

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2014.03.007

## 巷道围岩应力空间分布仿真分析

唐治<sup>a</sup>, 潘一山<sup>a</sup>, 李忠华<sup>a</sup>, 王丽<sup>b</sup>

(辽宁工程技术大学 a. 力学与工程学院; b. 机械工程学院, 辽宁 阜新 123000)

**摘要:**为得出巷道围岩应力空间分布特征,以圆形断面巷道为例,采用复变函数方法得出其应力解,并把映射空间解转化为巷道所在空间解后对巷道周围岩体应力场进行仿真分析,得出了巷道周围岩体应力场分布直观图,可方便直观的了解巷道围岩任意位置应力分布情况。并考虑不同半径、不同侧压系数对围岩应力场的影响,得出了:圆形巷道围岩应力峰值及其出现方向与半径无关;侧压系数小于1/3时,顶底板开始产生拉应力,大于3时两帮围岩开始产生拉应力;以及环向、径向、剪切应力及最大、最小应力的变化规律。

**关键词:**圆形巷道;复变函数;应力空间分布;计算仿真

**中图分类号:**U451 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2014)03-0037-07

## Simulation Analysis of Spatial Distribution of Roadway's Surrounding Rock Stress

Tang Zhi<sup>a</sup>, Pan Yishan<sup>a</sup>, Li Zhonghua<sup>a</sup>, Wang Li<sup>b</sup>

(a. School of Mechanics and Engineering;

b. College of Mechanical Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, Liaoning, P. R. China)

**Abstract:** To get the spatial distribution characteristic of roadway's surrounding rock stress, circular section roadway was taken as a case study. The solution of stress was got by using complex function method, and roadway's surrounding rock stress field was analysed after the solution of mapping space was transformed into the solution of roadway space. As a result, the visual diagram of stress field distribution of roadway's surrounding rock was obtained, which could describe intuitively stress distribution of roadway's surrounding rock at any position. Considering the influence of different radius and side pressure coefficients on surrounding rock stress field, the following conclusions have been obtained: the peak value and direction of circular roadway's surrounding rock stress has nothing to do with the radius; when side pressure coefficient is less than 1/3, the roof can produce tensile stress; when side pressure coefficient is more than 3, the surrounding rock in two sides can produce tensile stress. And the change rule of hoop stress, radial stress, shear stress and the maximum and minimum of stress have also been generated.

**Key words:** circular roadway; complex function; spatial distribution of stress; computational simulation

随煤矿采深不断增加,巷道围岩稳定性在煤矿开采工程中越来越重要,巷道围岩应力分布特征是研究围岩稳定性和安全性的基础,目前针对巷道围岩应力分布的研究方法主要有井下现场观测、实验室实验、

数值模拟和理论研究等。巷道围岩应力理论解析虽然对问题进行了简化,但对解析结果分析得出的规律性认识对研究围岩应力分布有重要意义,为此,众多学者展开了大量研究,且取得了不少成果<sup>[1-4]</sup>。

收稿日期:2013-09-30

基金项目:国家重点基础研究发展计划(973计划)(2010CB226803);国家自然科学基金(11172121、51174107)

作者简介:唐治(1983-),男,博士生,主要从事矿山灾害力学研究,(E-mail)tangzhi0127@163.com。

对圆形和椭圆形断面巷道用 Cauchy 积分法或幂级数法均可求得解析函数<sup>[5-7]</sup>,用这两种方法对复杂断面则不易求解。复变函数被引入平面弹性问题后能得出复杂断面应力解析解<sup>[8-10]</sup>,现阶段对映射函数的研究相对成熟<sup>[11-13]</sup>。王润富<sup>[14]</sup>、刘金高等<sup>[15]</sup>利用复变函数法对马蹄形和梯形孔口的应力进行分析,汤澄波等<sup>[16]</sup>利用复变函数法对高地应力区天幕线拱形洞室断面围岩应力解析,但均得出隐函数解析式。赵凯等<sup>[17]</sup>为简化计算,利用多角形法得出映射函数且只取 3 项映射函数求解了矩形洞室围岩应力。祝江鸿<sup>[18]</sup>用复变函数求出了表示任意断面围岩应力的两个解析函数通式。吕爱钟等<sup>[19-20]</sup>、张路青等<sup>[21]</sup>将被积函数用一个新的级数来代替进行解析。

然而这些研究一般只给出映射空间应力表达式,或只对巷道边界应力分布进行分析,对巷道周围不同位置岩体的受力情况缺乏全面深入直观的了解。所以,以圆形巷道为例,采用复变函数方法得出其应力解,并把映射空间解转化为巷道所在空间解,对巷道周围岩体应力场进行仿真分析,可以方便直观的了解巷道围岩任意位置应力分布情况,并考虑不同半径、不同侧压系数对应力场的影响。

## 1 巷道围岩弹性应力解析

### 1.1 模型建立

根据复变函数和平面弹性力学理论可知,复变函数可对复杂孔口平面问题求解。所以,以最简单的圆形巷道为例来阐述巷道围岩应力场的复变函数解法。圆形断面巷道计算模型如图 1 所示,设圆形巷道半径为  $r_0$ 。模型无支护阻力,不计体力,远场铅垂应力为  $\sigma_v$ ,水平应力为  $\sigma_h = k\sigma_v$ , $k$  为侧压系数。

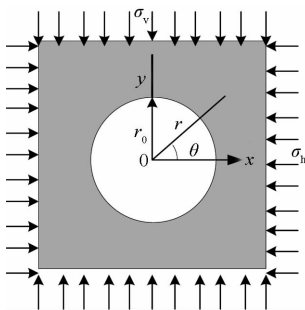


图 1 巷道分析模型

### 1.2 公式推导

以圆形巷道中心为原点,建立直角坐标系,采用无限大弹性体单孔口问题的一般变换函数形式  $z = \omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=0}^n c_k \zeta^k\right)$  把围岩在  $z$  平面上(即  $xy$  面

上)所占的区域变换为平面上的所谓“中心单位圆”上(它的圆心在坐标原点=0,而半径等于 1)。在大多数情况下,级数中只须取很少几项就足够精确,因是计算最简单的圆形巷道<sup>[22]</sup>,所以取  $n = 0, c_0 = 0, R$  为实数,则可得出保角变换公式为  $z = \frac{R}{\zeta}$ 。

圆形断面巷道围岩应力公式推导思路如下:

第 1 步:将  $z = x + iy, \zeta = \rho e^{i\varphi}$  代入保角变换公式可得出

$$x^2 + y^2 = (R/\rho)^2 \quad (1)$$

$\rho = 1$  时对应  $z$  平面上圆形巷道边界,即  $r = r_0$ ,所以  $R = r_0$ ,得保角变换公式为

$$z = \omega(\zeta) = r_0/\zeta \quad (2)$$

在  $z$  平面上角度以顺时针为正,在  $\zeta$  平面上角度以逆时针为正。

由式(2)可得:  $\omega(\zeta), \omega'(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}, \overline{\omega'(\zeta)}, \omega(\zeta)/\omega'(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}/\overline{\omega'(\zeta)}, \omega(\sigma), \omega'(\sigma), \overline{\omega(\sigma)}, \overline{\omega'(\sigma)}, \omega(\sigma)/\omega'(\sigma), \overline{\omega(\sigma)}/\overline{\omega'(\sigma)}$ 。

第 2 步:远场铅垂应力为  $\sigma_v$ 、水平应力为  $\sigma_h = k\sigma_v, X_s, Y_s$  分别为外力在巷道边界处的水平方向力、垂直方向力;  $P_x, P_y$  分别为巷道边界处的水平方向边界力、垂直方向边界力。因无支护阻力,所以  $X_s = Y_s = 0, P_x = P_y = 0$ ,则可确定边界条件  $f_0$ 。

$$f_0 = -r_0\sigma_v[(1+k)/\sigma + (1-k)\sigma]/2 \quad (3)$$

$$\overline{f_0} = -r_0\sigma_v[(1+k)\sigma + (1-k)/\sigma]/2 \quad (4)$$

第 3 步:把  $\varphi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \zeta^k, \varphi'_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k \zeta^{k-1}$

及式(2)推导结果代入

$$\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f_0}{\sigma - \zeta} d\sigma$$

$$\text{和 } \varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{\varphi'_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\overline{f_0}}{\sigma - \zeta} d\sigma \text{ 可得:}$$

$$\varphi_0(\zeta) = -r_0\sigma_v(1-k)\zeta/2 \quad (5)$$

$$\varphi_0(\zeta) = -r_0\sigma_v[(1+k)\zeta + (1-k)\zeta^3]/2 \quad (6)$$

第 4 步:由  $P_x = P_y = 0, \varphi(\zeta) = \alpha\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \psi(\zeta) = (\alpha_1 + i\beta_1)\omega(\zeta) + \psi_0(\zeta)$ , 可得出:

$$\varphi(\zeta) = r_0\sigma_v[(1+k)/\zeta - 2(1-k)\zeta]/4 \quad (7)$$

$$\psi(\zeta) = r_0\sigma_v[(1-k)/\zeta - (1+k)\zeta - (1-k)\zeta^3]/2 \quad (8)$$

第 5 步:由式(8)可得出  $\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \Phi'(\zeta), \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$ 。即可得圆形断面巷道围岩应力分量的曲线坐标表达式

$$\sigma_{\varphi}/\sigma_v = (1+k)(1+\rho^2)/2 + (1-k)(1+3\rho^4)\cos 2\varphi/2 \quad (9)$$

$$\sigma_{\theta}/\sigma_v = (1+k)(1-\rho^2)/2 - (1-k)(1-4\rho^2+3\rho^4)\cos 2\varphi/2 \quad (10)$$

$$\tau_{\rho\varphi}/\sigma_v = -(1-k)(1+2\rho^2-3\rho^4)\sin 2\varphi/2 \quad (11)$$

在  $z$  平面上直角坐标为  $(x, y)$ , 极坐标为  $(r, \theta)$ , 即  $x = r\cos \theta, y = r\sin \theta$ 。由保角变换得:  $r = r_0/\rho, \theta = -\varphi$ 。然后代入式(9)~(11), 得  $z$  平面上极坐标表示的巷道围岩应力分量表达式:

$$\sigma_\theta = \left[ \frac{1+k}{2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{1-k}{2} \left( 1 + \frac{3r_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \sigma_v \quad (12)$$

$$\sigma_r = \left[ \frac{1+k}{2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{1-k}{2} \left( 1 - \frac{4r_0^2}{r^2} + \frac{3r_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \sigma_v \quad (13)$$

$$\tau_{r\theta} = \left[ \frac{1-k}{2} \left( 1 + \frac{2r_0^2}{r^2} - \frac{3r_0^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right] \sigma_v \quad (14)$$

得出结果与传统应力函数解法结果一致, 这也说明了复变函数解法求解巷道围岩应力场的可行性, 为进一步求解非圆形巷道围岩应力场提供参考。

## 2 算 例

以下分析把  $\sigma_r/\sigma_v, \sigma_\theta/\sigma_v, \tau_{r\theta}/\sigma_v, \sigma_{\max}/\sigma_v, \sigma_{\min}/\sigma_v$  分别定义为径向、环向、剪切、最大主应力、最小主应力的应力集中系数。

### 2.1 巷道边界应力计算与分析

把  $r = r_0$  代入式(12)~(14)可得出圆形巷道边界应力为:  $\sigma_r = 0, \tau_{r\theta} = 0$  及

$$\sigma_\theta = [1+k+2(1-k)\cos 2\theta]\sigma_v \quad (15)$$

由式(15)可知: 圆形巷道边界的径向应力和剪切应力为零, 环向应力随侧压系数  $k$  和位置角度  $\theta$  的变化而变化, 与巷道半径无关。

不同侧压下巷道边界环向应力在不同角度的分布如图2所示。

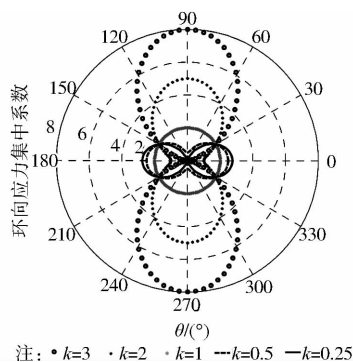


图2 圆形巷道边界应力分布规律

由式(15)及图2可知:

1) 当  $k = 1$  时, 巷道围岩环向应力集中系数为2, 为压应力, 与角度  $\theta$  无关。如  $2\sigma_v < 0.3\sigma_c$  ( $\sigma_c$  为岩

块抗压强度), 围岩处于稳定, 不会出现岩射和岩层剥落破坏, 巷道不用支护。

2) 当  $0 < k < 1$  时, 从巷道两帮到顶底板环向应力逐渐减小; 巷道两帮中部环向应力最大, 最大集中系数为  $3-k$ , 随  $k$  减小而增大; 顶底板中部应力较小, 最小应力集中系数为  $3k-1$ , 随  $k$  增大而增大;  $k < 1/3$  时顶底板开始产生拉应力;  $1/3 < k < 1$  时, 巷道两帮岩体先被压坏,  $0 < k < 1/3$  时, 巷道两帮岩体先被压坏或顶底板岩体先被拉坏。

3) 当  $k > 1$  时, 从巷道两帮到顶底板应力逐渐增大; 顶底板中部应力最大, 最大集中系数为  $3k-1$ , 随  $k$  增大而增大; 巷道两帮中部应力较小, 最小应力集中系数为  $3-k$ , 随  $k$  增大而减小;  $k > 3$  时两帮围岩开始产生拉应力;  $1 < k < 3$  时, 顶底板先被压坏,  $k > 3$  时, 巷道两帮岩体先被压坏或顶底板岩体先被拉坏。

4) 在  $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$  时, 应力集中系数为2, 与侧压系数大小无关。

### 2.2 巷道沿铅垂线 $\theta = \pi/2$ 的应力计算与分析

因圆形巷道顶底板或两帮应力较为集中, 所以考虑不同侧压和半径对两帮及顶底板应力影响。以半径为2.5 m的巷道在不同侧压系数下沿铅垂线  $\theta = \pi/2$  的应力分布为例研究侧压系数对围岩应力影响, 应力分布规律如图3所示。以侧压系数为4的情况下对不同巷道半径沿铅垂线  $\theta = \pi/2$  的应力分布为例研究半径对围岩应力影响, 应力分布规律如图4所示。图3、4中应力集中系数是指图1中巷道顶板上方的一行黑色单元的受力情况。正为压应力, 负为拉应力。

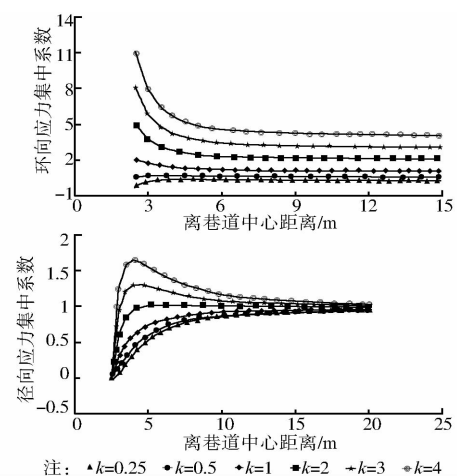


图3 沿铅垂线应力分布规律

由图3可知:

1) 巷道顶板环向应力峰值随侧压的增加而增加, 随离巷道距离增加而减小, 最后趋于侧压力。侧压系

数较小时,巷道顶板产生拉应力。环向应力对巷道影响范围一般在 1~1.5 m,随侧压增大而增加。

2)侧压系数较小时,径向应力随离巷道距离增加而增加,最后趋于远场铅垂应力。侧压系数较大时,垂直应力随离巷道距离增加先增后减,最后趋于远场铅垂应力。

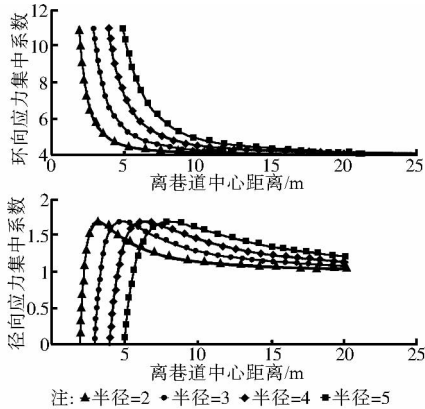


图 4 不同半径下应力分布规律

由图 4 可知:

1)巷道顶板环、径向应力峰值与半径无关。但径向应力峰值距巷道边界距离随离半径增大而增加。巷道半径越大,围岩受影响范围越大。

2)不同巷道半径的环、径向应力变化规律相似,随距巷道边界距离增加,环向应力集中系数减小,径向应力先增后减。

### 3 巷道围岩应力分布特征

#### 3.1 不同侧压系数下围岩应力分量分布特征

以圆形巷道中心为原点,建立直角坐标系,巷道高方向为  $y$  轴,宽方向为  $x$  轴,巷道围岩单元在  $xy$  平面上对应点为  $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$ 。取巷道半径 2.5 m 为例,代入式(12)~(14)可得巷道围岩在不同侧压系数下的应力集中系数表达式。体力不计情况下,侧压系数小于 1 可等效为是把侧压系数大于 1 模型旋转  $90^\circ$ ,因此只分析侧压系数大于 1 的情况,对侧压系数为 2 和 4 为例进行分析,得出不同位置围岩应力分布如图 5 所示。

从图 5 可知:

1)可以直观看到不同侧压下巷道围岩任意位置的应力分量大小情况。

2)各侧压系数下环向、径向、剪切应力均分别有相同的变化规律。

3)相同半径上的围岩环向应力从顶底板到两帮逐渐减小,顶底板环向应力峰值随侧压系数增大而增加;侧压系数较大时,两帮环向应力为拉应力。

4)相同半径上的围岩径向应力从顶底板到两帮有逐渐增大趋势。顶板上方和底板下方,一定范围内随离巷道距离增加,径向应力有先增后减变化规律。两帮随离巷道距离增加径向应力增加。

5)相同半径上的围岩剪切应力绝对值从两帮到顶底板有先增后减变化规律,在直线  $x = \pm y$  上剪切

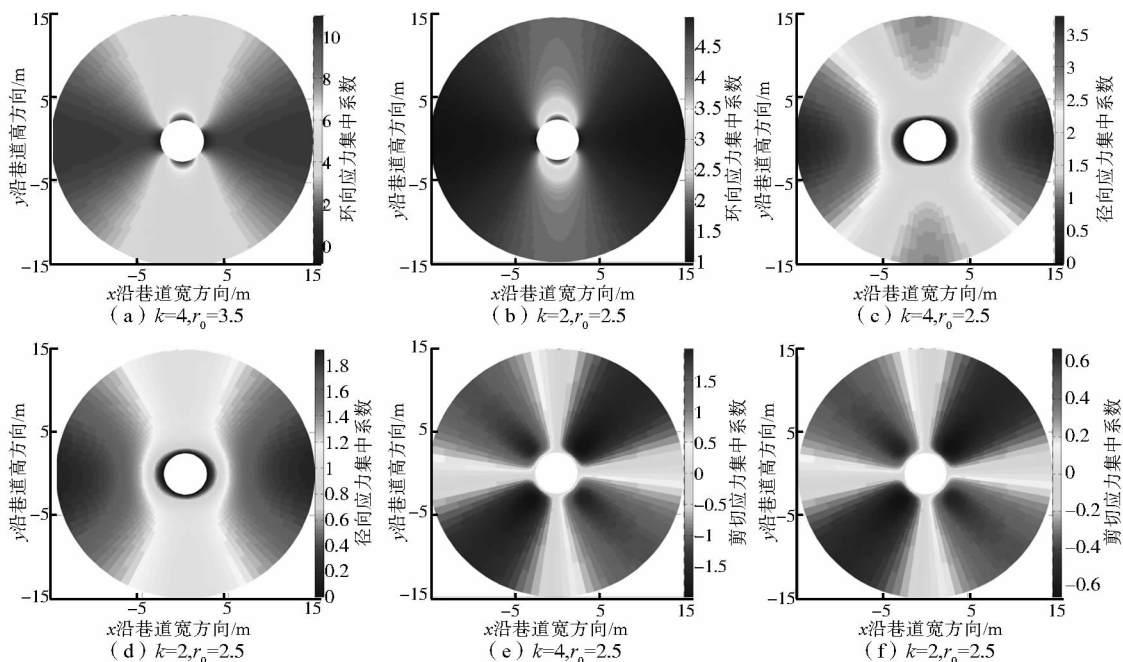


图 5 围岩应力分量分布规律

应力绝对值最大,  $x$ 、 $y$  轴上最小。

### 3.2 不同半径下围岩应力分量分布特征

取侧压系数为 4, 以巷道半径 2.5、3.5 m 为例

进行分析, 得出不同位置围岩应力分布, 半径为 2.5 m 的应力分布情况如图 5(a)(c)(e), 半径为 3.5 m 的巷道应力分布如图 6 所示。由图 5、6 可知:

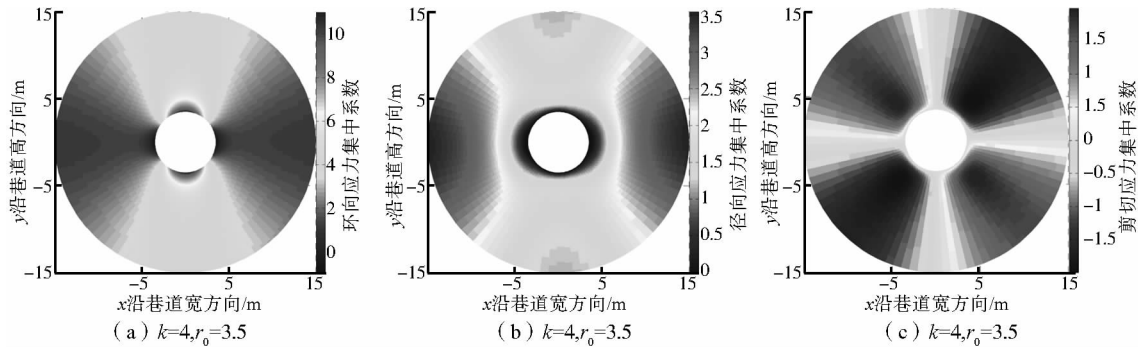


图 6 围岩应力分量分布规律

1) 可以直观看到不同半径巷道围岩任意位置的应力分量大小情况。

2) 巷道围岩环向、径向、剪切应力峰值及其变化趋势与半径无关。

3) 随半径增加, 巷道两帮径向、环向应力较小范围、顶底板环向应力较大范围、峰值距巷道边界距离、围岩受影响范围均增加。

4) 径向、环向应力有对称变化特征, 剪切应力有反对称特征。

### 3.3 围岩极值应力分布特征

把式(11)~(13)代入极坐标向直角坐标变换公式, 得

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \cos \theta \sin \theta,$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \cos \theta \sin \theta,$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\theta) \cos \theta \sin \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

然后把  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  代入平面应力状态的极值应力求解公式

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \tau_{xy}^2}$$

可求得圆形巷道围岩任意位置的最大、最小应力。以侧压系数为 1、4, 半径 2.5、3.5 m 的圆形巷道为例分析, 结果如图 7 所示。

由图 7 可知:

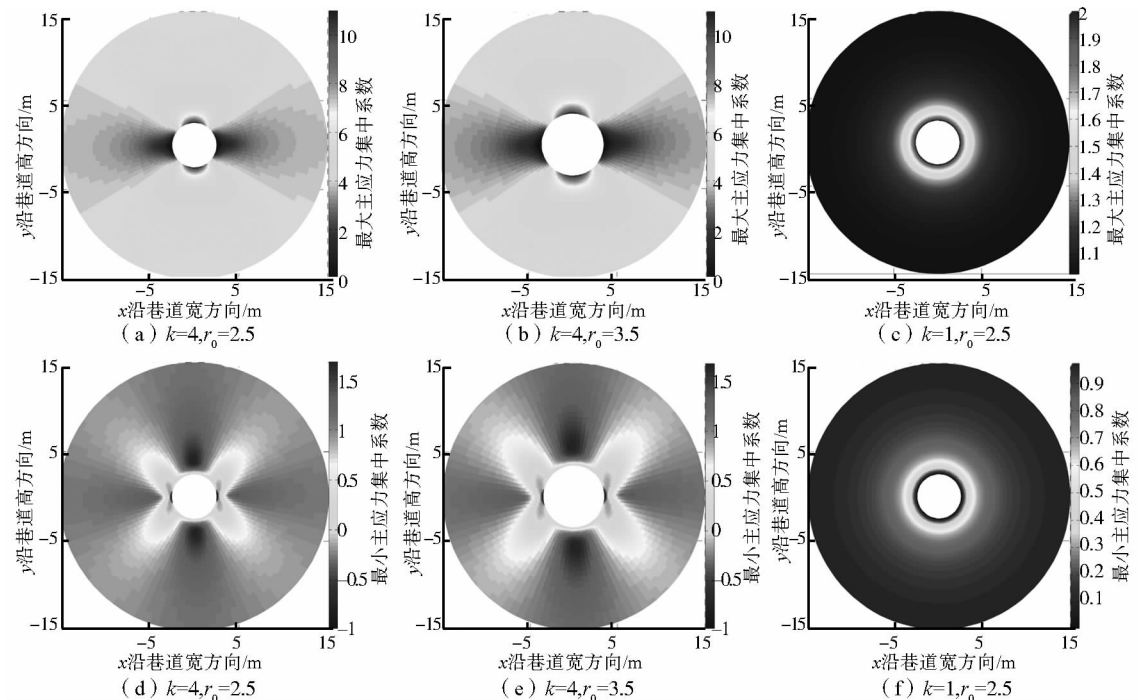


图 7 极值应力分布

1)可以直观看到巷道围岩任意位置的应力大小情况。

2)侧压系数为1时,相同半径圆环上岩体的最大、最小应力分别相同,即应力只与离巷道中心距离大小有关,与位置无关。随侧压系数增大,顶底板的最大应力最大,两帮最小,巷道附近相同半径圆环上岩体的最大应力从顶底板到两帮逐渐减小。

3)巷道围岩最大、最小应力峰值及其出现方向与半径无关。

## 4 结论

1)采用复变函数法得出了圆形巷道应力场解析表达式,并对巷道边界应力及顶板上方岩体应力进行了分析。并对不同侧压系数及不同半径下的巷道周围岩体应力场进行了仿真分析,得出了巷道周围岩体应力场分布的直观图像,可以直观看到巷道围岩任意位置的应力分布情况。

2)  $k < 1/3$  时顶底板开始产生拉应力,  $k > 3$  时两帮围岩开始产生拉应力,  $1/3 < k < 3$  时,均为压应力。

3)侧压系数均大于1或小于1时,各侧压系数下环向、径向、剪切应力均分别有相同的变化规律。

4)巷道围岩应力峰值及其出现方向与半径无关。

### 参考文献:

- [1] 王林江,盛振娟,林佳铿,等.用计算复变函数法处理含多个椭圆孔有限大小复合材料板的应力场[J].东南大学学报,1999,29(6):113-118.  
Wang L J, Sheng Z J, Lin J K, et al. Calculation of stress in a finite composite plate with multiple elliptical holes using computational complex function method [J]. Journal of Southeast University, 1999, 29(6): 113-118.
- [2] Li S C, Wang M B. Elastic analysis of stress-displacement field for a lined circular tunnel at great depth due to ground loads and internal pressure [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2008, 23(6): 609-617.
- [3] Gao G Y, Chen Q S, Zhang Q S, et al. Analytical elasto-plastic solution for stress and plastic zone of surrounding rock in cold region tunnels [J]. Cold Regions Science and Technology, 2012, 72: 50-57.
- [4] Wang S L, Wu Z J, Guo M W, et al. Theoretical solutions of a circular tunnel with the influence of axial in situ stress in elastic-brittle-plastic rock [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2012, 30:155-168.
- [5] 王明斌,李术才,李树忱,等.圆形隧道围岩附加应力场的解析解答[J].岩土力学,2006,27(Sup1):207-210.  
Wang M B, Li S C, Li S C, et al. Analytical solution of subsidiary stress field for circular tunnel [J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(Sup1): 207-210.
- [6] 陆文超,仲政,王旭.浅埋隧道围岩应力场的解析解[J].力学季刊,2003,24(1):50-54.  
Lu W C, Zhong Z, Wang X. Analytical solution for stress field in surrounding rocks of shallow tunnel [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2003, 24(1): 50-54.
- [7] 蔡晓鸿,蔡勇斌,蔡勇平,等.二向不等围压和内压作用下椭圆形洞室的计算[J].地下空间与工程学报,2008,4(3):453-459.  
Cai X H, Cai Y B, Cai Y P, et al. Computation of elliptic tunnel under the combined action of Two-dimensional unequal adjoining rock pressure and internal pressure [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2008, 4(3): 453-459.
- [8] Muskhelishvili N I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity: fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion, and bending [M]. Groningen: P Noordhoff, 2011: 1359-1363.
- [9] 陈子荫.围岩力学分析中的解析方法[M].北京:煤炭工业出版社,1994.
- [10] 房莹光,孙钧.地面荷载下浅埋隧道围岩的粘弹性应力和变形分析[J].岩石力学与工程学报,1998,17(3):239-247.  
Fang Y G, Sun J. Viscoelastic stress and deformation analysis of shallow tunnels under the load on the ground surrounding [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1998, 17(3): 239-247.
- [11] 皇甫鹏鹏,伍法权,郭松峰,等.基于边界点搜索的洞室外域映射函数求解法[J].岩土力学,2011,32(5):1418-1424.  
HuangFu P P, Wu F Q, Guo S F, et al. A new method for calculating mapping function of external area of cavern with arbitrary shape based on searching points on boundary [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(5): 1418-1424.
- [12] 朱大勇,钱七虎,周早生,等.复杂形状洞室映射函数的新解法[J].岩石力学与工程学报,1999,18(3):279-

- 282.
- Zhu D Y, Qian Q H, Zhou Z S, et al. New method for calculating mapping function of opening with complex shape [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, 18(3): 279-282.
- [13] 王润富. 弹性力学的复变函数计算机解[J]. 河海大学学报, 1991, 19(2): 84-86.
- Wang R F. Computer solutions for complex function in elasticity [J]. Journal of Hohai University, 1991, 19(2): 84-86.
- [14] 刘金高, 王润富. 马蹄形孔口和梯形孔口的应力集中问题[J]. 岩土工程学报, 1995, 17(5): 57-64.
- Liu J G, Wang R F. The stress concentration of U-shaped and ladder-shaped holes [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 17(5): 57-64.
- [15] 汤澄波, 范广勤. 高地应力区天幕线拱形洞室断面的解法[J]. 煤矿设计, 1989(1): 16-18.
- Shang C B, Fan A Q. Determination of the mapping function for the exterior do-main of a non-circular opening by means of the multiplication of tree absolutely convergent series [J]. Coal Engineering, 1989(1): 16-18.
- [16] 赵凯, 刘长武, 张国良. 用弹性力学的复变函数法求解矩形洞室周边应力[J]. 采矿与安全工程学报, 2007, 24(3): 361-365.
- Zhao K, Liu C W, Zhang G L. Solution for perimeter stresses of rocks around a rectangular chamber using the complex function of elastic mechanics [J]. Journal of Mining & Safety Engineering, 2007, 24(3): 361-365.
- [17] 祝江鸿. 隧洞围岩应力复变函数分析法中的解析函数求解[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(4): 345-354.
- Zhu J H. Analytic functions in stress analysis of the surrounding rock for caverns with the complex variable theory [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2013, 34(4): 345-354.
- [18] 吕爱钟. 地下洞室最优开挖形状的确定方法[J]. 岩石力学与工程学报, 1996, 15(3): 84-90.
- Lyu A Z. The method for optimum shapes of tunnels and cavities [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1996, 15(3): 84-90.
- [19] 吕爱钟. 高地应力区地下洞室断面形状的选择方法[J]. 煤炭学报, 1997, 22(5): 49-52.
- Lyu A Z. Selection method of section configuration of underground chamber in high strata stress zone [J]. Journal of China Coal Society, 1997, 22(5): 49-52.
- [20] 张路青, 杨志法, 吕爱钟. 两平行的任意形状洞室围岩位移场解析法研究及其在位移反分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(5): 584-589.
- Zhang L Q, Yang Z F, Lyu A Z. Analysis study on displacement field of surrounding rocks of two parallel tunnels with arbitrary shapes and its application to back-analysis of displacement [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, 19(5): 584-589.
- [21] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

(编辑 王秀玲)