

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2014.02.007

## 径向基函数随机响应面法

胡常福<sup>1,2</sup>,任伟新<sup>1,3</sup>,刘旭政<sup>2</sup>

(1. 中南大学 土木工程学院,长沙 410075;2. 华东交通大学 土木建筑学院,南昌 330013;  
3. 合肥工业大学 土木与水利工程学院,合肥 230009)

**摘要:**针对随机响应面法对非正态分布响应与标准正态分布输入之间的复杂非线性隐函数拟合不够理想的问题,基于径向基函数在杂散数据拟合方面的优异性能,提出使用径向基函数替换 Hermite 多项式来解决复杂非线性隐函数拟合问题。以若干个非线性解析函数和钢管混凝土肋拱极限承载力不确定性问题作为算例,验证该方法对非正态分布响应拟合的精确性和对工程问题的适用性。算例结果表明,基于径向基函数随机响应面法对高度非线性的响应与输入隐函数拟合较好;在多参数钢管混凝土拱极限承载力不确定性问题中,精度较高,且比 Hermite 多项式样本点数量少。

**关键词:**随机响应面法;径向基函数;非正态分布响应;极限承载力;钢管混凝土拱  
**中图分类号:**U441 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2014)02-0042-06

## Stochastic Response Surface Method Based on Radial Basis Functions

Hu Changfu<sup>1,2</sup>, Ren Weixin<sup>1,3</sup>, Liu Xuzheng<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, P. R. China  
2. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, P. R. China  
3. School of Civil Engineering and Water Conservancy, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P. R. China)

**Abstract:** For non-ideal interpolation results of complex implicit nonlinear functions between non-normal distribution response and standard normal distribution inputs using stochastic response surface method, radial basis functions was used to replace Hermite polynomials so as to solve complex implicit nonlinear function interpolation problem for its excellent performance on scattered data interpolation. A few nonlinear analytical functions and uncertainty problems of the load carrying capacity of single circular concrete filled steel tubule (CFST) arch were used as examples to test and verify the precision of proposed method in non-normal distribution response interpolation and its engineering applicability. The results show that stochastic response surface method based on radial basis functions performs well in fitting highly nonlinear input implicit functions, and can achieve high precision on multi-parameters CFST arch load carrying capacity uncertainty problems. Meanwhile, the method has less sample points compared to the Hermite polynomials method.

**Key words:** stochastic response surface method; radial basis functions; non-normal distribution response; load carrying capacity; concrete filled steel tubule arch

收稿日期:2013-05-12

基金项目:国家自然科学基金(50678173,51278163);江西省教育厅项目(GJJ12325);铁路环境振动与噪声教育部工程研究中心资助项目

作者简介:胡常福(1980-),男,博士生,主要从事拱桥极限承载力研究,(E-mail)hcf@ecjtu.jx.cn。  
任伟新(通信作者),男,教授,博士生导师,(E-mail)renwx@hfut.edu.cn。

极限承载力表征着结构能承担的最大荷载,是描述结构抗力的重要指标。结构的几何参数、材料参数和初始缺陷等是影响极限承载力的主要参数,当这些参数具有不确定性时结构的极限承载力也具有不确定性。在结构极限承载力不确定性的分析方法中,蒙特卡洛有限元法 MCFEM(Monte Carlo Finite Element Method)<sup>[1]</sup>将一定分布的随机数作为确定性有限元模型的输入,经大量双重非线性数值计算和对输出结果的统计分析,得到极限承载力不确定性的统计特征。该方法精度高,被广泛认可为精确解,用于校核其他不确定性分析方法;由于 MCFEM 方法需进行大量非线性有限元运算,因而计算成本高。随机响应面法 SRSM(Stochastic Response Surface Method)<sup>[2]</sup>使用埃尔米特(Hermite)多项式拟合响应与参数之间的复杂隐函数关系,因而能够快速得到系统的响应,解决了计算成本问题,并在可靠度领域得到广泛的应用。文献[3]对响应面法和随机响应面法在结构可靠度分析中的应用进行了比较,发现后者具有较好的精度;文献[4]使用随机响应面法对可靠度灵敏度进行了分析;文献[5]在对结构疲劳开裂分析预测中使用了随机响应面法。为进一步拓展随机响应面法的应用范围,文献[6]提出基于高阶 Hermite 多项式的随机响应面法,用以解决非正态分布输出拟合及输入随机变量相关性问题;文献[7]基于 Nataf 变换解决了随机响应面法在相关的非正态分布随机变量输入情况下的应用;文献[8]提出最优概率配点法则,用以降低高维参数下随机响应面的试验次数;这些工作均是随机响应面法的进一步发展。

学者们通过对 Hermite 多项式研究后发现,当输出不是正态分布时 Hermite 多项式的收敛较慢<sup>[9]</sup>。这个缺陷使得对响应与参数为高度的非线性函数关系时,基于低阶 Hermite 多项式的随机响应面法拟合不够理想,而高阶 Hermite 多项式表达形式过于复杂不便于使用;基于 Hermit 多项式的随机响应面法使用  $p+1$  阶 Hermit 多项式根的组合作为试验的样本点,相当于  $p+1$  个因素  $p+1$  水平的全因子试验,在高维参数下试验次数急剧增多,计算效率大大降低,这一点在费时的钢管混凝土拱极限承载力不确定分析中尤为重要。本文基于径向基函数 RBF(Radial Basis Functions)在杂散数据拟合方面的优异性能,将其引入随机响应面法中替代 Hermite 多项式作为拟合函数,用以拓展随机响应面法在响应输入高度非线性隐函数关系中的应用。以几个非

线性解析函数和钢管混凝土肋拱极限承载力不确定性问题为例,验证本文方法对拟合非正态分布输出的精确性和对工程多维参数问题的适用性。

## 1 径向基函数随机响应面法

### 1.1 随机响应面法

随机响应面法是经典响应面法 RSM(Response Surface Method)的拓展,它将标准正态分布随机变量  $\xi$  作为系统的输入,采用如式(1)所示的 Hermite 多项式拟合系统响应与输入之间的隐函数关系<sup>[2]</sup>。

$$Y = a_0 + \sum_{i_1=1}^n a_{i_1} H_1(\xi_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} H_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \dots + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} \dots \sum_{i_p=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 \dots i_p} H_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_p}) \quad (1)$$

式中:  $Y$  为系统的响应;  $a_0, a_{i_1}, a_{i_1 i_2}, a_{i_1 i_2 \dots i_p}$  为待定系数;  $i_1, i_2, \dots, i_p$  取值为  $1, 2, \dots, n$ ;  $n$  为输入变量个数;  $H_1(\xi_{i_1})$ 、 $H_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2})$ 、 $H_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_p})$  为  $1, 2, \dots, p$  阶的 Hermite 多项式;  $p$  阶 Hermite 多项式如式(2)所示

$$H_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_p}) = (-1)^p e^{\frac{\xi^T \xi}{2}} \frac{d^p}{d\xi_{i_1} d\xi_{i_2} \dots d\xi_{i_p}} (e^{-\frac{\xi^T \xi}{2}}) \quad (2)$$

根据概率配点法则,选用  $p+1$  阶 Hermite 多项式根的组合作为试验的样本点,将样本点响应值代入式(1),组成关于未知系数的方程组,使用最小二乘法解出待定系数,即得到系统响应与输入随机变量复杂隐函数的显示表示。

以上分析均在标准正态空间中,因而需将其转换到参数原始空间。标准正态分布随机变量与常见分布随机变量的转换关系见文献[2],其中与正态分布随机变量转换关系如式(3)所示。

$$\begin{cases} \xi_{i_1} \rightarrow x_{i_1} = \mu_1 + \sigma_1 \xi_{i_1} \\ \xi_{i_2} \rightarrow x_{i_2} = \mu_2 + \sigma_2 \xi_{i_2} \\ \dots \\ \xi_{i_p} \rightarrow x_{i_p} = \mu_p + \sigma_p \xi_{i_p} \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $\mu$  为参数  $x$  的均值;  $\sigma$  为参数  $x$  的标准差;  $i_1, i_2, \dots, i_p$  为标准正态分布随机变量编号,取值为  $1, 2, \dots, n$ 。

### 1.2 径向基函数随机响应面法

径向基函数是一类以向量欧式范数为自变量的对称函数<sup>[10]</sup>,由径向基函数及其线性组合张成的函数空间可以逼近空间内任何函数<sup>[11]</sup>,当然也可以逼

近几乎任何强非线性函数。文献[12]提出了正定的紧支径向基函数 CSRBF (Compactly Supported Radial Basis Functions), 研究实践表明增广紧支径向基函数 ACSRBF (Augment Compactly Supported Radial Basis Functions) 对大多数函数逼近较好<sup>[13]</sup>。

针对解决响应与输入之间复杂非线性隐函数的拟合问题, 引入增广紧支径向基函数 ACSRBF 替代随机响应面中的 Hermite 多项式作为新型拟合函数, 此时随机响应面方程如式(4)所示

$$Y = f(\xi) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\|\xi - \xi_i\|) + \sum_{j=1}^p c_j g_j(\xi) \quad (4)$$

式中:  $\xi$  为标准正态分布随机变量;  $n$  为样本点数量;  $\lambda$  为径向基待定系数;  $\varphi$  为径向基函数;  $\|\xi - \xi_i\|$  为欧式范数;  $\xi_i$  为第  $i$  个样本空间向量;  $c$  为增广基待定系数;  $g(x)$  为增广基多项式函数;  $p$  为增广基多项式函数个数。

对  $n$  个样本点进行试验得到一组观测值  $\{Y, Y\}$ , 代入式(4)可得如式(5)所示的方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 \varphi(r_{11}) + \dots + \lambda_n \varphi(r_{1n}) + c_1 g_1(\xi_1) + \dots + c_p g_p(\xi_1) = y_1 \\ \lambda_1 \varphi(r_{21}) + \dots + \lambda_n \varphi(r_{2n}) + c_1 g_1(\xi_2) + \dots + c_p g_p(\xi_2) = y_2 \\ \dots \\ \lambda_1 \varphi(r_{m1}) + \dots + \lambda_n \varphi(r_{mn}) + c_1 g_1(\xi_m) + \dots + c_p g_p(\xi_m) = y_m \end{cases} \quad (5)$$

由增广紧支径向基函数正定条件<sup>[12]</sup>, 可得如式(6)所示的方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 g_1(\xi_1) + \dots + \lambda_n g_1(\xi_n) = 0 \\ \lambda_1 g_2(\xi_1) + \dots + \lambda_n g_2(\xi_n) = 0 \\ \dots \\ \lambda_1 g_p(\xi_1) + \dots + \lambda_n g_p(\xi_n) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

将方程组(5)、(6)合并为如式(7)所示  $n + p$  阶矩阵方程

$$\begin{pmatrix} \Phi & G \\ G^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中:  $\Phi_{i,j} = \varphi(r_{ij}) = \varphi(\|\xi_i - \xi_j\|)$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ ),  $G_{i,j} = g_j(\xi_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, p$ ),  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$ ,  $c = [c_1, c_2, \dots, c_p]^T$ ,  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 。求解方程(7)得到系数  $\lambda$  和  $c$ , 代入式(4)即可得到基于增广紧支径向基函数的随机响应面。

## 2 典型非线性解析函数检验

为检验增广紧支径向基随机响应面的适用性, 以式(8)所示的几个典型非线性解析函数为例, 验证在强非线性情况下本文方法的精确性。

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 \\ f_2(x) = \left(x_2 - \frac{5 \cdot 1x_1^2}{4\pi^2} + \frac{5x_1}{\pi} - 6\right)^2 + 20\left(1 - \frac{1}{8\pi}\right)\cos x_1 + 10 \\ f_3(x) = \frac{x_1^2}{4000} - 2\cos x_1 + 1 \\ f_4(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4000} - 2\cos x_1 \cos \frac{x_2}{\sqrt{2}} + 1 \\ f_5(x) = 0.5 + \frac{\sin^2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) - 0.5}{1 + 0.001(x_1^2 + x_2^2)} \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $f_1(x)$  为完全二阶多项式函数;  $f_2(x)$  为 Brainin rcos 函数;  $f_3(x)$  为一维 Griewank 函数;  $f_4(x)$  为二维 Griewank 函数;  $f_5(x)$  为 Schaffer 函数。这些函数取自文献[13-14], 并做了部分修改。使用二阶 Hermit 多项式随机响应面法(以下简称 Hermit 随机响应面法)、增广紧支径向基函数随机响应面法(以下简称 RBF 随机响应面法)拟合以上函数, 并与解析函数一起进行 1 万次蒙特卡洛计算以模拟其函数值的不确定性, 其中自变量的不确定性如表 1 所示。3 种方法的结果在响应统计值、概率密度曲线方面的比较, 如表 2 和图 1 所示。

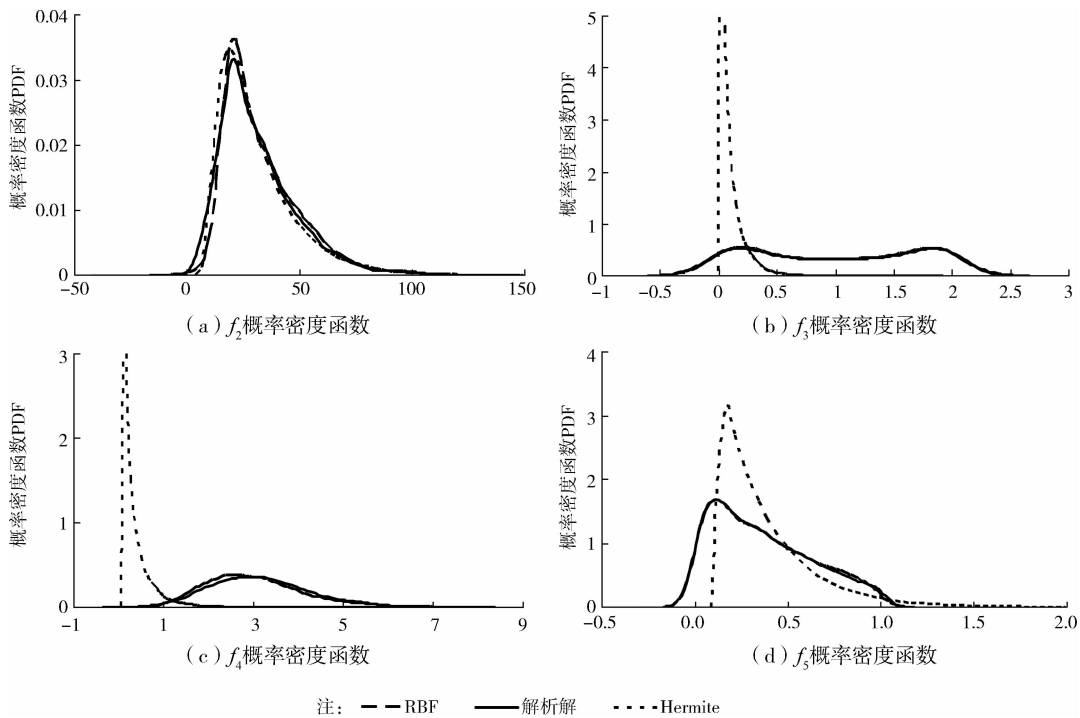
表 1 测试函数自变量的统计特征

函数	设计空间	样本点个数	自变量分布类型	变量均值	变量标准差
$f_1(x)$	$x_1: [-2, 2] \quad x_2: [-2, 2]$	36 (6 × 6)	正态分布	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$	$\sigma_1 = 0.4, \sigma_2 = 0.4$
$f_2(x)$	$x_1: [-5, 10] \quad x_2: [-10, 15]$	49 (7 × 7)	正态分布	$\mu_1 = 2.5, \mu_2 = 7.5$	$\sigma_1 = 1.5, \sigma_2 = 1.5$
$f_3(x)$	$x_1: [-20, 20]$	17	正态分布	$\mu_1 = 0$	$\sigma_1 = 4$
$f_4(x)$	$x_1: [-20, 20] \quad x_2: [-20, 20]$	289 (17 × 17)	正态分布	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$	$\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 4$
$f_5(x)$	$x_1: [-2, 2] \quad x_2: [-2, 2]$	225 (15 × 15)	正态分布	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$	$\sigma_1 = 0.4, \sigma_2 = 0.4$

表 2 测试函数的响应统计值比较

响应面模型	均值/解析函数均值					标准差/解析函数标准差				
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
解析函数	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
Hermit	1.000 0	0.985 9	0.070 9	0.344 4	1.068 0	1.000 0	1.017 0	0.141 9	0.685 2	0.993 1
RBF	0.995 2	1.050 6	0.999 8	0.963 6	0.997 1	0.952 5	0.984 0	0.982 2	0.976 6	0.987 7

注:表中 Hermit 为二阶 Hermit 多项式;RBF 为径向基函数,具体表达式见文献[8]。



注: ---RBF ————解析解 ·····Hermit

图 1 测试函数的概率密度比较

由表 2 可以看出,当函数非线性程度较小时如  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ , Hermit 多项式结果的均值相对误差最大值为 1.41%,标准差相对误差最大值为 1.70%,RBF 结果的均值相对误差最大值为 5.06%,标准差相对误差最大值为 4.75%,两者均满足工程精度要求;当函数非线性程度较高时如  $f_3(x)$ 、 $f_4(x)$ 、 $f_5(x)$ , Hermit 多项式结果的均值相对误差最大值为 92.91%,标准差相对误差最大值为 85.81%,RBF 结果的均值相对误差最大值为 3.64%,标准差相对误差最大值为 2.34%,表明 RBF 比 Hermit 多项式更适应于强非线性函数。由图 1 可以看出,在 4 个函数中,RBF 结果的概率密度曲线均与解析解曲线吻合较好,Hermit 多项式结果的概率密度曲线除  $f_2(x)$  外,均与解析解曲线相差较大。综合表 2 和图 1 可知,在响应与参数非线性程度较小时,Hermit 多项式与 RBF 均可作为拟合函数,且误差不大;当非线性程度较高时,Hermit 多项式结果与解析解相差较大,而 RBF 结果均与解析解吻合较好。

### 3 极限承载力不确定性问题检验

文献[15]对钢管混凝土单圆管肋拱进行了面内极限承载力试验,文献[16]基于钢管混凝土统一理论对此试验进行了数值模拟。本文以该数值模型作为研究钢管混凝土拱极限承载力不确定性问题的有限元模型,使用 Hermit 多项式随机响应面法、RBF 函数随机响应面法与 Monte Carlo 有限元法分别对该问题进行计算,并将三者结果进行比较用以检验本文方法在工程问题中的适用性。

影响钢管混凝土肋拱极限承载力不确定性的因素,主要有材料参数不确定性、截面参数不确定性和初始轴线偏差不确定性等,且参数基本为正态分布随机变量。本文选取钢材屈服强度  $f_y$ 、混凝土抗压强度标准值  $f_{ck}$ 、截面直径  $D$ 、钢管壁厚  $t$  与拱轴线面内偏差最大值(面内一阶反对称失稳模态)  $y_{0,L/4}$  共 5 个物理量作为极限承载力不确定性分析的输入,如表 3 所示。

表 3 输入随机变量统计特征

参数类型	参数名称	符号	设计值	分布类型	均值系数	变异系数
材料参数	钢材屈服强度	$f_y$	235 MPa	正态分布	1.08	0.08
	混凝土抗压强度	$f_{ck}$	20 MPa	正态分布	1.41	0.19
截面参数	钢管直径	$D$	76 mm	正态分布	1.00	0.05
	钢管壁厚	$t$	3.792 mm	正态分布	1.00	0.05
初始轴线偏差	面内轴线偏差	$\gamma_{0,L/A}$	$L/3\ 000$	正态分布	1.00	0.10

使用 Hermit 多项式随机响应面法、RBF 函数随机响应面法及 Monte Carlo 有限元法, 分别对确定性有限元模型的 2 参数 ( $f_y$ 、 $f_{ck}$ ) 随机工况、3 参数 ( $f_y$ 、 $f_{ck}$ 、 $D$ ) 随机工况、4 参数 ( $f_y$ 、 $f_{ck}$ 、 $D$ 、 $t$ ) 随机工况、5 参数 ( $f_y$ 、 $f_{ck}$ 、 $D$ 、 $t$ 、 $\gamma_{0,L/A}$ ) 随机工况的拱顶集中力作用下极限承载力的不确定性进行分析。其中 Hermit 多项式随机响应面法样本点为

三阶 Hermite 随机多项式根 ( $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ ) 的组合, 其样本点数量分别为  $3^2$ 、 $3^3$ 、 $3^4$ 、 $3^5$  个; RBF 函数随机响应面法的样本点采用中心复合设计法, 其样本点数量分别为  $2^2 + 5$ 、 $2^3 + 7$ 、 $2^4 + 9$ 、 $2^5 + 11$  个。Hermit 多项式及 RBF 函数随机响应面法结果与 1 万次 Monte Carlo 有限元法结果比较, 如表 4 和图 2 所示。

表 4 钢管混凝土肋拱极限承载力结果比较

方法简称	均值/MC-FEM 均值				标准差/MC-FEM 标准差			
	2 参数	3 参数	4 参数	5 参数	2 参数	3 参数	4 参数	5 参数
MC-FEM	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
Hermit	1.000 5	1.000 5	0.997 6	1.003 0	1.016 0	0.995 2	1.004 2	1.010 3
RBF	1.002 1	1.004 7	0.997 8	0.999 7	1.011 3	1.012 5	1.010 9	0.983 9

表中: MC-FEM 为蒙特卡洛有限元法。

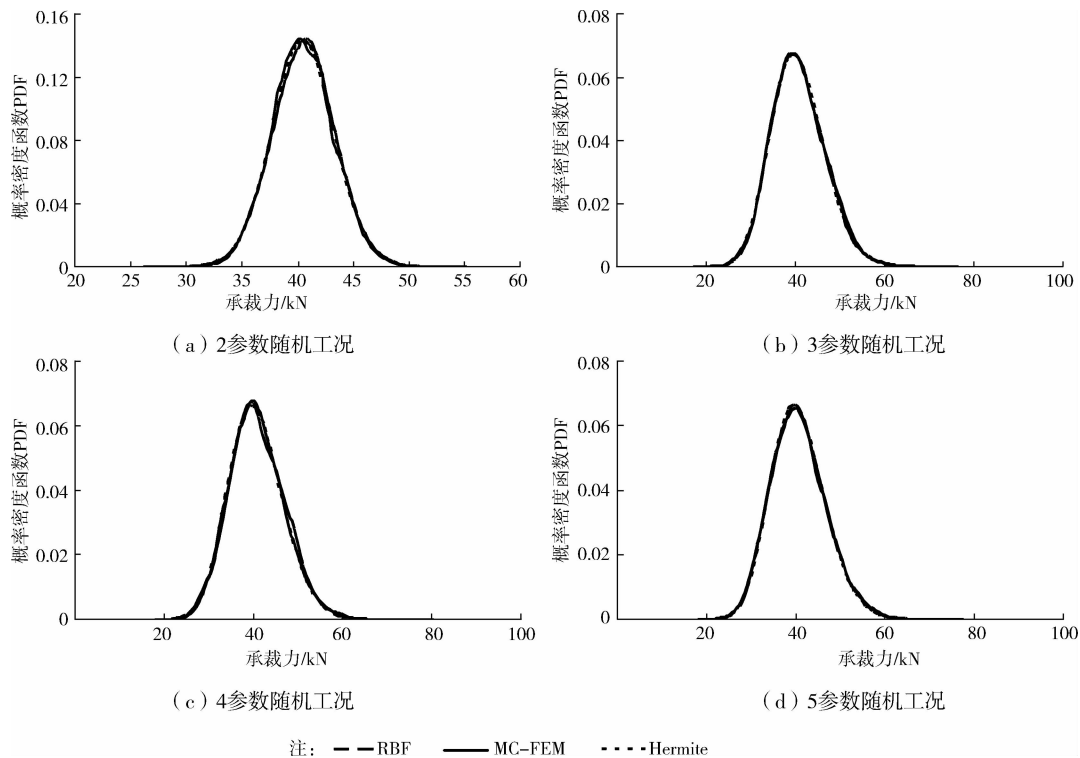


图 2 概率密度曲线比较

由表4可以看出,在2参数至5参数的各随机工况,使用 Hermit 多项式及 RBF 函数随机响应面法计算的钢管混凝土拱极限承载力不确定性与 Monte Carlo 有限元法结果相比,Hermit 多项式结果均值相对误差的最大值为 0.34%,标准差相对误差的最大值为 1.60%,RBF 函数结果均值相对误差的最大值为 0.47% 标准差相对误差的最大值为 1.61%,表明两者均具有较高的精度;由图2可以看出,在两参数至五参数的各随机工况,使用 Hermit 多项式及 RBF 函数随机响应面法计算的概率密度曲线与 Monte Carlo 有限元法结果均吻合较好;对4个工况计算结果的进一步分析结果表明,钢管混凝土拱极限承载力不确定性结果的统计分布不拒绝正态分布假设,所以 RBF 随机响应面结果不能比 Hermit 随机响应面结果精度更高,因大量研究实践表明后者在正态分布结果拟合方面具有很高的精度。在样本点数量方面,Hermit 多项式随机响应面法在五个随机工况下分别为  $3^2$ 、 $3^3$ 、 $3^4$ 、 $3^5$  个,而 RBF 函数随机响应面法样本点数量分别为  $2^2 + 5$ 、 $2^3 + 7$ 、 $2^4 + 9$ 、 $2^5 + 11$  个,分别为前者的 1.00、0.56、0.31、0.18 倍,呈现出随着参数维数的增加而样本点数量大量减少的规律。综合表4、图2和样本点分析可知,在输出为正态分布的多维参数不确定性工程问题中,RBF 函数随机响应面法与 Hermit 随机响应面法精度均较高,后者在具有较好精确性的同时,样本点数量大大减少,且随着参数维数的增加而减少越明显。

## 4 结论

基于径向基函数在杂散数据拟合方面的优异性能,将其引入随机响应面法中替代 Hermite 多项式作为拟合函数,用以解决响应与输入高度非线性复杂隐函数的拟合问题;通过对几个典型非线性解析函数和钢管混凝土拱极限承载力不确定性问题的检验,得到以下主要结论。

1) 基于径向基函数的随机响应面法,可用于非正态分布响应与标准正态分布输入之间复杂非线性隐函数的拟合问题。

2) 通过对几个典型强非线性解析函数不确定性的验算结果表明,径向基函数随机响应面法的响应统计特征值和概率密度曲线均与精确解吻合较好。

3) 在钢管混凝土拱极限承载力不确定性问题中,径向基函数随机响应面法结果与 Monte Carlo 有限元法结果在响应统计特征值和概率密度曲线方面均吻合较好,计算成本较传统 Monte Carlo 有限元法显著减少。

4) 对钢管混凝土拱极限承载力5个随机参数工况不确定性的分析结果表明,在输出为正态分布的工程问题中,径向基函数随机响应面法样本点数量比 Hermit 多项式随机响应面法大为减少,且随参数维数的增加而减少越明显。

5) 数学算例与钢管混凝土拱极限承载力不确定性算例表明,径向基函数随机响应面法在非正态分布与多参数正态分布响应拟合方面具有较好的优势,传统 Hermit 随机响应面在少参数的正态分布响应中应用结果较好。

## 参考文献:

- [1] 陈虬,刘先斌. 随机有限元法及其工程应用[M]. 成都:西南交通大学出版社,1993.
- [2] Isulapalli S S, Roy A, Georgopoulos P G. Stochastic response surface methods for uncertainty propagation: application to environmental and biological systems [J]. Risk Analysis, 1998, 18(3):351-363.
- [3] 蒋水华,李典庆,方国光. 结构可靠度分析的响应面法和随机响应面法的比较[J]. 武汉大学学报:工学版,2012, 45(1):46-53.  
Jiang S H, Li D Q, Fang G G. A comparative study of response surface method and stochastic response surface method for structural reliability analysis [J]. Engineering Journal of Wuhan University: Science Edition, 2012, 45(1):46-53.
- [4] 乔红威,吕震宙,赵新攀. 基于随机响应面法的可靠性灵敏度分析及可靠性优化设计[J]. 计算力学学报,2010, 27(2):207-212.  
Qiao H W, Lyu Z Z, Zhao X P. Reliability sensitivity analysis and reliability-based design optimization based on stochastic response surface method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2010, 27(2):207-212.
- [5] Riahi H, Bressollette P, Chateaufneuf A, et al. Reliability analysis and inspection updating by stochastic response surface of fatigue cracks in mixed mode [J]. Engineering Structures, 2011, 33: 3392-3401.
- [6] 胡冉,李典庆,周创兵,等. 基于随机响应面法的结构可靠度分析[J]. 工程力学,2010,27(9):192-199.  
Hu R, Li D Q, Zhou C B, et al. Structural reliability analysis using stochastic response surface method [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(9):192-199.
- [7] Li D Q, Chen Y F, Lu W B, et al. Stochastic response surface method for reliability analysis of rock slopes involving correlated non-normal variables [J]. Computers and Geotechnics, 2011, 38:58-68.

- [6] 李翠娟,童育强,刘明虎,等. 超大跨径 CFRP 主缆悬索桥合理结构体系研究[J]. 中国铁道科学, 2011, 32(1): 62-66.  
Li C J, Tong Y Q, Liu M H, et al. Study on the rational structure system for super large-span suspension bridge with CFRP main cables [J]. China Railway Science, 2011, 32(1): 62-66.
- [7] 齐玉军,冯鹏,叶列平. FRP 索与钢索的求解计算和极限跨度[J]. 土木建筑与环境工程, 2011, 33(4): 52-59.  
Qi Y J, Feng P, Ye L P. Comparison of theoretical solutions and ultimate span-length between FRP cables and steel cables [J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2011, 33(4): 52-59.
- [8] 马文刚,黄侨,梅葵花. 大跨径 CFRP 缆索悬索桥的静力特性的模拟分析[J]. 公路, 2011(12): 98-102.  
Ma W G, Huang Q, Mei K H. Model analysis of static performance for large-span suspension bridges with CFRP main cables [J]. Highway, 2011(12): 98-102.
- [9] Irvine H M. Cable Structures [M]. Cambridge(MA): MIT Press, 1981: 59-61.
- [10] Gimsing N J. Cable supported bridges concept and design [M]. John Wiley & Sons, 1983: 90-94.
- [11] Algirdas J, Arnoldas N. Displacement analysis of asymmetrically loaded cable [J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2004: 277-284.
- [12] 王喜军. 人行悬带桥的应用及受力特性分析[D]. 西安: 长安大学, 2006.
- [13] 李扬. 大跨度 CFRP 缆索悬索桥的静力性能[J]. 重庆大学学报, 2012, 35(8): 26-33.  
Li Y. Study on static mechanics of long span suspension bridge with CFRP cable [J]. Journal of Chongqing University, 2012, 35(8): 26-33.
- [14] 中华人民共和国行业标准. JTJ xxx-2002 公路悬索桥设计规范(报批版)[S]. 北京: 人民交通出版社, 2002.

(编辑 王秀玲)

(上接第 47 页)

- [8] 蒋水华,李典庆,周创兵. 随机响应面最优概率配点数目分析[J]. 计算力学学报, 2012, 29(3): 345-351.  
Jiang S H, Li D Q, Zhou C B. Optimal probabilistic collocation points for stochastic response surface method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2012, 29(3): 345-351.
- [9] Xiu D B, Karniadakis G E. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos [J]. Journal of Computational Physics, 2003, 187(1): 137-167.
- [10] 吴宗敏. 径向基函数、散乱数据拟合与无网格偏微分方程数值解[J]. 工程数学学报, 2002, 19(2): 1-12.  
Wu Z M. Radial basis function scattered data interpolation and the meshless method of numerical solution of PDEs [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2002, 19(2): 1-12.
- [11] Stein E M, Weiss G. Introduction to fourier analysis on euclidean spaces [M]. New Jersey: Princeton University Press, 1971.
- [12] Wu Z M. Compactly supported positive definite radial functions [J]. Advances in Computational Mathematics, 1995(4): 282-293.
- [13] Fang H B, Horstemeyer M F. Global response approximation with radial basis functions [J]. Engineering Optimization, 2006, 38(4): 407-424.
- [14] Wei X, Wu Y Z, Chen L P. A new sequential optimal sampling method for radial basis functions [J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218: 9635-9646.
- [15] 陈宝春,陈友杰. 钢管混凝土肋拱面内受力全过程试验研究[J]. 工程力学, 2000, 17(2): 44-50.  
Chen B C, Chen Y J. Experimental study on mechanic behaviors of concrete filled steel tubular arch under in-plane loads [J]. Engineering Mechanics, 2000, 17(2): 44-50.
- [16] 谢肖礼,赵国藩,邹存俊. 钢管混凝土拱桥肋拱面内极限承载力全过程计算机模拟[J]. 土木工程学报, 2004, 37(5): 54-58.  
Xie X L, Zhao G F, Zou C J. Computer simulation of the whole process for ultimate load of stability in the plane of ribbed arches of concrete filled steel tubular arch bridge [J]. China Civil Engineering Journal, 2004, 37(5): 54-58.

(编辑 王秀玲)