较。

表 3 轴心受压时计算结果比较

编号	P_{ex}	P_{cr}	$\frac{P_{cr}}{P_{ex}}$	P_{Y-T}	$\frac{P_{Y-T}}{P_{ex}}$	P_{L-H}	$\frac{P_{L-H}}{P_{ex}}$
1	102 136	103 009	1.01	97 607	0.96	100 637	0.99
2	78 487	77 247	0.98				
3	40 992	41 339	1.01	38 043	0.93	38 747	0.95
4	31 318	30 837	0.98				
5	75 134	75 121	1.00	72 016	0.96	74 278	0.99
6	61 264	59 829	0.98				
7	38 845	39 307	1.01				
8	29 656	29 184	0.98				
9	72 960	72 607	1.00	70 410	0.97	71 661	0.98
10	59 903	58 098	0.97				
11	54 569	53 834	0.99	51 909	0.95	53 299	0.98
12	49 333	48 601	0.99				
13	77 011	76 518	0.99	73 609	0.96	73 867	0.96
14	68 725	67 810	0.99				
15	43 823	44 575	1.02	41 483	0.95	41 281	0.94
16	36 246	36 192	1.00				
17	53 640	52 731	0.98	51 159	0.95	52 124	0.97
18	48 736	47 746	0.98				
19	75 194	74 591	0.99	72 170	0.96	72 086	0.96
20	67 331	66 291	0.98				
21	48 873	48 284	0.99	46 737	0.96	47 954	0.98
22	41 247	40 119	0.97				
23	71 154	71 129	1.00	68 164	0.96	68 864	0.97
24	60 700	59 736	0.98				
平均值			0.99		0.95		0.97
标准差			0.01		0.01		0.01

注:下标 ex、cr、Y-T 和 L-H 分别表示由 CUFISM 软件计算的精确解、基于 GBT 理论的算式、文献[3]公式及文献[2]算式的计算值。

从表 3 可知,与 CUFISM 提供的精确解相比,笔者算式、文献[2]算式以及文献[3]算式的精度都比较高,计算数据误差在 5% 以内,笔者算式误差在 3% 以内,计算精度更高。

而根据表 4 的对比可见,构件绕弱轴弯曲屈曲时,笔者算式与文献[3]简化公式的精度都较高,最大误差均在 2% 以内。但笔者算式同时可用于计算两卷边宽度 b_s 与 b_a 不等的情况,并具有较高的精度。对绕强轴弯曲屈曲的情况,笔者算式除个别截面的误差达 8% 外,计算精度仍然比较高。

表 4 绕弱轴弯曲、绕强轴弯曲时计算结果比较

编号	绕弱轴弯矩					绕强轴弯矩		
	M_{ex}	M_{cr}	$\frac{M_{cr}}{M_{ex}}$	M_{Y-T}	$\frac{M_{Y-T}}{M_{ex}}$	M_{ex}	M_{cr}	$\frac{M_{cr}}{M_{ex}}$
1	2 240 040	2 213 244	0.99	2 275 949	1.02	4 187 725	4 541 461	1.08
2	1 641 065	1 613 636	0.98			3 428 469	3 520 707	1.03
3	970 212	969 875	1.00	951 321	0.98	1 727 505	1 870 685	1.08
4	705 765	697 523	0.99			1 398 740	1 434 457	1.03
5	2 160 967	2 129 240	0.99	2 174 323	1.01	3 287 574	3 547 357	1.08
6	1 676 919	1 658 557	0.99			2 787 315	2 841 078	1.02
7	936 595	923 407	0.99	923 864	0.99	2 253 521	2 341 281	1.04
8	689 654	680 927	0.99			1 791 421	1 791 398	1.00
9	2 085 205	2 044 388	0.98	2 097 314	1.01	4 249 033	4 402 839	1.04
10	1 638 807	1 615 342	0.99			3 562 335	3 544 299	0.99
11	2 052 502	2 019 254	0.98	2 048 514	1.00	3 247 624	3 340 807	1.03
12	1 780 960	1 785 103	1.00			2 963 305	3 004 577	1.01
13	3 099 201	3 054 240	0.99	3 086 224	1.00	4 672 692	5 059 125	1.08
14	2 673 351	2 659 724	0.99			4 292 531	4 482 863	1.04
15	1 378 077	1 360 842	0.99	1 341 813	0.97	3 309 936	3 480 225	1.05
16	1 114 592	1 103 851	0.99			2 840 773	2 871 741	1.02
17	1 999 568	1 961 660	0.98	1 990 654	1.00	3 933 823	3 971 584	1.01
18	1 748 602	1 746 280	1.00			3 587 513	3 589 024	1.00
19	3 006 348	2 957 771	0.98	2 980 514	0.99	5 653 895	5 903 151	1.04
20	2 609 802	2 593 154	0.99			5 155 976	5 253 084	1.02
21	1 984 375	1 946 591	0.98	1 997 786	1.01	3 542 631	3 606 845	1.02
22	1 610 229	1 596 294	0.99			3 005 096	2 980 849	0.99
23	3 051 762	3 009 223	0.99	3 061 913	1.00	5 215 176	5 526 506	1.06
24	2 602 849	2 491 306	0.96			4 561 619	4 669 163	1.02
平均值			0.99		1.00			1.03
标准差			0.01		0.01			0.03

注:下标 ex、cr、Y-T 和 L-H 分别表示由 CUFISM 软件计算的精确解、基于 GBT 理论的算式、文献[3]公式及文献[2]算式的计算值。

使用基于 GBT 的算式和 CUFISM 软件计算屈曲半波长时会发现,构件在轴心受压和绕弱轴弯曲下屈曲半波长与绕强弯曲下的屈曲半波长相比略大。这与文献[3]、[19]等对于 C 型截面的研究结果是一致的。表 5 仅给出轴心受压时屈曲半波长的数值。

由表 5 可见,基于 GBT 的计算公式与文献[3]给出的简化公式的结果都非常精确,误差均在 1% 以内,而文献[2]公式给出的结果最大误差为 9%,偏差相对较大。

表 5 屈曲半波长计算结果比较

编号	γ_{ex}	γ_{cr}	γ_{cr}/γ_{ex}	γ_{Y-T}	γ_{Y-T}/γ_{ex}	γ_{L-H}	γ_{L-H}/γ_{ex}
1	560	565	1.01	556	0.99	508	0.91
2	458	458	1.00				
3	716	720	1.01	710	0.99	650	0.91
4	590	587	0.99				
5	655	656	1.00	659	1.01	607	0.93
6	558	554	0.99				
7	748	756	1.01	744	0.99	698	0.93
8	619	619	1.00				
9	686	688	1.00	690	1.01	652	0.95
10	587	583	0.99				
11	843	840	1.00	840	1.00	819	0.97
12	766	765	1.00				
13	1 132	1 140	1.01	1 136	1.00	1 072	0.95
14	1 000	1 000	1.00				
15	1 079	1 076	1.00	1 093	1.01	1 024	0.95
16	986	982	1.00				
17	875	873	1.00	870	0.99	866	0.99
18	798	797	1.00				
19	1 119	1 117	1.00	1 132	1.01	1 083	0.97
20	1 025	1 021	1.00				
21	948	946	1.00	943	0.99	908	0.96
22	829	823	0.99				
23	1 224	1 226	1.00	1 227	1.00	1 144	0.93
24	1 093	1 088	1.00				
	平均值	1.00		1.00		0.95	
	标准差	0.006		0.009		0.025	

4 结论

根据广义梁理论的基本原理,推导了带后翼缘与后卷边的槽型(RL型)截面冷弯薄壁型钢构件在轴心受压、绕弱轴弯曲或强轴弯曲时发生弹性畸变屈曲的临界荷载计算式。算式包括了两端简支和固支 2 种边界条件。通过与有限条结果以及既有理论公式的计算结果比较分析,表明笔者推导提出的计算式具有较高的精度,且算式形式较为简单。

参考文献:

- [1] Kesti J, Davies J M. Local and distortional buckling of thin-walled short columns [J]. Thin-Wall Structures, 1999, 34: 115-134.
- [2] Lau S C W, Hancock G J. Distortional buckling formulae for channel columns [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1987, 113(5): 1063-1078.
- [3] 姚谏, 滕锦光. 冷弯薄壁卷边槽钢的弹性畸变屈曲荷载简化计算公式[J]. 浙江大学学报:工学版, 2008, 42(9): 1494-1501.
Yao J, Teng J G. Simple formulae for distortional buckling loads of cold-formed lipped channel sections [J]. Journal of Zhejiang University, 2008, 42(9):1494-1501.
- [4] Camotim D, Silvestre N, Goncalves R, et al. GBT-based structural analysis of thin-walled members: overview, recent progress and future developments [J]. Advances in Engineering Structures Mechanics & Construction, 2006: 187-204.
- [5] 程婕, 姚谏. 弯曲应力作用下的腹板转动约束刚度研究[J]. 工程力学, 2010, 27(11): 94-98, 105.
Cheng J, Yao J. Study on web rotational restraint subjected to flexural stress [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(11): 94-98, 105.
- [6] 姚谏, 程婕, 邢丽. 冷弯薄壁卷边槽钢梁的弹性畸变屈曲荷载简化计算公式[J]. 工程力学, 2011, 28(10): 21-26.
Yao J, Cheng J, Xing L. Simple formulae for distortional buckling loads of cold-formed lipped channels subjected to major axis bending [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(10): 21-26.
- [7] 姚谏, 程婕, 卢哲刚. 冷弯薄壁卷边形钢梁的弹性畸变屈曲荷载[J]. 工程力学, 2013, 30(1): 81-86.
Yao J, Cheng J, Lu Z G. Distortional buckling loads of cold-formed lipped zed-beams [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(1):81-86.
- [8] 罗洪光. 冷弯薄壁斜卷边槽钢弹性畸变屈曲计算研究[D]. 武汉:武汉大学, 2011.
- [9] Natario P, Silvestre N, Camotim D. Localized web buckling analysis of beams subjected to concentrated loads using GBT [J]. Thin-Wall Structures, 2012, 61:27-41.
- [10] Silvestre N, Camotim D, Dinis P B. Post-buckling behavior and direct strength design of lipped channel columns experiencing local/distortional interaction [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2012, 73: 12-30.
- [11] Andreassen M J, Jonsson J. Distortional buckling modes of semi-discretized thin-walled columns [J]. Thin-Walled Structures, 2012, 51: 53-63.
- [12] Silvestre N, Camotim D. Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members Part I-derivation [J]. Thin-Walled Structures, 2004, 42: 1567-1597.
- [13] Silvestre N, Camotim D. Distortional buckling formulae for cold-formed steel C-and Z-section members Part II-Validation and application [J]. Thin-Walled Structures, 2004, 42:1599-1629.
- [14] Silvestre N, Nagahama K, Camotim D, et al. GBT-based distortional buckling formulae for thin-walled rack-section columns and beams [J]. Advances in Steel Structures, 2002, 1:341-350.
- [15] Silvestre N, Camotim D. Distortional buckling formulae for cold-formed steel rack-section members [J]. Steel and Composite Structures, 2004, 4(1): 49-75.
- [16] Schardt R. Verallgemeinerte technische biegetheorie [M]. Berlin: Springer Verlag, 1989.
- [17] Adany S, Schafer B W. Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Derivation [J]. Thin-Walled Structures, 2006, 44: 563-584.
- [18] Adany S, Schafer B W. Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Application and examples [J]. Thin-Walled Structures, 2006, 44: 585-600.
- [19] 程捷. 冷弯薄壁卷边截面受弯构件的畸变屈曲[D]. 杭州:浙江大学, 2010.

附录 A

$[F]$ 、 $[C]$ 为对称矩阵, $[\bar{w}]$ 为非对称矩阵,其中各元素表达式为

$$\begin{aligned} F_{11} &= F_{22} = F_{99} = F_{1010} = 1, F_{33} = F_{88} = \frac{b_l + b_s}{3K}, \\ F_{44} &= F_{77} = \frac{b_l + b_s}{3K}, F_{55} = F_{66} = \frac{b_w + b_l}{3K} \\ F_{34} &= F_{78} = \frac{b_s}{6K}, F_{45} = F_{67} = \frac{b_l}{6K}, F_{56} = \frac{b_l}{6K} \\ C_{11} &= C_{1010} = 2C_{12} = 2C_{910} = \frac{b_s t}{3} C_{22} = C_{99} = \frac{(b_s + b_l)t}{3}, \\ C_{33} &= C_{88} = \frac{(b_l + b_s)t}{3}, C_{44} = C_{77} = \frac{(b_s + b_l)t}{3} \\ C_{55} &= C_{66} = \frac{(b_l + b_w)t}{3}, C_{23} = C_{89} = \frac{b_l t}{6}, C_{34} = C_{78} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b_s t}{6}, C_{45} &= C_{67} = \frac{b_l t}{6}, C_{56} = \frac{b_w t}{6} \\ \bar{w}_{31} &= \bar{w}_{810} = \frac{1}{b_s b_l}, \bar{w}_{32} = \bar{w}_{89} = -\frac{b_s + b_s}{b_s b_s b_l}, \bar{w}_{12} = \bar{w}_{79} = \\ \frac{1}{b_l b_s}, \bar{w}_{33} &= \bar{w}_{88} = \frac{2}{b_s b_l}, \bar{w}_{43} = \bar{w}_{34} = \bar{w}_{87} = \bar{w}_{78} = \frac{b_l - b_l}{b_l b_s b_l} \\ \bar{w}_{53} &= \bar{w}_{35} = \bar{w}_{86} = \bar{w}_{68} = -\frac{1}{b_s b_l}, \bar{w}_{44} = \bar{w}_{77} = \frac{-2}{b_s b_l}, \bar{w}_{55} = \\ \bar{w}_{66} &= \frac{-2}{b_l b_w}, \bar{w}_{45} = \bar{w}_{54} = \bar{w}_{76} = \bar{w}_{67} = \frac{b_s + b_w}{b_s b_l b_w}, \bar{w}_{56} = \bar{w}_{65} = \frac{2}{b_l b_w} \\ \bar{w}_{16} &= \bar{w}_{64} = \bar{w}_{75} = \bar{w}_{57} = \frac{-1}{b_l b_w} \end{aligned}$$

(编辑 胡英奎)

(上接第 5 页)

- Tang H W, Li S B, Zhu C M. A fatigue cumulative damage model of rc beam based on stiffness degradation [J]. Journal of the China railway Society, 2007, 29(3): 84-88.
- [9] 吴晓莉,顾彬. 识别钢筋混凝土桥面板疲劳损伤的剩余刚度法[J]. 特种结构, 2008, 25(3): 69-71.
- Wu X L, Gu B. Residual stiffness method for identifying fatigue damage in reinforced concrete bridge slab [J]. Special Structures, 2008, 25(3): 69-71.
- [10] 廉伟,姚卫星. 复合材料层压板剩余刚度-剩余强度关联模型[J]. 复合材料学报, 2008, 25(5): 151-156.
- Lian W, Yao W X. Residual stiffness-residual strength coupled model of composite laminates [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2008, 25(5): 151-156.
- [11] 卢明奇,杨庆山,杨娜. 考虑刚度退化的铁路低配钢筋混凝土桥墩抗震评估方法[J]. 中国铁道科学, 2011, 32(3): 41-46.
- Lu M Q, Yang Q S, Yang N. Seismic evaluation method of rc railway piers with low steel ratios considering stiffness degradation [J]. China Railway Science, 2011, 32(3): 41-46.
- [12] 辛学忠,郭向荣. 铁路桥梁刚度描述方法[J]. 中国铁道科学, 2007, 28(5): 31-36.
- Xin X Z, Guo X R. Method for describing the stiffness of railway bridges [J]. China Railway Science, 2007, 28(5): 31-36.
- [13] 牛鹏志,黄培彦,姚国文,等. CFL 增强 RC 梁的疲劳累积损伤模型[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2007, 135(2): 23-26.
- Niu P Z, Huang P Y, Yao G W, et al. Fatigue accumulative damage model of rc beam strengthened with carbon fiber laminate [J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2007, 135(2): 23-26.

(编辑 胡 玲)