

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2014.04.002

考虑几何非线性的新型索拱桥拱轴线优化

胡常福^{1,2}, 郑恒¹, 任伟新^{1,3}, 上官兴²

(1. 中南大学 土木工程学院, 长沙 410075; 2. 华东交通大学 土木建筑学院, 南昌 330013;
3. 合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009)

摘要: 鉴于新型索拱桥存在明显几何非线性的力学特点, 针对已有拱轴线迭代优化方法收敛性不好的问题, 提出在主拱圈为两铰拱的索拱桥有限元模型基础上, 进行几何非线性的拱轴线迭代优化方法, 以解决考虑几何非线性的超大跨径索拱桥拱轴线迭代的收敛性问题。以跨径 600 m 索拱桥作为算例, 验证方法的有效性及其收敛性。算例结果表明, 与仅考虑线性迭代相比, 考虑非线性迭代后的主拱圈弯矩分布更合理, 最大正弯矩小 35%, 最大负弯矩小 17%, 主拱圈应变能小 23%; 收敛性分析结果表明, 该方法比主拱圈为无铰拱有限元模型方法收敛性能更好, 不同的初始拱轴线均能收敛于稳定的结果。

关键词: 索拱桥; 几何非线性; 拱轴线; 迭代优化

中图分类号: U448.22 文献标志码: A 文章编号: 1674-4764(2014)04-0009-06

Arch Axis Optimization of New Type Arch Bridge with Diagonal Web Cables Based on Geometric Nonlinear Mechanical Analysis

Hu Changfu^{1,2}, Zheng Heng¹, Ren Weixin^{1,3}, Shanguan Xing²

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, P. R. China;
2. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, P. R. China;
3. School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P. R. China)

Abstract: There are obvious geometric nonlinear mechanical characteristics in new type arch bridge with diagonal web cables. Meanwhile, the convergence of the existing arch axis iterative optimization method is not good. In order to solve new type arch bridge axis iteration convergence problem considering geometric nonlinear mechanical analysis, an arch axis iteration optimization method was proposed based on the iteration basis finite element model with two hinge arch model in main arch ring. A 600m span arch bridge with diagonal web cables was selected as an example to test the convergence performance and applicability of proposed method. The results showed that the bending moment of proposed method had better distribution along arch span, and it is about 35% smaller in maximum bending moment, 17% smaller in minimum bending moment and 23% smaller in bending strain energy compared to the results of linear iteration optimization method. Convergence analysis results demonstrated that proposed method had better iteration performance than the existing method. Meanwhile, different initial arch axis can converge to stable results.

Key words: arch bridge with diagonal web cables; geometric nonlinearity; arch bridge; iteration optimization

收稿日期: 2013-10-16

基金项目: 国家自然科学基金(51278163); 江西省科技支撑计划(20141BBG70089); 江西省教育厅基金(GJJ12325); 铁路环境振动与噪声教育部工程研究中心资助项目

作者简介: 胡常福(1980-), 男, 博士生, 主要从事拱桥力学研究, (E-mail) changfu.hu@foxmail.com。

拱桥是有推力结构,跨越能力大,同时施工特别困难。桁式组合拱桥^[1]将桁架悬臂施工引入拱桥,解决了施工难题,并使成桥结构与施工临时结构统一,取得了较好的效果。陈天本等^[2]提出桁式组合拱桥的革新方案,使用斜拉索替代预应力混凝土拉杆,使用钢管混凝土替代钢筋混凝土箱型拱圈。由于柔性斜拉索的调索功能,使得该桥型结构受力形式发生变化,得以成为新的拱桥结构^[3],并被命名为索拱桥^[4]。由于该桥型结构轻盈受力合理,闫瑾等^[5]提出了跨径 600 m 的索拱桥方案,表明了该桥型具备向超大跨径发展的可能。

拱轴线是拱桥设计的基础,如何寻找合理拱轴线使得主拱圈内力最小,是大跨径拱桥设计的基本问题之一。在索拱桥中,由于斜拉索的存在,使得主拱圈受力较普通上承式拱桥复杂,主拱圈承担的荷载与圆弧线、抛物线、悬链线、悬索线^[6]及组合线型^[7]对应的荷载均不同,难以找到一个解析的拱轴线与其压力线相重合,故寻找拱轴线最优化是切实可行的方法。林阳子等^[8]在半拱有限元模型基础上使用迭代的方法,以求得最优拱轴线,取得较好的效果;由于其使用无铰拱有限元模型,迭代中容易出现不收敛的现象。周尚猛等^[9]使用三次样条曲线逼近主拱圈压力线,采用优化主拱圈加权弯曲应变能的方法,寻找最优拱轴线。栗怀广等^[10]将拱轴线离散为多个直线段,采用从拱顶逐段计算的方法得到压力线。宋业存^[11]提出一种椭圆曲线用在拱结构上,在相同的荷载作用下与其他拱轴线相比具有更小的位移。这些研究均将拱结构视为线性受力体系,而就其力学本质而言拱结构是非线性受力体系^[12-14]。对于大跨径索拱桥而言,不仅具有较强的几何非线性,而且主拱圈内力巨大,在这种情况下如何获得最优拱轴线,是索拱桥向大跨径发展必须考虑的基本问题。

为探索在考虑几何非线性受力情况下新型索拱桥的拱轴线优化方法,笔者基于主拱圈竖坐标与水平推力的正交性,提出在主拱圈为两铰拱的索拱桥有限元模型基础上,进行考虑几何非线性受力的拱轴线迭代优化方法。以跨径 600 m 的索拱桥作为算例,验证该方法的有效性及各参数对迭代优化结果的影响。

1 索拱桥几何非线性拱轴优化原理

1.1 索拱桥的几何非线性构成

由于索拱桥中使用斜拉索将主拱圈与上弦连接,具有拱结构与斜拉索结构所特有的几何非线性特点,具体表现为:在外荷载作用下索拱桥主拱圈产

生较大的轴向力,与主拱圈的切向位移相互作用产生附加弯矩是索拱桥几何非线性的因素之一;索拱桥桥面系与主拱圈之间通过斜向拉索连接,由于斜拉索本身的垂度效应^[15-16],使得索拱桥成为非线性系统;斜拉索的另一个作用是使桥面系承担部分轴向力,进而在桥面系中出现附加弯矩,也是造成几何非线性的因素之一;在大跨径索拱桥中,恒载作用下结构挠度达到米的量级,产生大变形效应,引起构件几何外形变化。在这些因素综合作用下,构成了索拱桥几何非线性的力学本质。

1.2 考虑几何非线性的索拱桥拱轴线迭代优化

文献[8]基于主拱圈纵坐标与水平推力的正交性,提出在无铰拱半拱模型基础上,进行如式(1)所示的拱轴线迭代。

$$Y_{i+1,j} = Y_{i,j} - n \frac{M_{i,j}}{H_{i,j}} \quad (1)$$

式中: $Y_{i+1,j}$ 为第*i*+1次迭代后主拱圈*j*节点的竖坐标; $Y_{i,j}$ 为第*i*次迭代后主拱圈*j*节点的竖坐标; n 为调整系数,其大小满足 $0 < n \leq 1$; $M_{i,j}$ 为第*i*次迭代后主拱圈*j*节点的弯矩; $H_{i,j}$ 为第*i*次迭代后主拱圈*j*节点等效水平力。该迭代公式概念清晰计算简明,但在实际使用时容易出现不收敛现象。其本质原因是其在无铰拱模型上迭代,拱脚弯矩始终不能为零,随着迭代次数的增加拱脚坐标偏离越来越大,进而造成迭代不能收敛。为解决此问题,林阳子等^[8]采用强制拱脚坐标不变、调整系数*n*的大小与设置多个迭代停止条件等方法,但效果一般。

考虑几何非线性后的索拱桥主拱圈弯矩较线性受力大,更容易出现迭代不收敛现象。为解决迭代过程的收敛性问题,可以在主拱圈为两铰拱的索拱桥有限元模型基础上,进行迭代以消除拱轴线与压力线偏离弯矩。因两铰拱的拱脚弯矩为零,使得收敛更加容易,不需要设置特殊的强制收敛条件。该方法的主要步骤如下:

1) 选取一个初始拱轴线,建立索拱桥的两铰拱有限元模型,进行几何非线性计算,提取主拱圈内力。

2) 根据式(2),迭代调整主拱圈的竖坐标。

$$Y_{i+1,j} = Y_{i,j} - \frac{M_{i,j}^N}{H_{i,j}^N} \quad (2)$$

式中: $M_{i,j}^N$ 为第*i*次迭代后步骤1)有限元模型中考虑几何非线性的主拱圈第*j*节点弯矩; $H_{i,j}^N$ 为第*i*次迭代后考虑几何非线性的主拱圈第*j*节点等效水平力, $H_{i,j}^N = \frac{\Delta x_j}{\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}} N_{i,j}^N - \frac{\Delta y_j}{\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}} Q_{i,j}^N$, 其中 Δx_j 、 Δy_j 为该单元在*x*、*y*轴的投影长度, $N_{i,j}^N$ 、

$Q_{i,j}^N$ 为第 i 次迭代后考虑非线性后的主拱圈第 j 节点的轴力与剪力。

3) 将调整后的拱轴线, 代入步骤 1) 的有限元模型中, 计算几何非线性下的结构内力。

4) 根据式(2), 判断是否满足如式(3)所示的迭代停止条件, 否则重复步骤 2) 至 4)。

$$\left| \frac{U_i - U_{i+1}}{U_{i+1}} \right| = \left| \frac{\sum_{j=1}^m \frac{l_j M_{i,j}^{N^2}}{2E_j I_j} - \sum_{j=1}^m \frac{l_j M_{i+1,j}^{N^2}}{2E_j I_j}}{\sum_{j=1}^m \frac{l_j M_{i+1,j}^{N^2}}{2E_j I_j}} \right| \leq \epsilon \quad (3)$$

式中: U_i, U_{i+1} 为第 $i, i+1$ 次迭代中考虑非线性后主拱圈弯曲应变能; $M_{i,j}^N, M_{i+1,j}^N$ 为第 $i, i+1$ 次迭代后主拱圈第 j 节点的弯矩; E_j, I_j, l_j 分别为主拱圈第 j 单元的弹性模量、抗弯惯性矩和单元长度; m 为主拱圈单元数; ϵ 为事先设定的无穷小量。

5) 提取迭代终止后有限元模型的主拱圈坐标,

并使用高次抛物线拟合光滑曲线。

6) 将拟合后的高次抛物线, 代入具有实际约束的无铰拱索拱桥有限元模型, 此时即可得到考虑非线性拱轴线优化后的最终结构内力。

2 索拱桥算例验证

2.1 跨径 600 m 索拱桥方案

选用一跨径 600 m 的索拱桥方案^[5]作为算例, 用以验证该方法在解决大跨径索拱桥拱轴线迭代优化收敛性问题中的有效性。该方案设计如图 1 所示, 其主拱圈采用大直径品型钢管, 立柱为内含加劲肋的空钢管, 上弦为波形钢腹板工字钢组成的纵横梁体系, 行车道板为四钢混凝土(波形钢、钢纤维、钢筋网、钢筋混凝土)连续桥面板, 斜拉索为 $\phi_j 21.8$ 平行钢丝束组成。

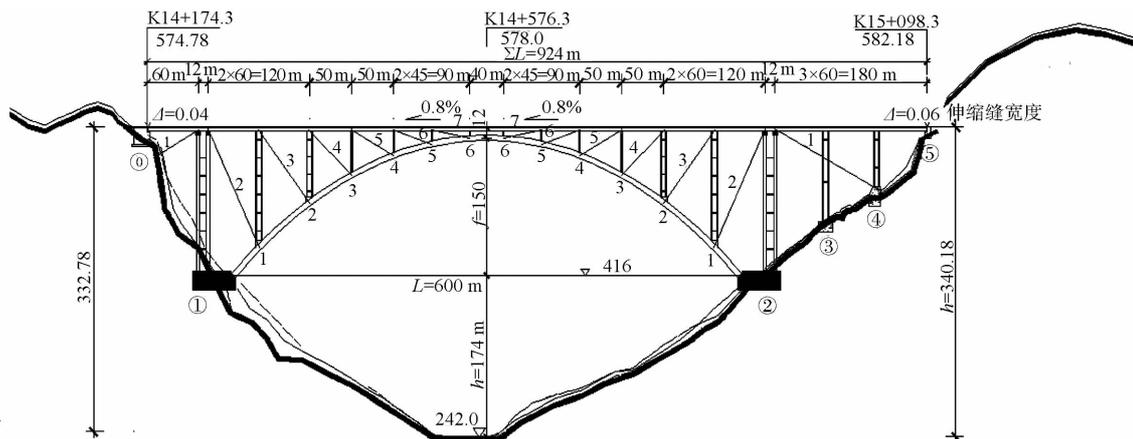


图 1 跨径 600 m 索拱桥方案

2.2 有限元模型

鉴于有限元软件 ANSYS 强大的后处理功能, 选用该软件平台作为分析计算的基本工具。其中以铁木辛哥梁理论为基础的 beam188 非线性梁单元, 考虑了大变形效应、大扭转效应与剪切变形效应, 适合作为索拱桥的主拱圈、立柱与纵梁的单元类型选择, 当单元划分足够小时能精确分析索拱桥的各种附加弯矩与大变形效应; 其中的 link10 非线性杆单元, 能够很好地模拟斜拉索只受拉的力学行为, 适合作为索拱桥斜拉索的单元类型选择, 当单元划分足够小时能精确计算索的垂度效应。基于此, 建立跨径 600 m 索拱桥的非线性有限元模型, 其中包括 600 个主拱圈单元(每节间主拱圈划分为 10 个 beam188 单元)、924 个纵梁单元(每节间纵梁划分为 10 个 beam188 单元)、180 个立柱单元(每个立柱

划分为 5 个 beam188 单元)及 140 个拉索单元(每个拉索划分为 5 个 link10 单元), 且以等效温差法及 ANSYS 二次开发技术^[17]模拟斜拉索不同索力对结构的力学效应。主拱圈与纵梁截面如图 2 所示, 其他构件截面见文献[5], 斜拉索索力见表 1。拱脚、1#~4#立柱座为固结约束, 0#与 5#仅设置为竖向约束以考虑此处的伸缩缝效应。模型的初始拱轴线为 $m=1.543$ 悬链线, 荷载为构件自重及作用在纵梁的桥面系自重, 大小为 63 kN/m。有限元模型求解时, 打开大变形开关与 $p-\Delta$ 效应开关即可考虑全部几何非线性, 使用弧长法进行求解即能得到考虑全部几何非线性情况下的索拱桥内力与位移; 单元大小的参数分析结果表明, 该非线性有限元模型能较好地兼顾结果精度与模型计算效率。

表 1 索拱桥索力表

编号	材料	索力/kN
1	31 ϕ_7 21.8	5 550
2	37 ϕ_7 21.8	6 620
3	31 ϕ_7 21.8	5 550
4	25 ϕ_7 21.8	4 480
5	25 ϕ_7 21.8	4 480
6	25 ϕ_7 21.8	4 480
7	25 ϕ_7 21.8	4 480

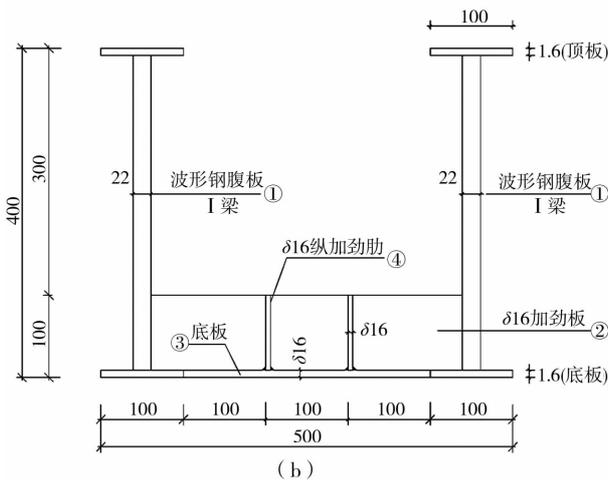
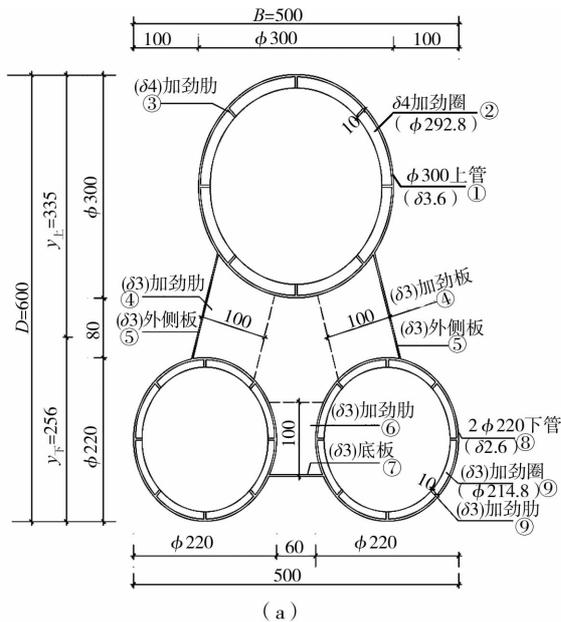


图 2 跨径 600 m 索拱桥构件截面详图 (单位:cm)

2.3 几何非线性分析

为考察跨径 600 m 索拱桥在恒载作用下的几何非线性现象,在上述有限元模型基础上,分别计算仅考虑线性受力与考虑全部几何非线性两个工况下结构的内力位移。其中,考虑几何非线性工况为打开大变形开关与 $p-\Delta$ 效应开关,使用弧长法求解结构

在自重及桥面系荷载作用下的内力与位移;考虑线性受力工况时,关闭所有大变形选项且斜拉索设置为一个杆单元,计算结构在自重及桥面系荷载作用下的内力与位移。两个工况下主拱圈内力位移的比较,如图 3、图 4 与表 2 所示。

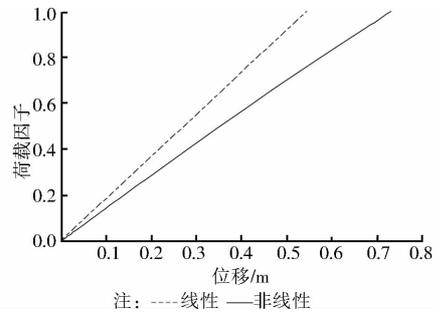


图 3 拱顶荷载位移曲线比较

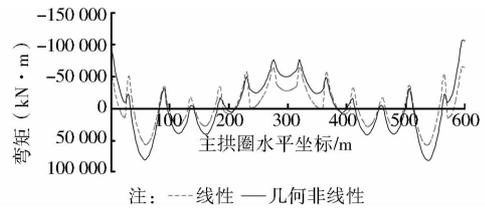


图 4 主拱圈内力图比较

表 2 主拱圈内力比较表

项 目	$M_{max} /$ (kN·m)	$M_{min} /$ (kN·m)	$U /$ (kN·m)
线性	58 789.00 (100%)	-63 761.67 (100%)	425.87 (100%)
几何非线性	80 990.55 (137.76%)	-106 268.47 (166.67%)	955.49 (224.36%)

注:表中 M_{max} 为主拱圈最大正弯矩; M_{min} 为主拱圈最大负弯矩; U 为主拱圈弯曲应变能。

由图 3 可以看出,在构件自重、桥面系自重及初始索力的共同作用下,跨径 600 m 索拱桥中存在较明显的几何非线性现象,考虑几何非线性计算的拱顶位移比仅考虑线性的结果大 50%左右,且有继续增大的趋势。由图 4 可以看出,不论在主拱圈的负弯矩区(拱脚与拱顶)还是正弯矩区(四分点区域),考虑非线性后的主拱圈内力峰值均比仅考虑线性的峰值更大;由表 2 可以看出,考虑几何非线性后,主拱圈最大正弯矩比仅考虑线性大 137.76%,最大负弯矩大 166.67%,主拱圈弯曲应变能大 224.36%。综合以上分析可知,仅考虑线性与考虑几何非线性结果存在较大差别,按照几何非线性内力结果对主拱圈进行拱轴线优化更符合超大跨径索拱桥工程实际。

2.4 考虑非线性受力的拱轴线迭代优化

为探索该方法在索拱桥考虑非线性受力拱轴线优化中的适用性,在上述有限元模型的基础上,分别计算仅考虑线性受力迭代优化与考虑全部非线性受力迭代优化两个工况下索拱桥主拱圈内力。在两个迭代优化工况中,均在主拱圈为两铰拱的有限元模型基础上,用式(2)进行迭代,不使用调整系数,迭代停止条件 ϵ 设置为0.01;其中考虑全部非线性工况,打开大变形与 $p-\Delta$ 效应开关并使用弧长法求解,仅考虑线性受力工况关闭所有大变形选项且斜拉索为一个杆单元。两个迭代优化工况的主拱圈内力结果比较,如图5与表3所示。

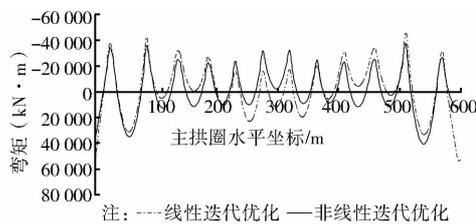


图5 两种迭代方法比较图

表3 两种迭代方法主拱圈内力比较表

项目	$M_{\max} /$ (kN·m)	$M_{\min} /$ (kN·m)	$U /$ (kN·m)
线性迭代	62 816.99 (100.00%)	-45 435.54 (100.00%)	198.60 (100.00%)
非线性迭代	41 009.26 (65.28%)	-37 613.35 (82.78%)	153.31 (77.19%)

由图5可以看出,考虑非线性迭代的主拱圈最大正弯矩出现在第一节间,考虑线性迭代的最大正弯矩出现在拱脚,前者明显小于后者;非线性迭代与线性迭代的主拱圈最大负弯矩均出现在四分点区域,前者也小于后者;由表3可以看出,与线性迭代相比,非线性迭代后主拱圈最大正弯矩约小35%,最大负弯矩约小17%,主拱圈应变能约小23%,表明考虑非线性受力的拱轴线迭代方法比仅考虑线性迭代能得到更小的弯矩极值与弯曲应变能结果。

2.5 主拱圈有限元模型对迭代收敛性的影响

为进一步探索该方法对迭代收敛性的影响,在2.2节的有限元模型基础上,分别选取主拱圈为两铰拱和无铰拱两种模型,对初始拱轴线为 $m=1.543$ 悬链线的索拱桥进行非线性拱轴线迭代。两种迭代方法均使用如式(2)所示的迭代公式,不使用调整系数。为充分表现两种方法的迭代收敛效果,均迭代45次而不设置特殊的迭代停止条件,并分别提取主拱圈弯曲应变能,两者收敛性能比较如图6所示。

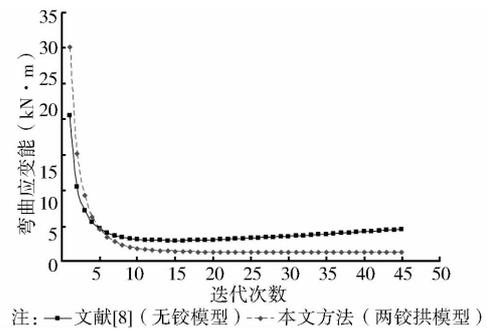


图6 两种主拱圈模型迭代比较图

由图6可以看出,当迭代次数小于10次时,该方法(两铰拱模型)与文献[8](无铰拱模型)的主拱圈应变能随着迭代次数的增加均快速下降;当迭代次数超过10次以后,文献[8](无铰拱模型)的主拱圈弯曲应变能出现略上升趋势,表现为迭代不收敛,该方法(两铰拱模型)的主拱圈弯曲应变能稳定地减小,表现出收敛的稳定性。计算结果表明,使用该方法(两铰拱模型)能够很好地解决迭代收敛性问题。

2.6 不同初始拱轴线下的收敛性能

为检验该方法在不同初始拱轴线情况下是否具有稳定的收敛性能,在2.2节的有限元模型基础上,分别选用拱轴系数为1.000、1.543、2.240及3.500的悬链线作为初始拱轴线,作为索拱桥拱轴线的初始值。4种拱轴线中均使用如式(2)所示的迭代公式,即不使用调整系数。为充分表现该方法的迭代收敛效果,设置为45次迭代而不使用迭代停止条件,并分别提取主拱圈弯曲应变能,考察其迭代收敛稳定性及收敛速度,如图7所示。

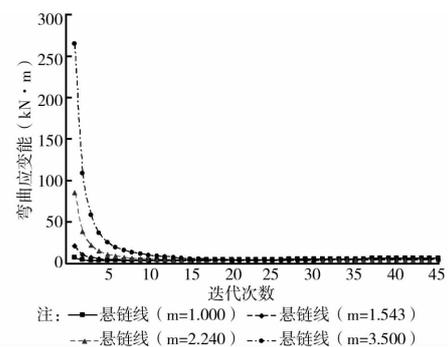


图7 不同初始拱轴线收敛性能比较图

由图7可以看出,随着迭代次数的增加,4个初始拱轴线迭代后主拱圈应变能均能稳定地减小,显示了良好的收敛稳定性,表明不同初始拱轴线对该方法的收敛性没有影响。在收敛速度方面, $m=3.500$ 悬链线收敛速度最快,趋于稳定的主拱圈应变能需要的迭代次数最多,而 $m=1.000$ 的悬链线即抛物线收敛速

度较慢,趋于稳定的主拱圈应变能需要的迭代次数最少。综合图7可知,该方法在不同初始值迭代的收敛速度及收敛稳定性方面表现良好。

3 结 论

基于主拱圈纵坐标与节点水平推力的正交性,提出在主拱圈为两铰拱的索拱桥有限元模型基础上,进行考虑几何非线性的拱轴线迭代优化方法,将跨径600 m索拱桥作为算例,验证了该方法的适用性,并通过比较分析讨论了该方法的收敛性。

1)在主拱圈为两铰拱的索拱桥有限元模型基础上进行拱轴线迭代,能实现考虑几何非线性的索拱桥拱轴线优化。

2)与仅考虑线性受力相比,考虑非线性迭代后的索拱桥主拱圈弯矩分布更合理,最大正弯矩小35%,最大负弯矩小17%,主拱圈应变能小23%;

3)采用主拱圈为两铰拱的有限元模型比无铰拱模型收敛性能更好,不同的初始拱轴线均能收敛于的稳定结果。

参考文献:

- [1] 潘成杰,陈天本,陆宗林. 贵州江界河大桥桁式组合拱桥设计[J]. 土木工程学报, 1989, 22(4): 48-56.
Pan C J, Chen T B, Lu Z L. Design of combined arch bridge with truss pattern in Guizhou Province [J]. China Civil Engineering Journal, 1989, 22(4): 48-56.
- [2] 陈天本. 桁式组合拱桥[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001.
- [3] 上官兴,彭德清,胡常福,等. 一种桁式索拱桥结构: 中国, ZL200720109156.9 [P]. 2007-5-9.
- [4] Liu Y C, Shangguan X, Liu J. Long-span deck type CFST arch bridge combined with diagonal cable [C]// Proceedings of 6th International Conference on Arch Bridge, Fuzhou, China, 2010: 163-166.
- [5] 闫瑾,上官兴. 600 m 拉索钢管拱桥设计新思维[J]. 公路, 2012, 6: 69-75.
Yan J, Shangguan X. New design idea of 600 m span steel arch bridge with diagonal cables [J]. Highway, 2012, 6: 69-75.
- [6] Hu C F, Wan Y, Shangguan X. A new practice in the design of arch axis [C]// Proceedings of 6th International Conference on Arch Bridge, Fuzhou, China, 2010: 709-715.
- [7] 任伟新,胡常福,上官兴,等. 空腹式拱桥新型拱轴线研究[J]. 交通科学与工程, 2010, 26(2): 26-30.
Ren W X, Hu C F, Shangguan X, et al. Research on new arch axis of open-spandrel arch bridge [J]. Journal of Transport Science and Engineering, 2010, 26(2): 26-30.
- [8] 林阳子,黄侨,任远. 拱桥拱轴线的优化与选形[J]. 公路交通科技, 2007, 24(3): 59-63.
Lin Y Z, Huang Q, Ren Y. Optimization and selection of arch bridge axis [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2007, 24(3): 59-63.
- [9] 周尚猛,李亚东. 求解合理拱轴线的加权能量方法[J]. 公路交通科技, 2010, 27(4): 73-77.
Zhou S M, Li Y D. Weighted energy method for solving reasonable arch axis [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2010, 27(4): 73-77.
- [10] 栗怀广,郑凯锋,文曙东,等. 横向拱塔斜拉桥的拱轴线逐段设计算法研究[J]. 工程力学, 2009, 26(2): 131-136.
Li H G, Zheng K F, Wen S D, et al. An incremental design algorithm of arch axis of arch-shaped tower for cable-stayed bridge [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(2): 131-136.
- [11] 宋业存. 基于几何变换的拱轴线的构成与特性研究[J]. 南京理工大学学报, 2012, 36(4): 729-733.
Song Y C. Formation and characteristics of arch axis based on geometric transformation [J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2012, 36(4): 729-733.
- [12] Wei X, Qiang S Z. In-plane nonlinear buckling behavior of elastic arches [C]// IABSE Conference, Global Thinking in Structural Engineering Recent Achievements, Seoul, Korea, 2012: 1-4.
- [13] Caporale A, Feo L, Luciano R. Limit analysis of FRP strengthened masonry arches via nonlinear and linear programming [J]. Composites: Part B, 2012, 43: 439-446.
- [14] Seyedpoor S M, Salajegheh J, Salajegheh E. Shape optimal design of materially nonlinear arch dams including dam-water-foundation rock interaction using an improved PSO algorithm [J]. Optimization Engineering, 2012, 13: 79-100.
- [15] Ernst J H. Der E-Modul von seilen unter berucksichtigung des durchhangers [J]. Der Bauingenieur, 1965, 40(2): 52-55.
- [16] Ren W X. Ultimate behavior of long span cable stayed bridges [J]. Journal of Bridge Engineering, ASCE, 1999, 4(1): 30-37.
- [17] 程进,江见鲸,肖汝诚,等. ANSYS 二次开发技术及在确定斜拉桥成桥初始恒载索力中的应用[J]. 公路交通科技, 2002, 19(3): 50-52.
Chen J, Jiang J J, Xiao R C, et al. ANSYS software and its application in determination of initial cable forces in cable stayed bridges under dead loads [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2002, 19(3): 50-52.