

考虑畸变的开口薄壁构件变形方程及其应用

金 声,程 睿,胡杰文,程明月

(重庆大学 土木工程学院,山地城镇建设与新技术教育部重点实验室,重庆 400045)

摘 要:为简化考虑截面畸变的薄壁杆件力学分析,提出一种把薄壁杆件拆分为两个较简单的部分分别分析、按需综合的方法。该文重点探讨截面畸变变形的效应分析:首先基于薄板小挠度弯曲理论,建立矩形板条的面外弯曲变形方程,然后适当简化截面畸变的变形形式和平衡条件,实现反映开口薄壁杆件畸变和扭转性能的“板件面外弯曲综合抗力体系”分析,最后与另文探讨的薄壁杆件“板件面内拉弯综合抗力体系”的分析进行综合,建立考虑截面畸变的开口薄壁杆件常微分变形方程。与目前较为常用的广义梁理论及有线条法相比,该方法无需进行截面正交分析或假定变形沿杆长的分布。为提高方法的实用性,文中还基于该变形方程,探讨了薄壁杆件单元刚度方程等矩阵位移法诸实现要件,据此编制的通用程序计算结论与基于壳单元的 ANSYS 软件算例结论吻合良好。

关键词:薄壁结构;畸变;约束扭转;薄板;有限杆元

中图分类号:TU392.5; O342 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2015)01-0096-08

Deformation equations of thin-walled open-profile members considering distortion and its application

Jin Sheng, Cheng Rui, Hu Jiewen, Cheng Mingyue

(School of Civil Engineering; Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: In order to simplify the analysis of thin-walled open-profile bars, a method is presented in which the analysis is split into two parts, dominated by in-plane and out-plane loading effects respectively. This article focuses on the out-plane loading effects. Based on bending theory of thin plate with small deflection, each slab or strip is analyzed separately and the results are integrated into vectors, in which, the deformation shapes and equilibrium conditions are simplified appropriately, thus leading to the *slabs' out-plane bending resistance system* of thin-walled bars, which reflects the properties of the bar's distortion and torsion. By composing the *slabs in-plane tension-bending resistance system* and the *slabs' out-plane bending resistance system*, deformation equations of thin-walled open-profile bars considering distortion are deduced. In order to set up the finite bar element method, stiffness equation and equivalent nodal forces of internode loadings are deduced. Comparative analysis with finite shell element method indicates the high efficiency and accuracy of this method.

Key words: thin-walled structures; distortion; constraint torsion; thin plate; finite member element

收稿日期:2014-05-29

基金项目:中央高校基本科研业务费(CDJRC10200002、CDJRC10200004);高等学校博士学科点专项科研基金(20110191120034)

作者简介:金 声(1975-),男,博士,主要从事薄壁结构及结构稳定理论研究,(E-mail)civiljs@cqu.edu.cn.

Received:2014-05-29

Foundation item: Fundamental Research Funds for the Central Universities(No. CDJRC10200002、CDJRC10200004); Doctoral Fund of Ministry of Education of China(No. 20110191120034)

Author brief: Jin Sheng(1975-), PhD, main research interests: thin-walled structures and stability of steel structures, (E-mail)civiljs@cqu.edu.cn.

由于局部失稳和畸变失稳是制约开口薄壁杆件承载能力的重要因素^[1],考虑截面畸变的开口薄壁杆件分析理论受到重视。符拉索夫针对闭口截面薄壁杆件,提出可考虑截面变形的广义坐标法^[2],目前广泛应用于箱形梁的分析中。在薄壁杆件约束扭转理论中,杆件不同的弯曲及扭转变形模式下,截面轴向变形相互正交;广义梁理论^[3-4]对此进行推广,提出畸变变形模式与弯曲及扭转变形模式下的截面轴向变形也具有正交性,探索了一条薄壁杆件考虑畸变的有效分析途径;该理论对于薄壁杆件失稳的屈曲模态辨别能力受到广泛重视^[5]。在广义梁理论的近期发展中,解决了当截面存在闭室、分支时的分析方法问题^[6]。文献^[7]还提出了一种建立广义梁方程的新方法,并通过构造特征值问题获得解析解。有限条法^[8]通过限定变形沿杆长分布的线型,在反映翘曲和畸变等变形因素的前提下,极大降低了问题的自由度。但由于变形沿杆长分布线型的限定性,该方法多用于杆件的屈曲^[9]或振动^[10]分析。有限单元法是处理薄壁杆件复杂变形和内力分布的有力工具^[11],但该方法对单元的选择、划分及求解方法等较为敏感,易遗漏变形模式,造成结论错误^[12]。这就要求分析人员对薄壁杆件,特别是其畸变的力学性质和变形特点有深入的认识^[13]。

由于涉及的应变因素较多,上述考虑畸变的分析方法中,结论均由能量法导出。本研究将薄壁杆件的分析拆分为分别以中面内和中面外荷载效应为主导的两个相互独立的部分,使得两部分分析的应力、应变和变形条件分别得到充分简化。在文献^[14]中探讨了其中第 1 个部分——反映杆件的拉压、弯曲和翘曲性质的“板件面内拉弯综合抗力体系”,文献^[15]在该体系的基础上提出了一种计算杆件约束扭转的方法。本文探讨组成开口薄壁杆的各板件面外弯曲的变形效应,利用矩阵运算将单肢或板条的分析进行综合,考察截面畸变及其影响。变形方程采用静力平衡法建立,以探讨薄壁杆件畸变的分析假定、力学性质和变形特点。分析中不进行基本变形模式的选择和正交化处理,不限定变形沿杆长分布的线型。

1 分析模型及其简化假定

1.1 开口薄壁截面及其节点

图 1 所示开口薄壁截面由 n 个板件组成,截面中线上共 $n+1$ 个关键节点,其中(2)~(n)号是各板件截面中线的交点。为推导的简便和一致,在关键节点(1)和($n+1$)处分别虚设了板件 0 和 $n+1$,分

别垂直于板件 1 和 n ;任意实际板件 i 在被关键节点再分为宽度分别是 $U b_i$ 、 $M b_i$ 、 $D b_i$ 的纵向板条的基础上,可进一步沿宽度方向任意再分,截面相应设置非关键节点,见图 1。横向荷载作用于各节点。

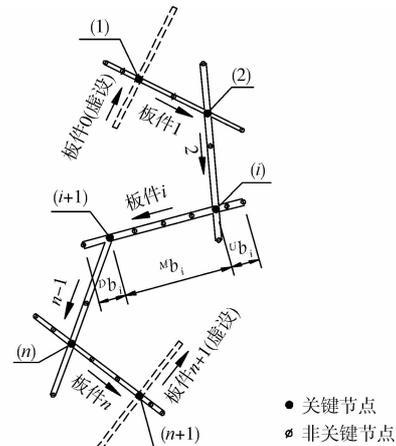


图 1 开口薄壁截面及其关键节点和非关键节点
Fig. 1 Key nodes and other nodes of a thin-walled open-section

1.2 板条边界荷载条件及其变形的简化假定

长度为 l 的薄壁杆,其板件 i 中任意一个板条 i_k 如图 2 所示,宽度为 $^k b_i$,两侧边分别编号为 1 和 2。对该板条建立直角坐标系 $Ox_1 y_1 z_1$,见图 2。根据薄板小挠度弯曲理论^[16],该板条侧边的荷载条件为

$$\begin{pmatrix} q_1^y(x) \\ q_2^y(x) \end{pmatrix} = D \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] \begin{pmatrix} w(x,0) \\ -w(x,^k b_i) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} m_1^y(x) \\ m_2^y(x) \end{pmatrix} = D \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{pmatrix} -w(x,0) \\ w(x,^k b_i) \end{pmatrix} \quad (2)$$

A 端的荷载条件为

$$q_A^x(y) = D \frac{\partial^3 w(0,y)}{\partial x^3} + (2-\nu) D \frac{\partial^3 w(0,y)}{\partial x \partial y^2} \quad (3)$$

$$m_A^x(y) = -D \left[\frac{\partial^2 w(0,y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(0,y)}{\partial y^2} \right] \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} V_{A1} \\ V_{A2} \end{pmatrix} = 2D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} w(0,0) \\ -w(0,^k b_i) \end{pmatrix} \quad (5)$$

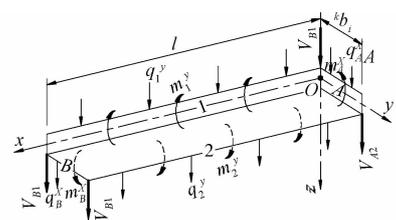


图 2 板条 i_k 的边缘荷载条件
Fig. 2 Loads on the edges of stripe i_k

其中: $D = \frac{E \cdot t_i^3}{12(1-\nu^2)}$ 为板件 i 的弯曲刚度; t_i 为板件 i 厚度; ν 为泊松比; w 为板件中面法线向挠度。

为简化分析,假设该板条的任意 x 截面挠曲线为三次曲线,则若已知该板侧边的 z 向挠度 $w_1(x)$ 、 $w_2(x)$ 和 x 向扭角 $\beta_1(x)$ 、 $\beta_2(x)$,可确定挠曲面方程

$$w(x, y) = \left(1 \quad \frac{y}{b_i} \quad \frac{y^2}{b_i^2} \quad \frac{y^3}{b_i^3} \right) \cdot \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ b_i \cdot \beta_1(x) \\ b_i \cdot \beta_2(x) \end{pmatrix} \quad (6)$$

虽然该板条并无板面横向荷载,但由于横截面线型假定, $D^4 w$ 通常并不为 0, 所以该假定相当于在板面额外施加 z 向分布荷载 Δq (见图 3)。

$$\Delta q = D \cdot \nabla^4 w \quad (7)$$

其中,算子 $\nabla^4(\cdot) = \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial y^4}$ 。

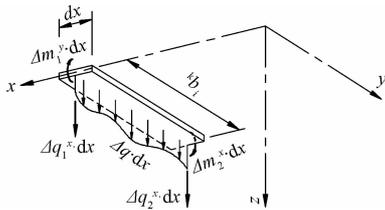


图 3 简化假定对微段板条 i_k 的影响

Fig. 3 Effects of simplifying measures on stripe i_k

1.3 节点扭角的确定及其简化

将式(6)代入式(2),得到挠曲面简化条件下板条 i_k 两侧的弯矩

$$\begin{pmatrix} m_1^y \\ m_2^z \end{pmatrix} = D \left[\frac{6C_1}{b^2} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \frac{2C_2}{b} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \nu \cdot C_3 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] \quad (8)$$

其中 $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

将式(8)应用于薄壁杆各板件的所有板条,并综合,得到作用在横截面各节点的 x 向外弯矩所组成的列向量 m_c^y , 其各元素均应为 0, 因此:

$$m_c^y = E \cdot (D_1 \cdot v_c + D_2 \cdot \beta_c + \nu D_3 \cdot v_c'') = 0 \quad (9)$$

其中列向量 v_c 由各板件截面的中线向位移 $v_0 \sim v_{n+1}$ (根据相邻板件间夹角关系, $v_0 \sim v_{n+1}$ 唯一确定了各关键节点的板面法向位移) 及非关键节点的板面法向位移组成。

由式(9)得节点的 x 向扭角所组成的列向量 β_c

$$\beta_c = -D_4 \cdot v_c - \nu \cdot D_5 \cdot v_c'' \quad (10)$$

为方法的简便计,略去式(10)中 v_c 的二阶项,得到 β_c 的近似表达式

$$\beta_c = -D_4 \cdot v_c \quad (11)$$

其中

$$D_4 = D_2^{-1} \cdot D_1 \quad (12)$$

由式(10)简化为式(11),对于板条 i_k 而言,相当于忽略式中 w 关于 x 的二阶偏导数项,或者相当于在板侧额外施加 x 向弯矩(见图 3)。

$$\begin{pmatrix} \Delta m_1^y(x) \\ \Delta m_2^z(x) \end{pmatrix} = \nu \cdot D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} w(x, 0) \\ -w(x, b_i) \end{pmatrix} \quad (13)$$

在广义梁理论中,考虑相邻板条间变形协调条件时,采用了类似简化措施,因此该理论在分析截面畸变翘曲与畸变横向变形之间的关系时,未考虑板件面外纵向弯曲的影响,从而将板条交线上的扭转角作为从自由度予以消除。因此,广义梁理论的完备性受到部分研究人员的质疑^[17]。若在广义梁理论中取消该简化措施,可消除该质疑;若在本文中取消该简化措施,将致导得的变形方程(26)阶次提高二阶,但仍可求解。考虑到该简化措施带来的误差较小,本文不作进一步讨论。

2 板件面外弯曲综合抗力体系

2.1 板件面外弯曲综合抗力体系的变形方程

在上节的分析中,在薄板小挠度弯曲理论的基础上对横截面的线型和板条间弯矩平衡条件进行了简化,对于图 3 所示长度为 dx 的微段板条 i_k ,这两个简化措施施加了荷载 $\Delta q \cdot dx$ 、 $\Delta m_1^y \cdot dx$ 和 $\Delta m_2^z \cdot dx$,假设由该微段侧边支反力 $\Delta q_1^x \cdot dx$ 和 $\Delta q_2^x \cdot dx$ 提供平衡,则

$$\begin{pmatrix} \Delta q_1^x(x) \\ \Delta q_2^x(x) \end{pmatrix} = -D \left[\frac{b}{20} C_4 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^{IV} + \frac{b^2}{60} C_5 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}^{IV} + \frac{2-\nu}{b} C_6 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}'' + 2C_3 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}'' \right] \quad (14)$$

其中 $C_4 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $C_5 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C_6 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 。

将挠曲面方程式(6)应用于式(1),并减去式(14),得到简化条件下该板条侧边的板面法向剪力

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = D \left[\frac{b}{20} C_4 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^{IV} + \frac{b^2}{60} C_2 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}^{IV} + \frac{2-\nu}{b} C_6 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}'' + \nu \cdot C_3 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}'' - \frac{12}{b^3} C_6 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \frac{6}{b^2} C_1^T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right] \quad (15)$$

式(15)应用于各板件的所有板条并综合,利用式消

去扭角项,得到相应于 v_c 的节点剪力 q_c

$$q_c = E\{F_1 \cdot v_c^N + [(2 - \nu)F_2 + \nu F_3]v_c'' + F_4 \cdot v_c\} \quad (16)$$

式(16)就是开口薄壁杆“板件面外弯曲综合抗力体系”的横向变形方程。

2.2 板件面外弯曲综合抗力体系的端部荷载条件

与板条横截面线型假定相适应,需要将板条端部荷载和约束条件向角点凝聚。

将式(6)应用于 A 端分布剪力式(3),然后向角点凝聚,并与 V_{A1} 、 V_{A2} 求和,得到 A 端剪力条件:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}_A = D \left[\frac{b}{20} C_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}_A + \frac{b^2}{60} C_2 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_A + \frac{2-\nu}{b} C_3 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}_A + \nu \cdot C_4 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_A \right] \quad (17)$$

同法将 A 端分布弯矩向角点凝聚,得到 A 端弯矩条件

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_A = -D \left[\frac{b}{20} C_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}_A + \frac{b^2}{60} C_2 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_A + \frac{\nu}{b} C_3 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}_A + \nu \cdot C_4 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_A \right] \quad (18)$$

式(17)、(18)分别应用于所有板条,综合得到板件面外弯曲综合抗力体系 A 端的荷载条件

$$Q_c^A = E\{F_1 \cdot v_c^{A'} + [(2 - \nu)F_2 + \nu \cdot F_3] \cdot v_c^{A'}\} \quad (19)$$

$$M_c^A = -E[F_1 \cdot v_c^{A'} + \nu(F_2 + F_3) \cdot v_c^A] \quad (20)$$

同法得到 B 端的荷载条件

$$Q_c^B = -E\{F_1 \cdot v_c^{B'} + [(2 - \nu)F_2 + \nu \cdot F_3] \cdot v_c^{B'}\} \quad (21)$$

$$M_c^B = E[F_1 \cdot v_c^{B'} + \nu(F_2 + F_3) \cdot v_c^B] \quad (22)$$

3 开口薄壁杆的变形方程和杆端力

前面所讨论的“板件面外弯曲综合抗力体系”中并未考虑各板件的面内变形刚度,而文献[14]则探讨了后者的分析,两者结论的综合可得到薄壁杆件各种变形情况下应力和荷载的完整分析结论。

3.1 考虑畸变的开口薄壁杆件变形方程

开口薄壁杆板件面内拉弯综合抗力体系的横向变形方程是^[14]

$$q = E \cdot J \cdot v^N \quad (23)$$

杆端反力是

$$Q_A = E \cdot J \cdot v''_A, Q_B = -E \cdot J \cdot v''_B \quad (24)$$

$$M_A = -E \cdot J \cdot v''_A, M_B = E \cdot J \cdot v''_B \quad (25)$$

综合两种抗力体系的变形方程(23)、(16),得到开口薄壁杆的横向变形方程

$$q_c = E\{F_5 v_c^N + [(2 - \nu)F_2 + \nu F_3]v_c'' + F_4 v_c\} \quad (26)$$

这是一个 $S_n + 1$ 元四阶常微分方程(横截面的节点总数计为 S_n)。其中, F_5 由 J 和 F_1 按元素对应关系迭加得到。

另外,杆件的纵向变形方程来自板件面内拉弯综合抗力体系的分析^[14]。

$$\bar{u}' = \frac{N}{EA} \quad (27)$$

3.2 变形方程应用举例

文献[18]、[19]采用广义梁理论计算了截面如图 4 所示的简支梁跨中处的变形和内力,梁长 1 200 mm,壁厚 3 mm,顶部作用有满跨均布线荷载 $q=0.01$ kN/mm,材料弹性模量 $E=210$ kN/mm²,泊松比 $\nu=0.3$ 。将式(26)应用于该例,并考虑边界条件,可得到一致结论。

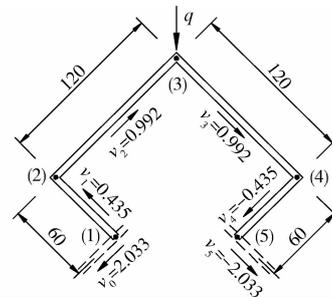


图 4 简支梁的截面尺寸及跨中位移

Fig. 4 Deflections of cross-section at the mid-span of a simply-supported beam

首先根据截面尺寸:确定式(26)中各系数矩阵(简洁起见,将各板件视为单独板条,不予再分);然后确定边界条件:由于两端简支,并注意到式(20)、(22)和(25),端截面位移 v_c 及其二阶导数均应为 0;最后采用 MATLAB 求解该常微分方程边值问题,得到 v_c 及其各阶导数沿杆长的分布。跨中截面的 $v_0 \sim v_5$ 示于图 4,可据此得到各节点的面内位移,与文献[18]、[19]中的广义梁理论结论一致;该截面的 $v''_1 \sim v''_4$ 依次为 -2.606×10^{-6} 、 6.509×10^{-6} 、 -6.509×10^{-6} 、 2.606×10^{-6} ,根据文献[14]中式(33),可知该简支梁跨中截面各节点的正应力满足

$$\sigma = -E \cdot J_5^T \cdot \{v''_1 \ v''_2 \ v''_3 \ v''_4\}^T \quad (28)$$

其中:

$$J_5 = \begin{bmatrix} -55 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ -80 & -80 & 40 & 40 & 40 \\ -40 & -40 & -40 & 80 & 80 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & 55 \end{bmatrix} \quad (29)$$

因此节点正应力与文献[18]、[19]中的广义梁理论结论也是一致的。

对比两种方法的分析过程可以发现,作为广义梁理论核心措施的截面变形模式分析,其效果是通过系数矩阵对角化对式解耦,该措施有利于方程的求解,特别在是手算条件下。但系数矩阵对角化并非求解线性方程的最有效方式,特别是以计算机作为求解工具时。而本文的方法则只需根据截面尺寸就可直接构造变形方程系数矩阵,无需较为繁琐的系列模式正交分析及其数据抽象,其求解则可交由成熟有效的数学计算工具完成。

3.3 考虑畸变的开口薄壁杆件杆端力

综合两体系的杆端反力(19)~(22)及(24)、(25),得到杆端横向力

$$f = E(F_6 \cdot \delta + F_7 \cdot \lambda) \quad (30)$$

其中:

$$f = \begin{pmatrix} M_c^A \\ Q_c^A \\ M_c^B \\ Q_c^B \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} v_c^{A'} \\ v_c^A \\ v_c^{B'} \\ v_c^B \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} v_c^{A''} \\ v_c^{A'''} \\ v_c^{B''} \\ v_c^{B'''} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$F_6 = \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 & -F_2 - F_3 & 0 & 0 \\ \frac{2-\nu}{\nu}F_2 + F_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_2 + F_3 \\ 0 & 0 & \frac{\nu-2}{\nu}F_2 - F_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$F_7 = \begin{pmatrix} 0 & -F_5 & 0 & 0 \\ F_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_5 \\ 0 & 0 & -F_5 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

杆端纵向力来自板件面内拉弯综合抗力体系的分析:

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_A \\ \bar{N}_B \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_A \\ \bar{u}_B \end{pmatrix} \quad (34)$$

根据变形方程(26)、(27)以及杆端力与位移的关系,可确定任意荷载和杆端约束条件下杆件的变形、内力以及反力。

4 开口薄壁杆件单元分析

在考虑截面畸变的情况下,由于未知量较多,杆件变形方程求解有一定难度,为此,编制了通用计算程序以提高其实用性。

为使本方法能融入常用杆系结构计算体系,程序的核心是薄壁杆件单元矩阵位移法的实现。为提高方法的准确性,并不预设而是直接采用MATLAB

求解微分方程所得到的数值形函数。基于程序的基本计算过程是:

首先根据截面尺寸及板件的再分方式,生成式(26)中诸系数矩阵,然后利用该方程建立单元刚度矩阵并计算结间荷载的等效结点力,最后在整体刚度方程求解结论的基础上,确定单元的变形和内力分布。

在有限元法中,杆件单元分析的任务是:1)建立单元刚度方程;2)计算结间荷载的等效结点力;3)在整体分析结论的基础上,确定单元的变形和内力分布。这些任务的基本实现措施简要说明如下:

4.1 单元分析的措施

首先对变形微分方程进行降阶。通过构造薄壁杆的广义横向位移函数列向量 $g(x)$,可将 $S_n + 1$ 元四阶常微分方程(26)转化为 $4S_n + 4$ 元一阶常微分方程

$$\text{令: } g(x) = \begin{pmatrix} v_c'(x) \\ v_c(x) \\ v_c'''(x) \\ v_c''(x) \end{pmatrix}, \text{ 则: } g'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_5^{-1}F_4 & 0 & -F_5^{-1}[(2-\nu)F_2 + \nu \cdot F_3] \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix} \cdot g(x) + \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_5^{-1}q_c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

对应于单元分析的 3 个任务:1)在式(35)中,令 $q_c = 0$,使之成为齐次方程,求解可得薄壁杆件的单元刚度方程;2) $q_c \neq 0$ 时,根据固端杆的端部位移条件,求解非齐次方程(35),得到 q_c 的等效端部力。3)根据已知的端部位移条件,求解方程(35),得到广义横向位移函数沿杆长的分布,从而确定单元的变形和内力分布情况。

4.2 开口薄壁杆的单元刚度方程

任意选取 $4S_n + 4$ 组线性无关的初值向量 ${}^{1 \sim 4S_n+4} g_A$,采用 Rounq-Kutad 等数值方法,确定齐次方程相应的 $4S_n + 4$ 组解函数列向量 ${}^{1 \sim 4S_n+4} g(x)$,记它们所组成的函数阵为

$$\Gamma(x) = \{ {}^1 g(x) \quad \cdots \quad {}^{4S_n+4} g(x) \} \quad (36)$$

因 Γ_A 各列向量(即 ${}^{1 \sim 4S_n+4} g_A$)线性无关, $\Gamma(x)$ 和 Γ_B 各列向量均分别线性无关。

对于线性问题,广义横向位移函数在两端的值

之间具有线性转换关系,记为

$$\lambda = F_8 \cdot \delta \quad (37)$$

根据式(31)可知,杆端变形列向量 δ 和 λ 由 g_A 和 g_B 的元素组成,因此,把 Γ_A 和 Γ_B 代入上式,得到转换关系矩阵

$$F_8 = \{ {}^1\lambda \quad \dots \quad {}^{4S_n+4}\lambda \} \cdot \Psi^{-1} \quad (38)$$

其中:

$$\Psi = \{ {}^1\delta \quad \dots \quad {}^{4S_n+4}\delta \} \quad (39)$$

把式(37)代入式(30),得到杆端横向力与横向位移间的关系

$$f = E \cdot F \cdot \delta \quad (40)$$

其中:

$$F = F_6 + F_7 \cdot F_8 \quad (41)$$

综合式(40)和(34),得到考虑畸变的开口薄壁杆单元刚度方程

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_A \\ \bar{M}_c^A \\ \bar{Q}_c^A \\ \bar{N}_B \\ \bar{M}_c^B \\ \bar{Q}_c^B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} A/l & 0 & -A/l & 0 \\ 0 & F^{UL} & 0 & F^{UR} \\ -A/l & 0 & A/l & 0 \\ 0 & F^{DL} & 0 & F^{DR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_A \\ v_c^A \\ \bar{u}_B \\ v_c^B \end{pmatrix} \quad (42)$$

式(42)中, $2S_n+2$ 阶方阵 F^{UL} 、 F^{UR} 、 F^{DL} 、 F^{DR} 是 F 的分块矩阵

$$F = \begin{pmatrix} F^{UL} & F^{UR} \\ F^{DL} & F^{DR} \end{pmatrix} \quad (43)$$

4.3 结间荷载的等效节点力及广义横向位移函数沿杆长的分布

任选一组始端条件 0g_A , 求解非齐次方程(35), 得到广义位移函数沿杆长的分布 ${}^0g(x)$, 特别的, 在末端的值 0g_B 。根据式(30), 此时杆端力是

$${}^0f = E(F_6 \cdot {}^0\delta + F_7 \cdot {}^0\lambda) \quad (44)$$

对于无结间荷载的固端杆, 当杆端位移为 ${}^1\delta = -{}^0\delta$ 时, 根据式, 可知杆端力为

$${}^1f = -E \cdot F \cdot {}^0\delta \quad (45)$$

杆端位移 ${}^1\delta$ 在以 Ψ 的各列向量为基的空间中的坐标是 $\Psi^{-1} \cdot {}^1\delta$, 此时, 广义横向位移函数 ${}^1g(x)$ 在以 $\Gamma(x)$ 各列向量为基的函数空间中的坐标与之相同, 因此

$${}^1g(x) = -\Gamma(x) \cdot \Psi^{-1} \cdot {}^0\delta \quad (46)$$

综上可知, 对于作用有横向荷载 q 的固端杆(杆端位移 $\delta=0$), 杆端力是

$${}^{\parallel}f = {}^0f + {}^1f = E \cdot F_7 \cdot (-F_8 \cdot {}^0\delta + {}^0\lambda) \quad (47)$$

广义横向位移函数是

$${}^{\parallel}g = {}^0g + {}^1g = {}^0g - \Gamma(x) \cdot \Psi^{-1} \cdot {}^0\delta \quad (48)$$

可见横向荷载 q 的等效结点力是

$$f_q = -{}^{\parallel}f = E \cdot F_7 \cdot (F_8 \cdot {}^0\delta - {}^0\lambda) \quad (49)$$

而作用有结间横向荷载 q , 且杆端位移为 δ 的杆件单元的广义横向位移函数是

$$g = \Gamma(x) \cdot \Psi^{-1} \cdot \delta + {}^{\parallel}g = {}^0g + \Gamma(x) \cdot \Psi^{-1} \cdot (\delta - {}^0\delta) \quad (50)$$

根据其向量构成, 可知广义横向位移函数描述了位移、内力等沿杆长的分布。

上述计算过程具有通用性, 可予以程序化, 已采用 MATLAB 实现。整体刚度方程的合成和求解无特殊性, 不再赘述。

5 实例对比分析

图 5 所示悬臂开口薄壁杆, 长度 $l=6$ m, 壁厚 $t=10$ mm, 横截面尺寸示于图 6, 在自由端横截面开口侧和距自由端 2.5 m 的横截面关键节点(2)处, 分别作用有平行于 y 轴的集中荷载 $Q=50$ kN, 板件 2 表面垂直作用有沿其宽度等分线均匀分布的线荷载 $q=5$ kN/m。材料弹性模量 $E=206$ kN/mm², 泊松比 $\nu=0.3$ 。采用本文所介绍的方法和通用有限元分析软件 ANSYS 分别分析该杆件, 并对比两者结论。

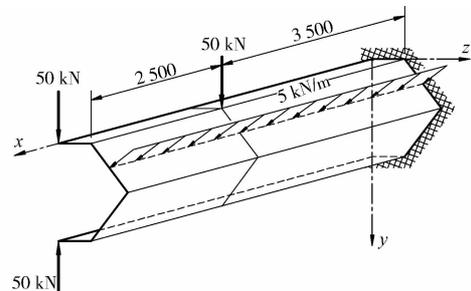


图 5 悬臂开口薄壁杆

Fig. 5 A thin-walled open-profile cantilever

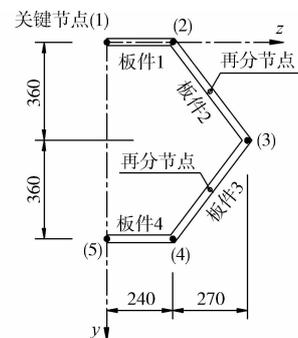


图 6 悬臂杆横截面尺寸及节点设置

Fig. 6 Dimensions and nodes of the cross-section

在 ANSYS 中, 采用三维壳单元 Shell63 离散该

杆件,沿长度方向等分为 120 段,沿各板件截面宽度方向分别等分为 8 段。

在本文的方法中,根据荷载情况,将杆件划分为长度分别是 2.5、3.5 m 的两个杆件单元,实施杆系结构有限元分析并计算各单元内力和位移分布,方法如前所述。在分析中,对板件 2 和 3 分别采用一个非关键节点沿宽度方向各等分为两个纵向板条(详图 6),对板件 1 和 4 未作再分。

两种方法所得到的杆件整体变形一致,示于图 7。可任选纵、横向断面,对位移、应力、应变等项沿杆长或横截面中线的分布作细化对比,如图 8~11。

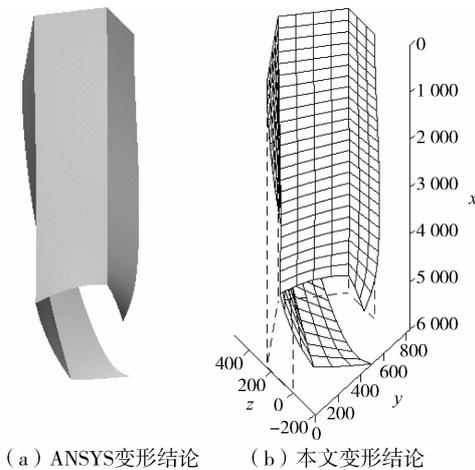


图 7 杆件变形轴测图

Fig. 7 Axonometric drawings of the deformed cantilever

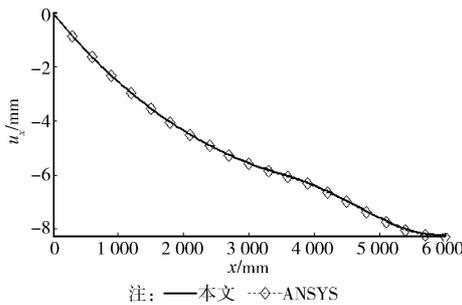


图 8 关键节点(1)纵向位移沿杆长的分布

Fig. 8 Longitudinal displacements of key node(1) along span

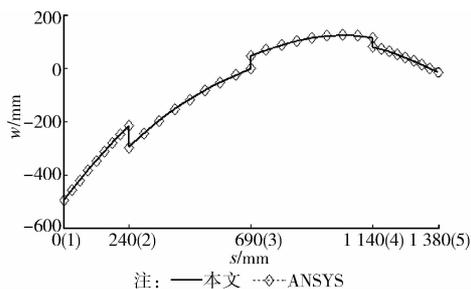


图 9 自由端截面的板面法向位移展开图

Fig. 9 Normal displacements along mid-line of free-end cross-section

图 9、11 的横坐标是沿横截面中线的曲线坐标,坐标轴上标出了各关键节点及其相应坐标值。图 9 的各段曲线弯曲程度反映了截面各板件的畸变情况。因为本方法假定板件横截面中线上的正应变线性分布,所以在杆端和集中荷载作用点处的应变结论与 ANSYS 略有出入(图 10),符合预期。图 8~11 的细化对比表明本文所提出的方法准确度较高。

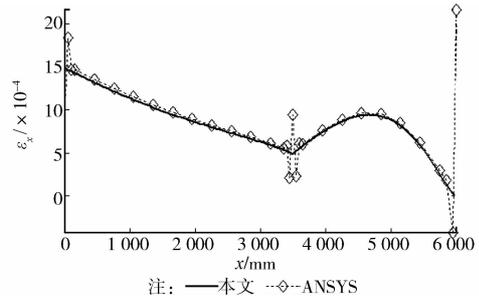


图 10 关键节点(2)正应变沿杆长的分布

Fig. 10 Normal strains of key node(2) along span

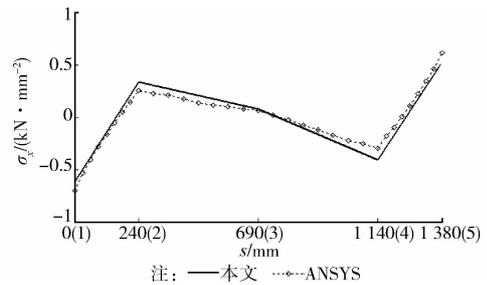


图 11 固端截面中线正应力展开图

Fig. 11 Normal stresses along mid-line of fixed end

对比表明,较之基于壳单元的有限元法,本文所实现的考虑畸变的杆件有限元法在保持了较高的适用性和准确性的同时,还具有建模简便,计算规模小、效率高的特点。

6 结论

从薄板小挠度弯曲理论出发,探讨了开口薄壁杆的板件面外弯曲综合抗力体系;综合板件面内拉弯综合抗力体系与板件面外弯曲综合抗力体系,导出考虑畸变的开口薄壁杆件变形控制方程。在此基础上,推导了杆系有限元法诸实现要件,如单元刚度方程,等。针对作用有复杂荷载的具体实例,与基于壳单元的 ANSYS 分析结论进行了对比。得到如下结论:

1) 薄壁杆件的分析可以拆分为分别以薄壁中面内荷载效应和中面外荷载效应为主导的两个相互独立的部分,使两部分分析的应力、应变及变形条件得

到充分简化,有利于对薄壁杆件的翘曲、畸变等变形因素形成更明确、直接的认识。

2)板件面外弯曲综合抗力体系反映了开口薄壁杆件的畸变和扭转性能。

3)本文所推导的开口薄壁杆件单元刚度方程中的杆端位移与荷载列向量的物理意义明确具体,便于杆件有限元整体分析的实施。

4)在板件组合型开口薄壁杆的分析中,假设各板件纵向位移沿横截面中线方向线性分布,并适当简化截面畸变的变形形式和平衡条件,能有效降低计算规模,且满足工程精度要求。

参考文献:

- [1] Schafer B W. Review: The direct strength method of cold-formed steel member design [J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2008, 54(2/3): 766-778.
- [2] 包世华,周坚. 薄壁杆件结构力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006.
- [3] Davies J M, Leach P. First-order generalised beam theory [J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 1994, 31(2/3): 187-220.
- [4] Silvestre N, Camotim D. First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials [J]. *Thin-Walled Structures*, 2002, 40: 755-789.
- [5] Casafont M, Marimon F, Pastor M M. Calculation of pure distortional elastic buckling loads of members subjected to compression via the finite element method [J]. *Thin-Walled Structures*, 2009, 47(6/7): 701-729.
- [6] Gonçalves R, Dinis P B, Camotim D. GBT formulation to analyse the first-order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections [J]. *Thin-Walled Structures*, 2009, 47: 583-600.
- [7] Jönsson J, Andreassen M J. Distortional eigenmodes and homogeneous solutions for semi-discretized thin-walled beams [J]. *Thin-Walled Structures*, 2011, 49(6): 691-707.
- [8] Cheung Y K, Tham L G. The finite strip method [M]. CRC Press, 1998.
- [9] Ádány S, Schafer B W. A full modal decomposition of thin-walled, single-branched open cross-section members via the constrained finite strip method [J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2008, 64: 12-29.
- [10] 夏飞,辛克贵. 薄壁曲梁振动分析的样条有限杆元法 [J]. *工程力学*, 2009, 26(3): 1-5.
- Xia F, Xin K G. The spline finite member element method in vibration analysis of thin-walled curved beams [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, 26(3): 1-5. (in Chinese)
- [11] Rust W, Schweizerhof K. Finite element limit load analysis of thin-walled structures by ANSYS(implicit), LS-DYNA (explicit) and in combination [J]. *Thin-Walled Structures*, 2003, 41(2/3): 227-244.
- [12] Schafer B W, Li Z, Moen C D. Computational modeling of cold-formed steel [J]. *Thin-Walled Structures*, 2010, 48: 752-762.
- [13] Silvestre N, Camotim D. On the mechanics of distortion in thin-walled open sections [J]. *Thin-Walled Structures*, 2010, 48: 469-481.
- [14] 金声,李开禧,戴国欣. 开口薄壁杆的板件面内拉弯综合抗力体系[J]. *土木建筑与环境工程*, 2012, 34(3): 58-64.
- Jin S, Li K X, Dai G X. Slabs' in-plane tension-bending resistance system of thin-walled open-profile bar [J]. *Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering*, 2012, 34(3): 58-64. (in Chinese)
- [15] 金声,李开禧. 薄壁杆约束扭转的单肢解析化分析方法 [J]. *计算力学学报*, 2009, 26(6): 956-960.
- Jin S, Li K X. Slabs-dissassembled method of thin-walled bar analysis considering restrained torsion [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, 26(6): 956-960. (in Chinese)
- [16] 徐芝纶. 弹性力学简明教程[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [17] 徐翔,郝际平. 关于截面可变形薄壁梁的方法论研究 [J]. *西安建筑科技大学学报: 自然科学版*, 2008, 40(2): 176-183.
- Xu X, Hao J P. Methodology study on sectionally deformable thin-walled beam theory [J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology: Natural Science Edition*, 2008, 40(2): 176-183. (in Chinese)
- [18] Schardt R. Verallgemeinerte Technische Biegetheorie [J]. Berlin: Springer Verlag, 1989. (in German)
- [19] 徐翔. 基于广义梁理论(GBT)的线弹性薄壁梁考虑截面畸变的翘曲研究[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2003.

(编辑 王秀玲)