

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2014.06.015

桩承式路堤土拱效应颗粒流分析

郭红梅

(天津城建大学 土木工程学院, 天津 300384)

摘要:土拱效应是桩承式路堤中荷载传递机制中的关键因素。参照前人室内模型试验,采用颗粒流软件 PFC2D 建立离散元(DEM)数值模型,对桩承式路堤中的接触力分布、主应力偏转、竖向位移和侧向位移等进行深入分析。模拟中,路堤填料和桩间土采用 Disk 单元模拟,桩和模型箱采用 Wall 单元模拟,路堤 DEM 模型采用分层压实法生成;路堤填料细观参数通过建立数值双轴试验进行标定,桩间土细观参数通过建立数值压缩试验进行标定。模拟结果表明:桩承式路堤中土拱由多个不同圆心的半球形拱共同组成,拱的高度约为 $5(s-a)/6$;在该高度内路堤中的主应力发生明显偏转,竖向位移量和侧向位移量较大。

关键词:桩承式路堤;土拱效应;离散元;数值模拟

中图分类号: TU435 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4764(2014)06-0087-07

DEM Analysis of Soil Arching of Pile Supported Embankment

Guo Hongmei

(School of Civil Engineering, Tianjin Chengjian University, Tianjin 300384, P. R. China)

Abstract: Pile supported embankment has been widely used in road, airport and dam engineering due to effective construction and economic advantages which can effectively control the settlement and differential settlement. The soil arching effect is a key factor in the load transfer mechanism of pile supported embankment. Based on the current laboratory model test, a series of numerical simulations were conducted with the particle flow code PFC2D to study the contact force, principal stress, vertical and lateral displacements in embankment. The embankment fill and subsoil were simulated by the Disk, and the pile and model box were simulated by the Wall. The multi-layer compaction method was used to establish the Discrete Element Method models. The micromechanical properties of the embankment fill and subsoil were obtained from numerical biaxial compression test and simple compression test, respectively. The simulation results indicated that the soil arching in pile supported embankment was composed by multiple hemispherical arches with different centers, and the height of arching was about $5(s-a)/6$. Within the soil arching height, the deflection of principal stress was obvious, and the vertical and lateral displacements were significant.

Key words: pile supported embankment; soil arching; DEM; numerical simulation

桩承式路堤因其因施工速度快,经济效益高,能有效控制路堤的工后沉降和不均匀沉降等优点,已被广泛应用于道路、机场和堤坝等工程的建设中^[1-3]。

由于桩土刚度差异,在路堤荷载和外部荷载作用下,桩顶和桩间土会产生较大的差异沉降,从而引起路堤填料中应力的重分布, Terzaghi 将这种由差异沉降引

收稿日期:2014-05-30

基金项目:国家自然科学基金(51248004);天津市应用基础与前沿技术研究计划(13JCQNJC07400);天津市高校“优秀青年教师资助计划”

作者简介:郭红梅(1977-),女,主要从事路基路面工程研究,(E-mail)csxjt_jgc@126.com。

起的应力重分布现象称为“土拱效应”^[4],土拱效应是桩承式路堤中荷载传递机制中的关键因素。

根据前人的研究成果,土拱模型大致可概括为 5 种,分别为:Terzaghi 土拱模型^[4]、Marston 土拱模型^[5]、H&R 土拱模型^[6]、金字塔形土拱模型^[7]和楔形体形土拱模型^[8]。其中, Terzaghi 土拱模型^[4]和 Marston 土拱模型^[5]并未给出土拱的具体形状,而是根据桩土相对位移平衡方程对土拱荷载重分布进行计算。H&R 土拱模型^[6]假定路堤中形成的土拱为半球壳形,可拆分为一个球形土拱和 4 个平面土拱,并以土拱拱顶或者拱脚位置的极限状态平衡方程求解桩土荷载分担比;金字塔形土拱模型^[7]则假定土拱形态近似金字塔形或锥形,桩间土仅承担金字塔部分荷载,其余荷载由桩承担;楔形体形土拱模型^[8]则假定土拱形态近似楔形体形,且楔形体内的填土荷载由桩间土承担,其余均由桩体承担。可见,现有桩承式路堤中土拱效应的研究仍仅限于假设条件,所提出的土拱形态差异较大,真实拱形态和拱高度并没有得到广泛和实际例证,全拱高度以及全拱条件亦各不相同。然而,对路堤中土拱形态和高度等的认知,对土拱效应荷载传递机理的研究和桩承式路堤的设计起着至关重要的作用。

土拱效应荷载传递机理研究的各种方法中,现场试验^[9-11]和室内模型试验^[12-15]具有较强的说服力,其试验结果可较为真实的反映路堤中荷载的传递机理,如 Chen 等^[10]以中国东部沿海地区 3 条高速公路为工程背景,通过对路堤填筑过程中桩土压力的测试,分析了路堤中由土拱效应引起荷载传递机理,并与现行规范及设计方法的计算结果进行了对比分析。van Eekelen 等^[13-14]通过室内模型试验,对路堤中的土拱效应进行了系统分析,并提出了一种改进的桩承式路堤设计方法。然而,现场试验和室内模型试验所需的场地不易获得,试验实施过程复杂需花费大量的人力物力,且很难实现对土拱形态的观测和研究。相比而言,数值仿真具有操作简便、可重复性强、容易实现对路堤中应力和位移的分布情况进行观测和研究等优点,已被大量学者采用^[1,16-18],如 Han 等^[1]、Zheng 等^[18]分别采用有限差分法(FDM)和有限元法(FEM)软件建立了桩承式路堤数值分析模型。然而,现有的采用 FDM 和 FEM 建模分析的研究,基本上都只能对桩承式路堤的荷载传递效率、位移和孔隙水压力等宏观参数进行分析。同时,值得注意的是,FDM 和 FEM 均将土体(散体材料)简化为宏观连续材料,忽略了土体的离散特性,很难对土体的细观特性进行深入分析。Cundall 等^[19]提出了离散元法(DEM),该方法考虑了土体材料的离散特性,可模拟散体颗粒在荷载作用下的运动规律,从而实现对散体材料细观特性的深入分析。

本文参照文献^[15]的室内模型试验,采用离散

元法软件 PFC^{2D}^[20]建立桩承式路堤颗粒流模型,从细观角度对桩承式路堤中的接触力分布、主应力偏转、竖向位移和侧向位移等进行深入分析,以研究桩承式路堤中土拱的形态。

1 建模与参数选取

1.1 室内模型试验^[15]概述

室内模型试验为二维试验模型,模型具体尺寸以及相关材料性质如图 1 所示。其中,路堤填料采用直径为 3、4 和 5 mm,长为 60 mm 的钢棒模拟,3 种直径钢棒所占的体积比例相等。另外,桩间土采用泡沫材料模拟,刚性桩采用金属材料模拟。详细信息参见文献^[15]。

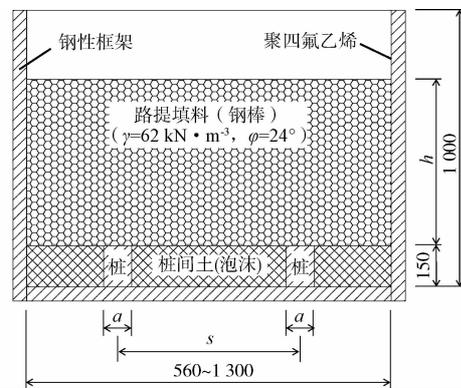


图 1 试验模型装置^[15]示意图(mm)

1.2 获取材料细观参数

路堤填料采用线性接触模型的 Disk 颗粒单元模拟,颗粒粒径及其所占体积比例与室内模型试验^[15]的保持一致,其细观参数通过建立数值双轴试验模型进行反演试算获得,即通过不断地调整颗粒集合的细观参数,使颗粒集合表现的宏观特性与预设的宏观特性一致,最终本文数值模型采用的细观参数详见表 1。数值双轴试验尺寸为 200 mm×220 mm,采用伺服机制加载。加载应力-应变曲线如图 2 所示,取应力-应变曲线峰值为破坏点绘制摩尔破坏应力圆,如图 3 所示。

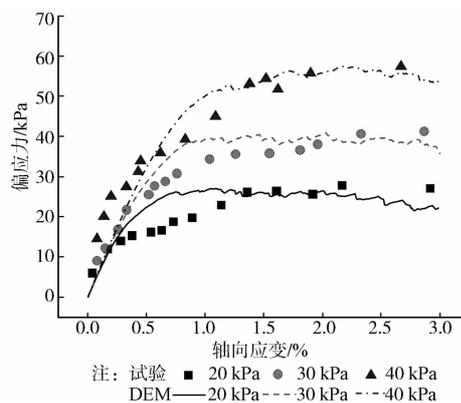


图 2 数值双轴试验应力-应变曲线

图 2 显示,DEM 模拟结果与室内双轴试验的应力应变曲线吻合的较好;图 3 显示,通过绘制摩尔应力圆获得的内摩擦角为 24° 。图 2 和图 3 结果表明,采用表 1 中路堤填料颗粒细观参数的试样能够较好的反映室内模型试验中钢棒的宏观特性,采用该组参数的样本可用于本文中路堤填料(钢棒)的模拟。

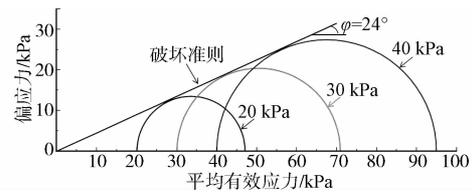


图 3 摩尔破坏应力圆

表 1 颗粒流模型细观参数

参数	粒径/ mm	孔隙率	密度/ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	法向刚度/ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	切向刚度/ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	摩擦系数
路堤填料	3,4,5	0.18	7 600	2.25×10^7	1.50×10^7	0.7
桩间土	3~5	0.18	1 800	4.5×10^6	3.0×10^6	0.3
桩、墙				6.00×10^{10}	6.00×10^{10}	0.0

注:路堤填料颗粒各粒径所占体积相等;桩间土颗粒粒径分布服从标准正态曲线。

桩间土采用线性接触模型的 Disk 颗粒单元模拟,颗粒粒径范围为 3~5 mm,颗粒粒径服从标准正态曲线分布,其细观参数通过数值压缩试验进行反演试算获得。数值压缩试验尺寸与室内模型试验保持一致(550 mm×150 mm),通过给加压板施加一恒定速度进行加载,并记录加载板的竖向应力与竖向位移,如图 4 所示,相应的细观参数详见表 1。图中显示:当竖向位移小于 10 mm 时,DEM 加载曲线与试验数据能较好的吻合;当竖向位移大于 10 mm 后,DEM 加载曲线继续呈近似线性增长,而试验的竖向应力的增长量则逐渐减小。在现阶段,PFC2D 中还未有可模拟双线性特性材料的模型。同时,室内模型试验结果显示:在室内模型试验过程中,桩间土的沉降量均小于 10 mm,即图 4 中显示的应力位移特性可满足本文模拟要求。

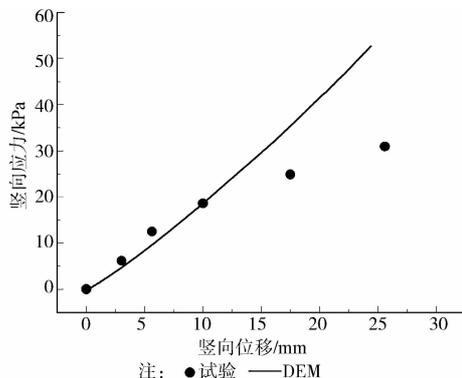


图 4 双轴试验偏应力-正应力曲线

1.3 建立颗粒流数值模型

如图 5 所示,建立 DEM 桩承式路堤数值模型。由于模型的对称性,两侧采用半桩模拟;模型箱和桩采用 Wall 单元模拟;路堤填料和桩间土采用 Disk 单元模拟;桩间土和路堤填料均采用分层压实法^[21]

生成,每层厚度(100 mm)与模型试验保持一致。材料细观参数详见表 1。模型中布置了一定数量的测量圆,用于测量模拟中各位置的应力。另外,在初始状态下,路堤填土与桩间土采用 Wall 单元进行隔离,模拟时将 Wall 单元删除,并运行至平衡状态。

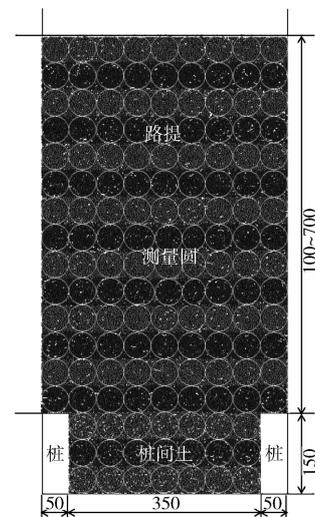


图 5 桩承式路堤 DEM 模型 (mm)

1.4 模型验证

土拱效应是反映路堤中荷载转移的一种现象,可用多种参数表示。本文采用 Hewlett 等^[6]提出的荷载传递效率 E 来描述路堤中荷载转移的程度,其表达式为

$$E = \frac{F_P}{W} \quad (1)$$

式中: F_P 为单桩承担的荷载; W 为单桩处理范围内的总荷载。 E 值越大,土拱效应越明显。

图 6 为 DEM 模拟结果和室内模型试验数据对比曲线。图中显示:DEM 模拟得到的荷载传递效率随填土高度的变化曲线与室内模型试验结果曲线的

变化规律基本一致,即荷载传递效率随填土高度的增加而增加。同时,模拟结果与实测数据较为接近,两者的最大差异为 9.12%,平均差异 5.45%。即本文模拟结果与文献[15]试验数据较为吻合,验证了本文所用模型的正确性,以及模型中各材料参数选择的合理性。

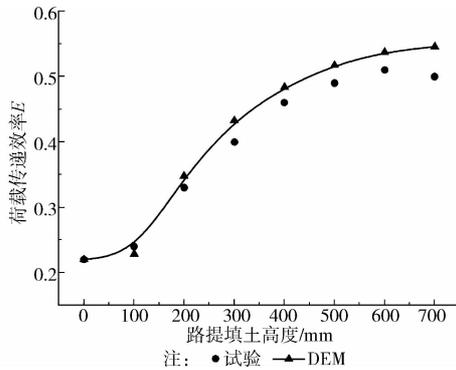


图 6 DEM 结果与试验数据对比曲线

2 模拟结果分析

基于填土高度 $h = 700$ mm, 桩净间距 $s - a = 350$ mm 工况, 对路堤中颗粒间接触力、主应力方向、竖向位移和侧向位移等内容进行分析。

2.1 接触力分布

路堤中的荷载是通过颗粒间接触力链传递的, 接触力链的分布特征实质是土中荷载传递特性的体现。图 7 为路堤填土颗粒间接触力链分布图, 其中图 7(a) 和图 7(b) 中的线条按同一比例绘制, 线条越粗表示接触力越大。图 7(a) 显示: 初始状态下, 路堤中的接触力沿路堤深度方向逐渐增大, 该现象与实际相符, 表明本文中所用模型的正确性; 因桩土间无相对位移, 未形成土拱, 同一深度路堤中的接触力大小几乎相同。图 7(b) 显示: 平衡状态下, 桩顶处的接触力明显大于桩间土上的, 桩顶应力集中现象明显; 桩顶处的接触力沿路堤斜向上发展延伸, 并在距桩顶表面一定高度内发生交叉形成虚拟土拱 (如图 7(b) 中虚线所示), 该虚拟土拱可看作由多个不同圆心半球形拱共同组成, 与 Kempfert 等^[22] 提出的修正的 H&R 模型相吻合; 在虚拟土拱上方, 同一深度路堤中的接触力大小几乎相同; 虚拟土拱的高度约为 $5(s-a)/6$ 。另外, 土拱形成后路堤中最大接触力为 1.153 kN, 远大于土拱未形成时的 0.539 kN, 表明由于桩土差异沉降形成的土拱, 将路堤的大部分荷载转移桩顶。

2.2 主应力方向分布

路堤填土颗粒间接触力链是路堤中荷载传递的媒介, 接触力链的重分布势必引起主应力方向的偏

转。其中, 主应力方向 θ 可表示为

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) \quad (2)$$

式中: σ_{xx} 、 σ_{xy} 和 σ_{yy} 分别表示水平、切向和竖向应力, 可通过测量圆进行量测。

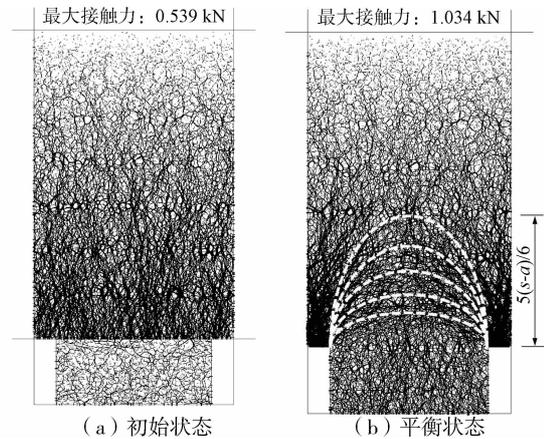


图 7 颗粒间接触力分布图

将路堤划分成若干相同尺寸的小方块, 对各小方块内的主应力方向进行计算统计, 并绘制成如图 8 所示的主应力方向分布图。

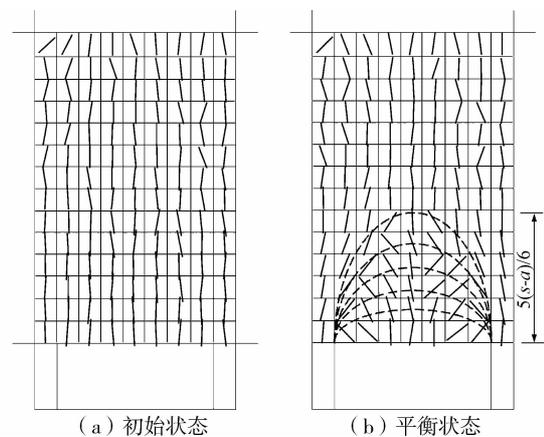


图 8 路堤中主应力方向分布图

图 8(a) 显示: 初始状态下, 地基中主应力方向基本都在竖直方向上, 该现象与实际相符, 再次表明了本文中所用模型的正确性。图 8(b) 显示: 平衡状态下, 路堤中已形成土拱, 桩顶一定范围内 (约距桩间土表面 $5(s-a)/6$ 高度内) 主应力的方向发生了明显的偏转; 桩顶上部的主应力方向向桩间偏转形成虚拟“拱结构”, 桩间土上方的主应力方向则向桩侧偏转, 呈散射状, 似“支撑体系”支撑着虚拟“拱结构”。

2.3 竖向位移分布

将路堤中最大竖向位移进行 16 等分, 并将同一等分范围内的颗粒用同一种颜色进行标记, 绘制竖向位移分布图, 如图 9 所示。图中显示: 路堤中的

最大竖向位移发生在桩间土表面中间位置,位移量为 3.432 mm;路堤中,桩顶一定范围内(距桩顶约 $5(s-a)/6$),同一范围竖向位移量的颗粒呈圆弧状分布;桩间土中,同一范围竖向位移量的颗粒呈悬链线状分布;桩顶颗粒竖向位移量明显小于其他区域颗粒的,且随距桩顶表面距离的减小而减小;较大竖向位移量的颗粒多集中在桩间土顶部一定范围内,且颗粒的竖向位移随距桩间土表面距离的减小而增加;桩间土同一深度处颗粒竖向位移分布相对较为均匀,沿深度方向小幅减小。

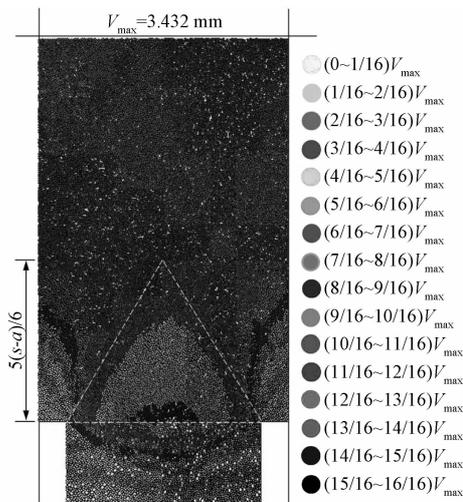


图 9 竖向位移分布图

2.4 侧向位移分布

将路堤中最大侧向位移进行 16 等分,并将在同一等分范围内的颗粒用同一种颜色进行标记,绘制侧向位移分布图,如图 10 所示。图中显示:较大的侧向位移发生在桩顶一定范围内(距桩顶约 $5(s-a)/6$),最大位移量为 0.747 mm,远小于竖向位移量;超过该范围后,路堤中颗粒的侧向位移量基本上处于最小的侧向位移量组($0 \sim 1/16 H_{\max}$);整体上,路堤中侧向位移以路堤的中心轴为对称轴呈对称分布,在路堤中心轴一定范围内,颗粒的位移量处于最小侧向位移量组;桩间土的侧向位移量较小,但分布规律性不明显。

图 7~10 显示:在桩顶 $5(s-a)/6$ 范围内,路堤填料内的接触力链和应力偏转明显,路堤填料的竖向和侧向位移较大;而与桩顶距离超过 $5(s-a)/6$ 后,接触力链与应力几乎没有发生偏转,路堤填料的竖向和侧向位移非常小且分布均匀。分析其原因:在自重作用下,由于桩土刚度差异导致桩土产生相对位移,这种相对位移从桩顶标高处不断向上传递,桩间土顶部填料颗粒向下运动,进而使桩顶和桩间

土顶部颗粒产生相互运动的趋势,该趋势导致了路堤填料间剪切力的产生以阻碍颗粒间的相互运动,路堤填料间剪切力将大部分路堤荷载传递至桩,进而减小桩间土上的荷载;桩土相对位移向上传递过程中,相对位移量逐渐减小,并在超过一定范围后可忽略不计。基于接触力链和应力的偏转,以及路堤填料竖向和侧向位移的分布情况,可以确定,路堤中土拱的高度约为 $5(s-a)/6$ 。

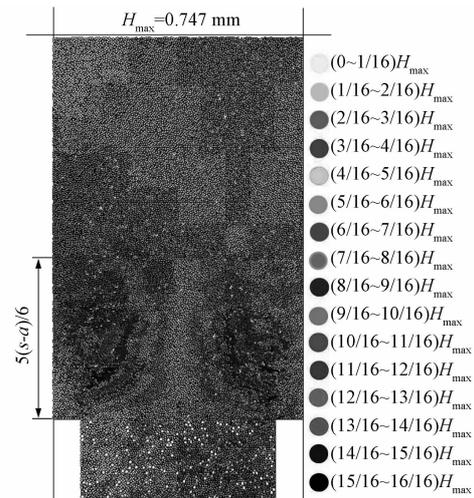


图 10 侧向位移分布图

另外,较大侧向位移发生范围与路堤填料内的接触力链和应力发生偏转的范围保持高度一致,可以推测,力链和应力的偏转主要是由侧向位移引起。

3 参数分析

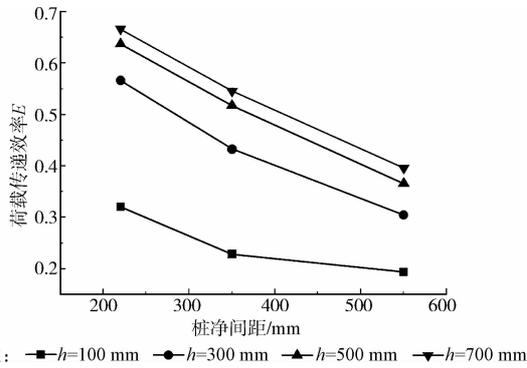
以桩净间距 $s-a=350$ mm,填土高度 $h=700$ mm 为基本工况,分析桩净间距($s-a$)和路堤填土高度 h 对路堤土拱效应的影响。

3.1 桩净间距影响

图 11 为不同桩净间距工况下荷载传递效率变化曲线。在同一填土高度工况下,路堤荷载传递效率随桩净间距的减小而增加。在不同填土高度工况下,桩净间距的变化量对荷载传递效率的影响随填土高度的增加而增加。

图 12 为路堤填土高度 $h=700$ mm,不同桩净间距工况下颗粒间接触力分布图,图中接触力线条按同一比例绘制。图中显示:在相同路堤填土高度工况下,路堤中最大接触力随桩净间距的增加呈增加趋势。然而,图 11 结果表明桩净间距的增加会导致荷载传递效率的减小。换句话说,路堤中最大接触力并不能表示路堤荷载传递效率的大小。图 12 还显示: $s-a=350$ mm 工况中路堤中接触力链所形成

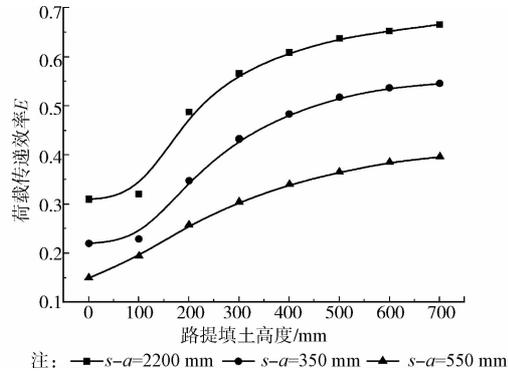
的虚拟拱不如其余工况的完整,使得路堤荷载传递效率远小于其余工况的。



注: \blacksquare $h=100$ mm \bullet $h=300$ mm \blacktriangle $h=500$ mm \blacktriangledown $h=700$ mm

图 11 不同桩净间距工况下荷载传递效率变化曲线

而增加;路堤中接触力链所形成的虚拟土拱的完整程度随路堤填土高度的增加呈增加趋势,从而将更多的路堤荷载传递至桩顶,提高路堤荷载传递效率。



注: \blacksquare $s-a=2200$ mm \bullet $s-a=350$ mm \blacktriangle $s-a=550$ mm

图 13 不同路堤填土高度工况下荷载传递效率变化曲线

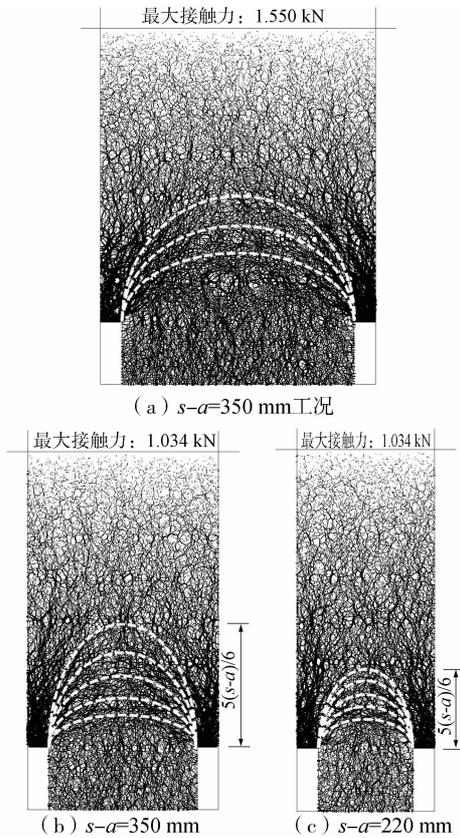


图 12 不同桩净间距工况下颗粒间接触力分布图

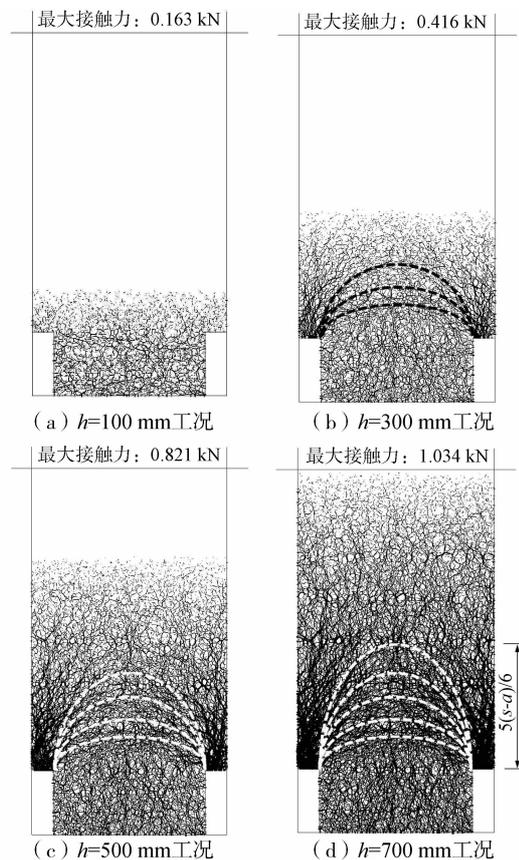


图 14 不同填土高度工况下颗粒间接触力分布图

3.2 填土高度影响

图 13 为不同路堤填土高度工况下荷载传递效率的变化曲线。在同一桩净间距工况下,路堤荷载传递效率随路堤填土高度的增加而增加,且增加幅度逐渐减小。

图 14 为桩净间距 $(s-a)=350$ mm,不同路堤填土高度工况下颗粒间接触力分布图,图中接触力线条按同一比例绘制。图中显示:在相同桩净间距工况下,路堤中最大接触力随路堤填土高度的增加

4 结论

基于室内模型试验,采用 PFC2D 建立离散元数值模型,对桩承式路堤中的接触力分布、主应力偏转、竖向位移和侧向位移进行深入分析,并主要得到以下结论:

1) 桩顶接触力在路堤中斜向上发展延伸,并在距桩间土表面一定高度内发生交叉,形成由多个不

同圆心半球形拱共同组成的虚拟土拱,拱的高度约为 $5(s-a)/6$ 。

2)距桩顶 $5(s-a)/6$ 高度内,主应力的方向发生了明显偏转,桩顶上部的土主应力向桩间偏转形成虚拟“拱结构”,桩间土上方的土主应力向桩侧偏转,呈散射状,支撑虚拟“拱结构”。

3)路堤中竖向位移和侧向位移主要发生在距桩顶 $5(s-a)/6$ 高度的路堤中,竖向位移量远大于侧向位移量。

4)在一定桩净间距范围内,路堤荷载传递效率随桩净间距的减小而增加,随路堤填土高度的增加而增加,路堤中土拱结构的完整程度与桩间距和路堤填土高度相关。

参考文献:

- [1] Han J, Gabr M. Numerical analysis of geosynthetic-reinforced and pile-supported earth platforms over soft soil [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2002, 128(1): 44-53.
- [2] Abusharar S W, Zheng J J, Chen B G, et al. A simplified method for analysis of a piled embankment reinforced with geosynthetics [J]. Geotextiles and Geomembranes, 2009, 27(1): 39-52.
- [3] Liu H L, Chu J, Deng A. Use of large-diameter cast-in situ concrete pipe piles for embankment over soft clay [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2009, 46(8): 915-927.
- [4] Terzaghi K. Theoretical soil mechanics [M]. New York: John Wiley and Sons, 1943.
- [5] Marston A, Anderson A O. The theory of loads on pipes in ditches and tests of cement and clay drain tile and sewer pipe [M]. Iowa Engineering Experiment Station Bulletin, Iowa State College, Ames, Iowa, 1913.
- [6] Hewlett W J, Randolph M F. Analysis of piled embankment [J]. Ground Engineering, 1988, 21(3): 12-18.
- [7] Guido V A, Kneuppel J D, Sweeny M A. Plate loading tests on geogrid-reinforced earth slabs [C]//Proceedings of the Geosynthetics'87. New Orleans, USA, 1987: 216-699.
- [8] Sintef. A computer program for designing reinforced embankments [C]//7th International Conference on Geotextiles, 2002: 201-204.
- [9] 郑俊杰, 张军, 马强, 等. 路桥过渡段桩承式加筋路堤现场试验研究[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(2): 355-362. Zheng J J, Zhang J, Ma Q, et al. Experimental investigation of geogrid-reinforced and pile-supported embankment at bridge approach [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(2): 355-362.
- [10] Chen R P, Xu Z Z, Chen Y M, et al. Field tests on pile-supported embankments over soft ground [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, 136(6): 777-785.
- [11] Liu H L, Ng C W, Fei K. Performance of a geogrid-reinforced and pile-supported highway embankment over soft clay: Case study [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, 133(12): 1483-1493.
- [12] 费康, 陈毅, 王军军. 加筋形式对桩承式路堤工作性状影响的试验研究[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(12): 2312-2317. Fei K, Chen Y, Wang J J. Experimental study on influence of reinforcing modes on behaviour of piled embankment [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(12): 2312-2317.
- [13] van Eekelen S J M, Bezuijen A, Lodder H J, et al. Model experiments on piled embankments. Part I [J]. Geotextiles and Geomembranes, 2012, 32: 69-81.
- [14] van Eekelen S J M, Bezuijen A, Lodder H J, et al. Model experiments on piled embankments. Part II [J]. Geotextiles and Geomembranes, 2012, 32: 82-94.
- [15] Jenck O, Dias D, Kastner R. Soft ground improvement by vertical rigid piles two-dimensional physical modelling and comparison with current design methods [J]. Soils and Foundations, 2005, 45(6): 15-30.
- [16] Zhang J, Zheng J J, Chen B G, et al. Coupled mechanical and hydraulic modeling of a geosynthetic-reinforced and pile-supported embankment [J]. Computers and Geotechnics, 2013, 52: 28-37.
- [17] Zheng J J, Abusharar S W, Wang X Z. Three-dimensional nonlinear finite element modeling of composite foundation formed by CFG-lime piles [J]. Computers and Geotechnics, 2008, 35(4): 637-643.
- [18] Jenck O, Dias D, Kastner R. Two-dimensional physical and numerical modeling of a pile-supported earth platform over soft soil [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, 133(3): 295-305.
- [19] Cundall P A, Strack O. A discrete numerical model for granular assemblies [J]. Geotechnique, 1979, 29(1): 47-65.
- [20] Itasca Consulting Group, Inc. PFC2D user's manual, version 4.0 [M]. Itasca Consulting Group, 2008.
- [21] Jiang M J, Konrad J M, Leroueil S. An efficient technique for generating homogeneous specimens for DEM studies [J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30(7): 579-597.
- [22] Kempfert H G, Zaeske D. Interactions in reinforced bearing layers over partial supported underground [C]//Twelfth European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, 1999: 1527-1532.