

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2014.03.004

## 饱和黏弹性土中单桩的纵向振动

高远<sup>1</sup>,侯宏伟<sup>2</sup>,程宇慧<sup>3</sup>

(1.浙江海洋学院 海运与港航建筑工程学院,浙江 舟山 316000;

2.浙江省建筑设计研究院有限公司,杭州 310012; 3.浙江大港桥梁科学研究院有限公司,杭州 310012)

**摘要:**基于Biot两相介质模型,在频率域内研究了简谐荷载作用下饱和黏弹性土中桩纵向耦合振动特性。借助Novak平面应变模型推导了饱和黏弹性土层的控制方程。将桩等效为一维杆件模型,建立了桩的振动方程。根据桩土连续性条件,求得了桩顶的动力刚度和动力阻尼。与Novak解进行了对比,并考察了长径比、流固相互作用系数、土骨架的阻尼比、桩土模量比等参数对饱和土桩系统纵向振动的影响。结果表明:单相和饱和黏弹性土中桩的动力特性存在一定差异;随着长径比的增加,动刚度因子和等效阻尼的共振效应明显减弱;而随着模量比的增加,共振效应和基频都有所增大;流固相互作用系数和土骨架的阻尼比影响相对较小。

**关键词:**岩土工程;饱和黏弹性土;耦合振动;Novak平面应变模型;参数研究

中图分类号:TU435 文献标志码:A 文章编号:1674-4764(2014)03-0018-06

## Longitudinal Vibrations of a Single Pile in Saturated Viscoelastic Soil

Gao Yuan<sup>1</sup>, Hou Hongwei<sup>2</sup>, Cheng Yuhui<sup>3</sup>

(1. School of Shipping and Port Construction Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316004, Zhejiang P. R. China;

2. Zhejiang Academy of Building Research & Design Co. Ltd, Hangzhou 310012, P. R. China;

3. Bridge Research Co. Ltd Zhejiang Dagang, Hangzhou 310012, P. R. China)

**Abstract:** Based on Biot's theory, the longitudinal vibrations of a single pile in saturated viscoelastic soil are investigated in the frequency domain subject to the harmonic load. By the Novak plane strain model, the control equations for the saturated viscoelastic soil are derived. Regarding the pile as the one-dimensional rod model, the vibration equation of the pile is established. Based on the continuity conditions of the pile and soil, the dynamic stiffness and dynamic damping of the pile top are obtained. It is compared with the solution for Novak, and the influence of different physical parameters of the pile and soil on the longitudinal vibrations of the soil and pile system is examined. It is shown that the dynamic characteristics of the pile in the dry soil as well as the saturated soil have some differences; the resonance effect of dynamic stiffness factor and equivalent damping is obvious weakening with the increase of the ratio of the length to radius of the pile. The resonance effect and natural frequency are increasing when the modulus ratio of the pile to soil increases; the interaction coefficient of the flow-solid and the damping ratio of soil skeleton have few influences on the responses.

**Key words:** geotechnical engineering; saturated viscoelastic soil; coupled vibration; Novak plane strain model; parameters study

---

收稿日期:2013-10-11

基金项目:浙江省公益技术应用研究计划(2013C33066);舟山市科技计划(2013C31045)

作者简介:高远(1987-),男,主要从事软土地基处理,桩基础等研究,(E-mail)gaoyuan288@Gmail.com。

侯宏伟(通信作者),高级工程师,(E-mail)hhw197991@hz.cn。

基桩的竖向振动理论在高层建筑物、动力基础、海岸结构等工程领域得到广泛运用。它在结构的抗震设计以及桩基动力检测等工作中具有十分现实的意义<sup>[1]</sup>。目前,关于单相理想土体中桩的振动特性研究已较为成熟。但这些研究与实际工程相差甚远,自然界中广泛分布的软黏土,以饱和土模型来研究更为合理。

为此,李强等<sup>[2]</sup>借助 Laplace 变换技术和位移势函数等数学手段得到了饱和土中端承桩顶的复刚度,并讨论了饱和土和桩参数对动态刚度和等效阻尼的影响。在此基础上,又建立了非完全黏结条件下饱和土中桩的竖向振动模型,并推导了相关频域和时域解析解<sup>[3]</sup>。Wang 等<sup>[4]</sup>借助 Hankel 变换对半空间饱和土中各种类型群桩的动力响应进行了研究,并考察了长径比等参数对群桩的轴向力和孔压的影响。Zhou 等<sup>[5]</sup>研究了半空间饱和土中桩的瞬态响应,利用 Fourier 变换技术得到了相关时域解。Cai 等<sup>[6]</sup>采用 Fourier-Bessel 方法研究了弹性波对饱和土中弹性排桩的散射问题,讨论了桩的刚度和土体渗透性系数的影响。刘林超和杨骁<sup>[7-8]</sup>采用多孔介质理论在三维坐标下研究了饱和黏弹性土中一维弹性桩的纵向振动特性。Yang 等<sup>[9]</sup>将桩等效为三维均匀弹性介质,研究了竖向简谐荷载作用下饱和黏弹性土层中端承桩的纵向振动特性,分析了桩土参数对动刚度和等效阻尼的影响。杨冬英等<sup>[10]</sup>研究了三维非均质土中变截面黏弹性桩的纵向耦合振动。然而,上述都采用三维模型来研究饱和土中桩的振动特性。由于三维模型的偏微分方程较为复杂,必须借助各种数学手段对此进行求解,从而导致该模型难以被工程设计人员所接受。因此,Novak 等<sup>[11-13]</sup>建立的平面应变模型及其演化形式得到了广泛应用。尚守平等<sup>[14-15]</sup>将 Novak 薄层法应用于饱和土中桩的水平振动研究中,并讨论了渗透系数、桩土模量比等对单桩水平、摇摆及水平-摇摆耦合振动阻抗的影响。

鉴于现状,本文将土体和桩分别视为液固两相耦合介质和一维弹性杆件模型,采用 Novak 平面应变模型,并根据桩土连续性条件,求解得到了饱和黏弹性土中桩顶的复刚度。在此基础上,与 Novak 解进行了对比,同时讨论了桩土各参数对桩顶动态刚度和等效阻尼的影响。

## 1 数学模型

### 1.1 三维数学模型

如图 1 所示,厚度为  $H$  的饱和黏弹性土中有一半径为  $R$  的端承桩。其上部作用一圆频率为  $\omega$  的简

谐激振力  $P(t) = Pe^{i\omega t}$  ( $i = \sqrt{-1}$ )。桩周土对桩身单位侧摩擦阻力为  $f(z)$ 。土体的总密度和剪切模量分别为  $\rho^T$  和  $G^S$ 。将桩周土视为饱和液固两相耦合介质且考虑土骨架的黏性。桩土系统稳态振动为小变形,且完全紧密接触,无相对滑移,即桩土界面处满足位移和应力连续。桩底部为刚性地基;桩等效为一维圆形弹性杆件模型。

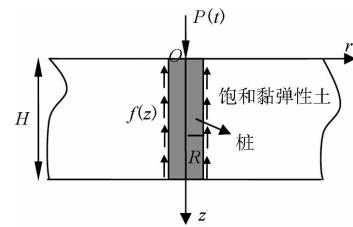


图 1 三维端承桩计算模型

对于三维轴对称问题,根据 Biot 理论,土体在动力荷载作用下的运动方程为<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned} \mu^S \nabla^2 u_r^S + (\lambda_c + \mu^S) \frac{\partial e}{\partial r} - \mu^S \frac{u_r^S}{r^2} - \alpha M \frac{\partial \zeta}{\partial r} &= \rho^T \\ \frac{\partial^2 u_r^S}{\partial t^2} + \rho^F \frac{\partial^2 w_r^F}{\partial t^2} &= (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^S \nabla^2 u_z^S + (\lambda_c + \mu^S) \frac{\partial e}{\partial z} - \alpha M \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \rho^T \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial t^2} + \rho^F \\ \frac{\partial^2 w_z^F}{\partial t^2} &= (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha M \frac{\partial e}{\partial r} - M \frac{\partial \zeta}{\partial r} &= \rho^F \frac{\partial^2 u_r^S}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w_r^F}{\partial t^2} + b \frac{\partial w_r^F}{\partial t} \\ &= (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha M \frac{\partial e}{\partial z} - M \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \rho^F \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w_z^F}{\partial t^2} + b \frac{\partial w_z^F}{\partial t} \\ &= (4) \end{aligned}$$

式中:  $e = \frac{\partial u_r^S}{\partial r} + \frac{u_r^S}{r} + \frac{\partial u_z^S}{\partial z}$ ;  $\zeta = -(\frac{\partial w_r^F}{\partial r} + \frac{w_r^F}{r} + \frac{\partial w_z^F}{\partial z})$ ;  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ;  $u^S$  和  $w^F$  分别表示土骨架位移和流体相对于固相的位移;  $m = \frac{\rho^F}{n}$ ,  $n$  为孔隙率;  $b = \frac{\eta_0}{k}$  为土骨架与孔隙流体的相互作用系数;  $\eta_0$  为流体黏滞系数;  $k$  为渗透系数;  $\rho^F$ ;  $\rho^S$  分别为流体和土颗粒的材料密度;  $\rho^T = (1-n)\rho^S + n\rho^F$ ;  $\lambda_c = \lambda^S + \alpha^2 m$ ;  $\lambda^S = \frac{2v^S \mu^S}{(1-2v^S)}$  和  $\mu^S = G^S(1+2\xi^S i)$  为土骨架的拉梅常数;  $\alpha$ 、 $M$  为表征土颗粒及流体压缩性的系数。

### 1.2 平面应变模型

采用 Novak 平面应变模型来解决饱和黏弹性土体的纵向振动问题时,建立如图 2 计算模型。假

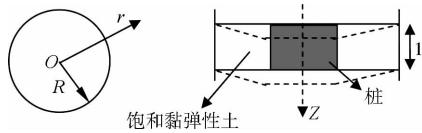


图2 平面应变计算模型

设桩周土不产生径向和切向位移,且纵向振动位移与坐标 $Z$ 无关,即满足如下关系:

$$\begin{aligned} u_r^S &= 0, w_r^F = 0, \frac{\partial u_r^S}{\partial r} = \frac{\partial u_r^S}{\partial z} = \frac{\partial u_z^S}{\partial z} = 0, \frac{\partial w_r^F}{\partial r} = \\ \frac{\partial w_r^F}{\partial z} &= \frac{\partial w_z^F}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

## 2 饱和黏弹性土层纵向振动

利用平面应变假设条件式(5),式(1)~(4)可简化为

$$G^S(1+2\xi^S i)\left(\frac{\partial^2 u_z^S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^S}{\partial r}\right) = \rho^T \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial t^2} + \rho^F \frac{\partial^2 w_z^F}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\rho^F \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial t^2} + \frac{\rho^F}{n} \frac{\partial^2 w_z^F}{\partial t^2} + b \frac{\partial w_z^F}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

对于稳态振动,设 $u_z^S = RU_z^S e^{i\omega t}$ , $w_z^F = RW_z^F e^{i\omega t}$ ,并引入如下无量纲量和常数:

$$\eta = \frac{r}{R}, \delta = \frac{z}{R}, \bar{b} = \frac{bR}{\sqrt{\rho^T G^S}}, \rho^{FT} = \frac{\rho^F}{\rho^T}, \lambda = \frac{R\omega}{V^S},$$

$$V^S = \sqrt{\frac{G^S}{\rho^T}} \quad (8)$$

式中 $V^S$ 为剪切波速。

利用式(10),式(6)、(7)可化为:

$$(1+2\xi^S i)\left(\frac{d^2 U_z^S}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dU_z^S}{d\eta}\right) + \lambda^2 U_z^S + \rho^{FT} \lambda^2 W_z^F = 0 \quad (9)$$

$$-\rho^{FT} \lambda^2 U_z^S - \frac{\rho^{FT} \lambda^2}{n} W_z^F + \bar{b} i \lambda W_z^F = 0 \quad (10)$$

将式(10)代入式(9),可得

$$\frac{d^2 U_z^S}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dU_z^S}{d\eta} - q^2 U_z^S = 0 \quad (11)$$

$$\text{式中: } q^2 = -\frac{a}{1+2\xi^S i}, a = \lambda^2 + \frac{(\rho^{FT})^2 \lambda^4}{\bar{b} i \lambda - \frac{\rho^{FT} \lambda^2}{n}}.$$

式(15)可易解得:

$$U_z^S = AK_0(q\eta) + BI_0(q\eta) \quad (12)$$

式中: $A, B$ 为待定系数; $K_0(x), I_0(x)$ 为第1类和第2类零阶虚宗量贝塞尔函数。

根据贝塞尔函数的性质,当 $r$ 很大时,有

$$I_0(qr) \rightarrow (2\pi qr)^{-\frac{1}{2}} \exp(qr) \quad (13)$$

$$K_0(qr) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}qr\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-qr) \quad (14)$$

于是,式(12)中, $B = 0$ ,即

$$U_z^S = AK_0(q\eta) \quad (15)$$

利用式(15),土体的无量纲剪应力为

$$T_{rz} = (1+2\xi^S i) \frac{dU_z^S}{d\eta} = -(1+2\xi^S i) A q K_1(q\eta) \quad (16)$$

因此,在 $\eta = 1$ 处的剪应力为

$$T_{rz} = -(1+2\xi^S i) A q K_1(q) \quad (17)$$

## 3 端承桩纵向振动

将桩等效为一维弹性 Euler 杆件处理;在动力荷载下桩竖向振动的运动方程为

$$E_b \pi R^2 \frac{d^2 w_b}{dz^2} - 2\pi R f(z) = \rho_b \pi R^2 \frac{d^2 w_b}{dt^2} \quad (18)$$

其中, $f(z) = -\tau_{rz}$

对于稳态振动,记桩的竖向位移为 $w_b = RW_b e^{i\omega t}$ ,则式(18)可化为

$$E_b^* \frac{d^2 W_b}{d\delta^2} - 2(1+2\xi^S i) A q K_1(q) + \rho_b^* \lambda^2 W_b = 0 \quad (19)$$

$$\text{式中: } E_b^* = \frac{E_b}{G^S}, \rho_b^* = \frac{\rho_b}{\rho^T}$$

根据桩土界面处连续性条件,可知:

$$W_b = U_z^S |_{\eta=1} = AK_0(q) \quad (20)$$

利用式(20),式(19)可化为

$$\frac{d^2 W_b}{d\delta^2} - \beta^2 W_b = 0 \quad (21)$$

式(21)解得:

$$W_b = C_5 e^{\beta\delta} + C_6 e^{-\beta\delta} \quad (22)$$

式中: $C_5, C_6$ 为待定系数。

假定初始时刻桩土系统静止,且满足无量纲后的边界条件:

$$W_b |_{\delta=\theta} = 0, \frac{dW_b}{d\delta} |_{\delta=0} = \frac{P^*}{E_b^*} \quad (23)$$

$$\text{式中: } P^* = \frac{P}{G^S \pi R^2}, \theta = H/R$$

结合边界条件式(23),求得待定系数 $C_5, C_6$ 的具体表达式后,可得:

$$W_b = \frac{P^* e^{-2\beta\theta}}{E_b^* \beta(e^{-2\beta\theta} + 1)} e^{\beta\delta} - \frac{P^*}{E_b^* \beta(e^{-2\beta\theta} + 1)} e^{-\beta\delta} \quad (24)$$

因此,无量纲动力复刚度为:

$$\bar{K}_d = \frac{P^*}{W_b(0)} = \frac{E_b^* \beta(e^{-2\beta\theta} + 1)}{1 - e^{-2\beta\theta}} \quad (25)$$

## 4 与已有解析解对比分析

Novak<sup>[10]</sup>研究了单相黏弹性土中端承桩的纵向振动特性。将本文计算结果中令流体密度  $\rho^F = 0$ , 此时  $n = 0, \bar{b} = 0, a = \lambda^2$ , 即可退化为 Novak 的结果。为了验证结果的正确性, 与 Novak 解进行了对比。据文献[2,11], 参数取值:  $n = 0.4, \theta = 20, v^S = 0.35, \xi^S = 0.1, \bar{b} = 10$  桩顶复刚度的实部代表桩的动刚度, 虚部为动阻尼, 采用动刚度因子  $ReK/K_0$  ( $K_0$  为静刚度) 替代桩的动刚度, 等效黏土阻尼  $lmK/\lambda$  代替动阻尼。图 3 给出了在  $0 < \lambda < 20$  的频率范围内文献[11]、本文及饱和弹性土中桩顶的复刚度随频率的变化曲线。可见, 在稳态振动时, 饱和弹性土中桩顶动态刚度和等效阻尼的振荡幅度最大, 随着阻尼比  $\xi^S$  的增加, 而略有减小; Novak 得到的单相黏弹性介质中桩的复刚度较小。这是因为孔隙中存在流体, 流体和土骨架相互作用所导致的, 但文献[2]得到的饱和土中桩的振动特性与单相中桩的振动特性差异较大, 这是由于本文采用的 Novak 薄层法忽略了孔隙水压力的影响。文献[14]忽略水的惯性效应, 研究了饱和土中桩的水平振动特性。图 4 比较了有无惯性效应时饱和黏弹性中桩顶复刚度的差异。可见, 在低频条件下两种情况时桩顶复刚度几乎一致, 但随着频率的增加, 考虑水惯性效应的饱和黏弹性土中桩顶复刚度明显要大。

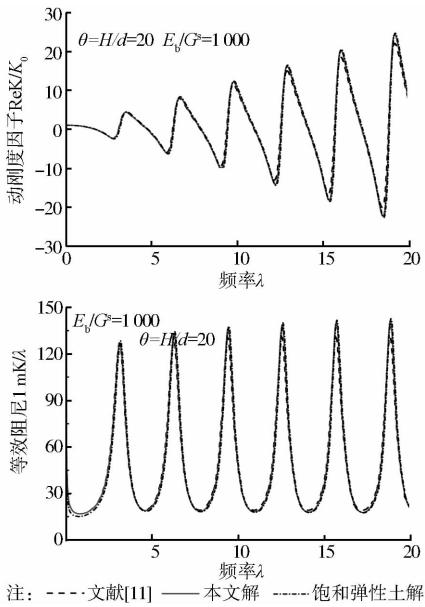


图 3 本文解、Novak 解桩顶复刚度的对比分析

## 5 数值结果分析

考察了长径比  $H/d$ 、桩土模量比  $E_b/G^S$ 、流固

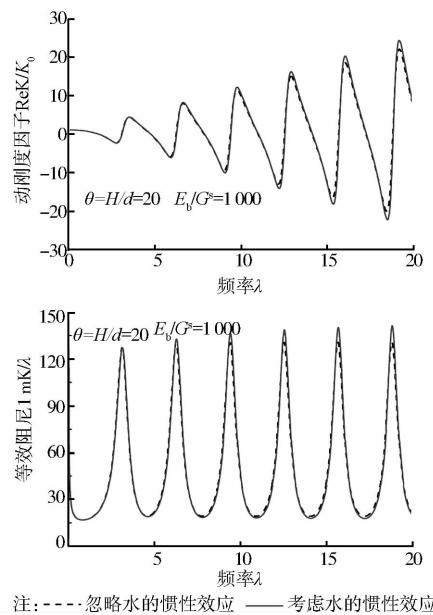


图 4 有无水惯性效应时桩顶复刚度的对比分析

相互作用系数  $\bar{b}$ 、材料密度比  $\rho_b/\rho^T$ 、阻尼比  $\xi^S$  对饱和黏弹性土中桩顶复刚度的影响。图 5 表示桩的长径比变化对桩顶复刚度的影响曲线。其余参数仍按上述取值, 可见, 随着长径比的增加, 动态刚度和等效阻尼的振幅和波长都明显减小, 且对于大直径端承桩而言, 动刚度因子和等效阻尼在基频处明显存在共振现象。随着频率的增加, 动刚度因子的振幅逐渐增大, 而等效阻尼的振幅不变。

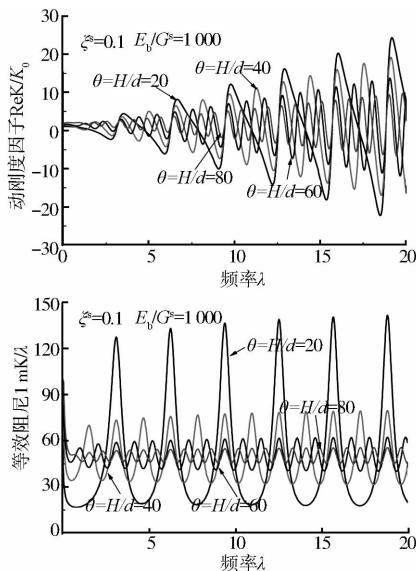


图 5 长径比对桩顶复刚度的影响

图 6 反映了桩顶动态刚度因子与等效阻尼在 3 种不同模量比的条件下的影响曲线。其余参数按上述取值, 随着模量比的增加, 动刚度因子和等效阻尼的振荡幅度和波长都有所增大, 而当模量比

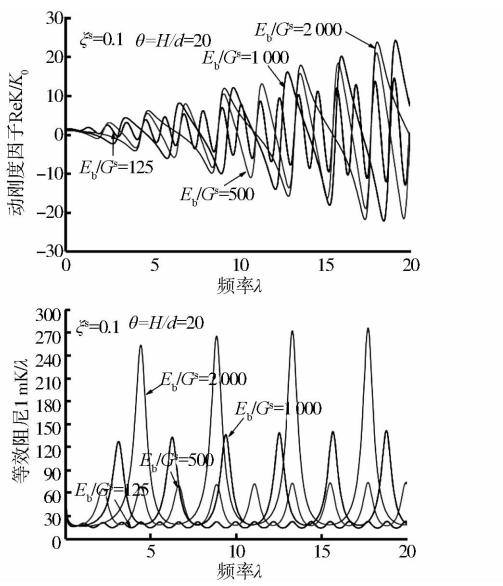


图 6 模量比对桩顶复刚度的影响

$E_b/G^s > 1000$  时对动态刚度影响较小。这里表明：桩周土越软，振幅和基频也相应增大。

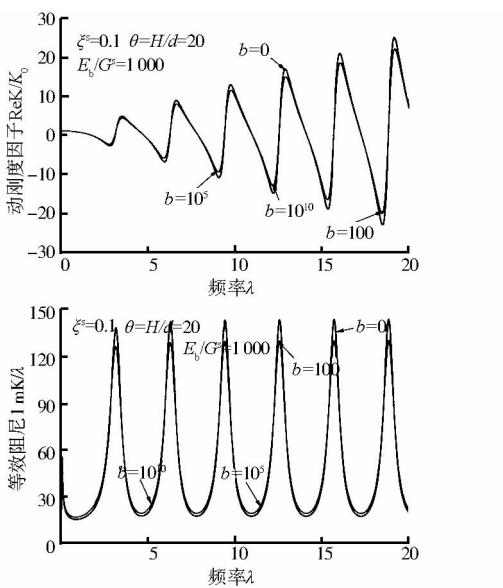


图 7 流固相互作用系数对桩顶复刚度的影响

图 7 表示改变液固相互作用系数对桩顶动刚度因子和等效阻尼的影响，按上述参数取值。可见，随着  $\bar{b}$  的增加，动刚度因子和动阻尼的振幅都有所减小。这是因为  $\bar{b}$  增大时，土体的渗透性降低所导致的。当  $\bar{b}$  为无穷大时，饱和黏弹性土体处于封闭状态，而引起土体的阻抗减小。

图 8 反映桩材料密度和土体总密度的比值对动刚度因子和等效阻尼的影响。其余参数按上述取值。可见，材料密度比对动刚度和动阻尼有很大影响。随着材料密度比的增大，桩顶复刚度的振幅逐

渐增大，共振效应明显增强。

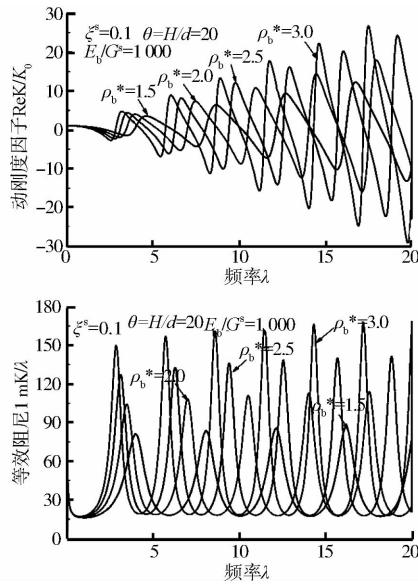


图 8 材料密度比对桩顶复刚度的影响

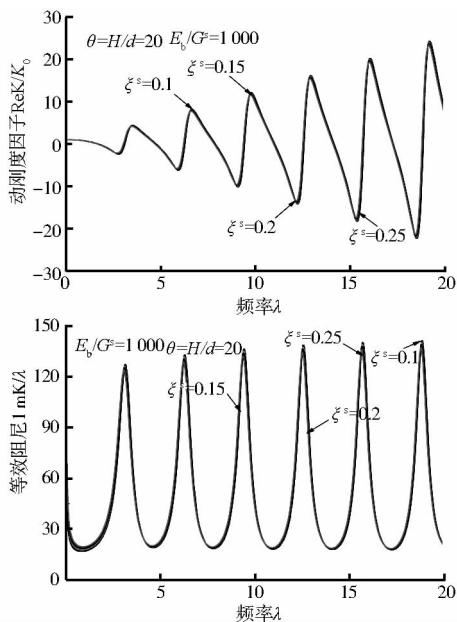


图 9 阻尼比对桩顶复刚度的影响

图 9 反映土骨架的阻尼比对桩顶动态刚度因子与等效阻尼的影响。仍按上述参数取值，可见，随着阻尼比的增大，动刚度和动阻尼略有减小，但阻尼比对桩顶复刚度影响较弱。

## 6 结 论

在频率域内研究了周期荷载作用下饱和黏弹性土中端承桩纵向耦合振动特性。得到如下结论：

- 1) 随着长径比的增加，饱和黏弹性土中桩顶复刚度的振幅和波长都明显减小，且对于大直径端承

桩而言,动刚度因子和等效阻尼在基频处明显存在共振现象。

2)随着桩土模量比的增加,动刚度因子和等效阻尼的振荡幅度和波长都有所增大,而当模量比增大到一定程度时对动态刚度影响较小。

3)随着液固相互作用系数 $\bar{b}$ 的增加,土体的渗透性降低,动刚度因子和动阻尼的振幅都略有减小。

4)随着桩土材料密度比的增加,桩顶复刚度的振幅逐渐增大,共振效应明显增强。

#### 参考文献:

- [1] 李强,王奎华. 饱和土中桩竖向耦合振动理论与应用 [M]. 北京:中国水利水电出版社, 2010: 1-14.
- [2] 李强,王奎华,谢康和. 饱和土中端承桩纵向振动特性研究[J]. 力学学报, 2004, 36(4): 435-442.  
Li Q, Wang K H, Xie K H. Vertical vibration of an end bearing pile embedded in saturated soil [J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(4): 435-442.
- [3] 李强. 饱和土中端承桩非完全黏结下的竖向振动特性[J]. 水利学报, 2007, 38(3): 349-354.  
Li Q. Vertical vibration of piles embedded in saturated soil considering the imperfect contact [J]. Shuili Xue bao. 2007, 38(3): 349-354.
- [4] Wang J H, Zhou X L, Lu J F. Dynamic response of pile groups embedded in a poroelastic medium [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003, 23(3): 53-60.
- [5] Zhou X L, Wang J H, Jiang L F, et al. Transient dynamic response of pile to vertical load in saturated soil [J]. Mechanics Research Communications, 2009, 36: 618-624.
- [6] Cai Y Q, Ding G Y, Xu C J. Amplitude reduction of elastic waves by a row of piles in poroelastic soil [J]. Computers and Geotechnics, 2009, 36(): 463-473.
- [7] 刘林超,杨晓. 基于多孔介质理论的饱和土-桩纵向耦合振动研究[J]. 土木工程学报, 2009, 42(9): 89-95.  
Liu L C, Yang X. Study of vertical coupled vibrations of piles in saturated soils using porous medium theory [J]. China Civil Engineering Journal, 2009, 42(9): 89-95.
- [8] 刘林超,杨晓. 分数导数模型描述的饱和土桩纵向振动分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(2): 526-532.  
Liu L C, Yang X. Analysis of vertical vibrations of a pile in saturated soil described by fractional derivative model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(2): 526-532.
- [9] Yang X, Pan Y. Axisymmetrical analytical solution for vertical vibration of end-bearing pile in saturated viscoelastic soil layer [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(2): 193-204.
- [10] 杨冬英,王奎华,丁海平. 三维非均质土中粘弹性桩-土纵向耦合振动响应[J]. 土木建筑与环境工程, 2011, 33(3): 80-87.  
Yang D Y, Wang K H, Ding H P. Axial response of viscoelastic pile-soil coupling interaction in three-dimensional inhomogeneous soil [J]. Journal of Civil, Architectural and Environmental Engineering, 2011, 33(3): 80-87.
- [11] Novak M. Dynamic stiffness and damping of pile [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1974, 11(4): 574-598.
- [12] Novak M, Nogami T. Soil-pile interaction in horizontal vibration [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1977, 5(3): 263-281.
- [13] Novak M, Aboul E F. Impedance of functions of piles in layered media [J]. Journal of Engineering Mechanical Division, 1978, 104(3): 643-661.
- [14] 尚守平,余俊,王海东,等. 饱和土中桩水平振动分析[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(11): 1696-1702.  
Shang S P, Yu J, Wang H D, et al. Horizontal vibration of piles in saturated soil [J]. Chinese of Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29 (11): 1696-1702.
- [15] 刘林超,杨晓. 基于多孔介质理论的饱和土中桩基水平振动研究[J]. 土木工程学报, 2010, 43(5): 96-103.  
Liu L C, Yang X, et al. A porous medium theory study of lateral vibration of piles in saturated soil [J]. China Civil Engineering Journal, 2010, 43(5): 93-103.
- [16] Maeso O, Aznarez J J, Garcia F. Dynamic impedances of piles and groups of piles in saturated soils [J]. Computers and Structures, 2005, 83(10/11): 769-782.

(编辑 胡玲)