



# 基于精细梁模型的向量式有限元分析

陈冲<sup>1</sup>, 袁行飞<sup>1</sup>, 段元锋<sup>1</sup>, 钱若军<sup>2</sup>

(1. 浙江大学空间结构研究中心, 杭州 310058; 2. 同济大学土木工程学院, 上海 200092)

**摘要:**精细梁不同于 Euler 梁和 Timoshenko 梁, 该模型在考虑剪切变形的同时还考虑了横向弯曲时截面转动产生的附加轴向位移及横向剪切变形影响截面抗弯刚度后产生的附加横向位移。推导了适用于向量式有限元分析的精细梁单元应变和内力表达式, 采用 FORTRAN 自编了向量式有限元程序。对悬臂梁、两端固支梁和门式框架进行了算例分析, 对比了采用不同梁单元模型下结构的竖向位移。结果表明: 当高跨比较小时, 3 种梁单元的竖向位移相差不大; 当高跨比较大时, 精细梁单元的竖向位移较 Euler 梁和 Timoshenko 梁明显增大, 表明剪切变形及刚度折减引起的附加轴向位移、附加横向位移不能忽略。精细梁单元模型对高跨比较大的梁进行分析可望得到更精确的结果。

**关键词:** Euler 梁; Timoshenko 梁; 精细梁; 向量式有限元; 高跨比

**中图分类号:** TU311.4    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1674-4764(2015)02-0001-07

## Vector form intrinsic finite element analysis based on fine beam model

Chen Chong<sup>1</sup>, Yuan Xingfei<sup>1</sup>, Duan Yuanfeng<sup>1</sup>, Qian Ruojun<sup>2</sup>

(1. Space Structures Research Center, Zhejiang University, Hangzhou 310058, P. R. China;

2. College of civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

**Abstract:** The proposed fine beam model is different from that of Euler beam and Timoshenko beam. Some effects were considered in the new model such as shear displacement, the additional axial displacement produced by lateral bending and the additional transverse displacement produced by reduced stiffness due to transverse shear deformation. The formula of strain and internal force of the fine beam model, applied to Vector Form Intrinsic Finite Element (VFIFE) analysis, were derived and corresponding programs were developed by Fortran language. Cantilever beam, both ends clamped beam and portal frame are analyzed and the vertical displacements were compared using different beam element models. Numerical results showed that when the depth-span ratio was relatively small, the vertical displacements obtained by different beam model had slight difference. When the depth-span ratio was larger, the vertical displacement obtained by the fine beam model was obviously larger than that obtained by the Euler beam and Timoshenko beam. Therefore, the shear displacement, the additional axial displacement and the additional transverse displacement caused by stiffness reduction should not be ignored when the deep beam was analyzed. The new beam model proposed in this paper demonstrated more accurate results when the beam had a large depth-span ratio.

**Key words:** Euler beam model; Timoshenko beam model; fine beam model; VFIFE; depth-span ratio

**收稿日期:** 2014-10-11

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51278461); 浙江省重点科技创新团队(2010R50034)

**作者简介:** 陈冲(1986-), 男, 博士, 主要从事大跨空间结构相关研究, (E-mail)lhcc1986@163.com。

**Received:** 2014-10-11

**Foundation item:** National Natural Science Foundation of China(51278461); Zhejiang Province Key Science & Technology Innovation Team(No. 2010R50034)

**Author brief:** Chen Chong (1986-), doctoral candidate, main research interest: space structures, (E-mail)lhcc1986@163.com。

向量式有限元(Vector Form Intrinsic Finite Element, VFIFE)是由美国普渡大学丁承先教授提出的一种新型有限元方法,已在土木工程领域得到了较好应用<sup>[1-4]</sup>。目前,向量式有限元中广泛采用的梁模型是经典的 Euler-Bernoulli 梁模型,如喻莹等<sup>[5]</sup>对 Euler 梁结构的几何破坏、材料破坏以及倒塌破坏作了分析,张若京等<sup>[6]</sup>基于 Euler 梁分析了悬臂梁的几何非线性行为,梁育铭等<sup>[7]</sup>模拟了 Euler 梁、杆构件组成结构的施工力学行为。可以肯定的是,当所研究梁的高度远小于跨度时,采用 Euler 梁模型进行分析可得到较精确的解。当梁高跨比较大时,由于剪切影响显著,Euler 梁模型不再适用。为考虑剪切变形影响,Timoshenko<sup>[8]</sup>于 1921 年提出了剪切变形理论,后人称其为 Timoshenko 梁模型。Thomas<sup>[9]</sup>、Nickell 等<sup>[10]</sup>使用不同阶数的多项式描述变形和旋转的变化,分析深梁得到了较合理结果,但分析细长梁时产生了剪力自锁现象。Reddy<sup>[11]</sup>提出 IIE(Interdependent Interpolation Element, IIE)法解决剪力自锁问题。李彦辉等<sup>[12]</sup>将 IIE 法应用于向量式有限元,探讨了剪切变形对梁结构的影响,但没有考虑变形间的耦合作用。本课题组钱若军等<sup>[13]</sup>基于变形分析建立了考虑变形耦合作用的空间梁任意点位移表达式,并推导了两节点十自由度的空间梁单元模型。上述研究主要基于传统有限元方法展开,在向量式有限元中的有效性和可行性还有待于验证。

本文以考虑变形耦合作用的空间精细梁理论为基础,推导了适用于向量式有限元的精细梁单元应变和内力计算公式,采用 FORTRAN 自编了向量式有限元程序。并通过算例分析验证本文精细梁模型的正确性。

## 1 向量式有限元及梁单元

向量式有限元是一种以向量力学为理论基础,以数值计算为描述方法的分析方法<sup>[14]</sup>。

### 1.1 向量式有限元基本概念

1)点值描述 将构件离散成有限的空间点,并通过一组内插函数来描述构件上其他点的空间位置。经过简化以后,构件的质量可以按照一定的方法分配到各点并且可以用牛顿运动定律分析结构。

2)途径单元 把构件上空间点的时间轨迹离散成一组时间点,通过一组标准的控制方程,空间点从一个时间点的位置到达另一个时间点的位置,这一

时间段称为途径单元。简化后,可以用大变位和小变形理论分析大变形问题。

3)逆向运动 如图 1 所示,杆件从 12 位置平移至 1'2'位置,再以点 1'为中心逆向旋转至 1<sub>d</sub>2<sub>d</sub>,1<sub>d</sub>2<sub>d</sub>与 1<sub>a</sub>2<sub>a</sub>在同一直线的位置,这一过程即逆向运动。向量式分析通过虚拟的逆向运动来处理纯变形,进一步由纯变形得到单元内力。

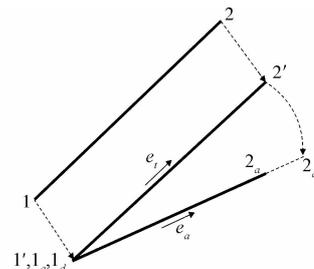


图 1 虚拟逆向运动

Fig. 1 Virtual inverse motion

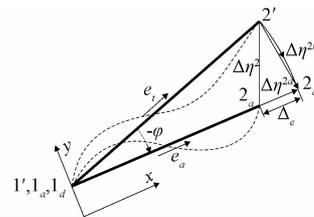


图 2 平面梁系结构变形

Fig. 2 Deformation of plane beam

### 1.2 Euler 梁单元

如图 2 所示,假设单元由初始位置 1<sub>a</sub>2<sub>a</sub> 运动到下一时间点 12,根据 Euler 梁的挠曲理论,杆件任意截面上一点的变形满足下列关系<sup>[14]</sup>:

$$u = u_m - y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

式中:  $u_m$  为  $x$  轴与截面交点的轴向位移,  $v$  为  $y$  方向位移,  $\varphi$  为空间转角。采用传统有限元的形函数,可得  $u_m$ 、 $v$ 、 $\varphi$  表达式:

$$\begin{cases} u_m \\ v \\ \varphi \end{cases} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} xl & 0 & 0 \\ 0 & -x^3 + 2x^2l - xl^2 & -x^3 + x^2l \\ 0 & 3x^2 - 4xl + l^2 & 3x^2 - 2xl \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta_e \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{cases} \quad (2)$$

根据虚功原理,可得单元内力与节点变形关系为

$$\begin{cases} f_{2x} \\ m_{1z} \\ m_{2z} \end{cases} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & 4I_a & 2I_a \\ 0 & 2I_a & 4I_a \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta_e \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $A_a = \int_{A_a} dA_a$ ,  $I_a = \int_{A_a} y^2 dA_a$ 。  $E$ 、 $l$ 、 $A_a$ 、 $I_a$  分别为杆件元弹性模量、长度、截面面积和截面惯性矩。

进一步由节点力平衡,求得节点其它内力分量。

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, f_{1x} = -f_{2x} \\ \sum M_1 &= 0, f_{2y} = -(m_{1z} + m_{2z})/l \\ \sum F_y &= 0, f_{1y} = -f_{2y} \end{aligned} \quad (4)$$

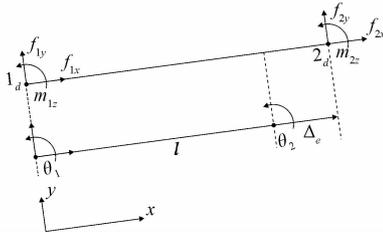


图 3 梁单元节点力和弯矩

Fig. 3 Particle force of plane beam

## 2 精细梁模型

### 2.1 拉压、弯、剪、扭、翘曲及其耦合效应作用下空间梁任意一点的位移

在外荷载作用下,空间梁同时发生轴向拉压、弯曲、剪切和扭转。相应会产生轴向、弯曲和剪切变形,以及横截面的翘曲变形,如图 4<sup>[15]</sup>。

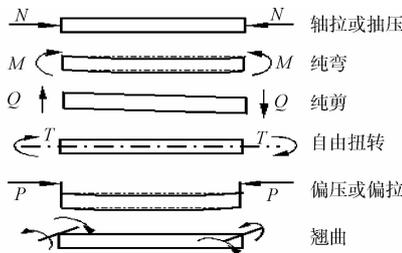


图 4 梁的受力状态

Fig. 4 the stress state of beam

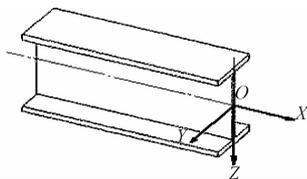


图 5 等截面梁惯性系

Fig. 5 the coordinate of space beam

在坐标系  $O-XYZ$ (如图 5 所示)中,等截面梁任意一点的位移为<sup>[15]</sup>

$$\begin{aligned} u &= u_T + u_b + u_{bs} + u_s + u_\Delta + u_\omega \\ v &= v_b + v_{bs} + v_s + v_\Delta \\ w &= w_b + w_{bs} + w_s + w_\Delta \end{aligned} \quad (5)$$

其中:  $\xi = \rho\theta_x$ ;  $u_T$  为轴向拉压产生的轴向位移;  $u_b$  为在弯矩作用下梁发生横向弯曲时截面转动产生轴向位移;  $u_{bs}$  为考虑梁横向剪切变形影响截面的抗弯刚度后产生的附加挠度而使得梁截面转动产生的修正轴向位移;  $u_s$ 、 $v_s$ 、 $w_s$  为剪力产生的轴向位移和横向剪切位移;  $v_b$ 、 $w_b$  为由于梁在弯矩作用下产生的横向弯曲位移;  $v_{bs}$ 、 $w_{bs}$  为考虑梁横向剪切变形影响截面的抗弯刚度后,产生的附加横向位移;  $u_\Delta$ 、 $v_\Delta$ 、 $w_\Delta$  为考虑轴力二次效应影响产生的轴向位移及横向位移;  $u_\omega$ 、 $\xi$  为约束扭转引起的轴向位移及切向位移;  $\theta_x$  为截面扭转角<sup>[15]</sup>。

本文暂不考虑二次效应影响以及约束扭转引起的轴向位移及切向位移,对以上梁单元作适当简化,等截面空间梁中任意一点的位移为

$$\begin{aligned} u &= u_T + u_b + u_{bs} + u_s \\ v &= v_b + v_{bs} + v_s \\ w &= w_b + w_{bs} + w_s \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $u_T$ 、 $v_b$ 、 $w_b$  为常规 Euler 梁中的轴向位移和横向弯曲位移,  $w_s$ 、 $v_s$  为横向剪切位移,  $u_b$ 、 $u_{bs}$ 、 $v_{bs}$ 、 $w_{bs}$ 、 $u_s$  为考虑变形耦合的修正位移。

### 2.2 修正位移表达式

根据精细梁的理论可得各项修正位移为:

1) 横向弯曲导致截面转动产生的轴向位移  $u_b$ <sup>[15]</sup>。弯曲导致截面转动从而产生的沿  $x$  轴方向的位移为

$$u_{vb} = -y\theta_{zb}, u_{wb} = -z\theta_{yb} \quad (7)$$

其中:  $\theta_{zb}$  与  $\theta_{yb}$  为空间梁弯曲变形后中和轴的转角。

则由于梁横向弯曲时截面转动而产生的轴向位移为

$$u_b = u_{vb} + u_{wb} \quad (8)$$

2) 横向剪切变形影响截面抗弯刚度后产生的轴向位移  $u_{bs}$  和横向位移  $v_{bs}$ 、 $w_{bs}$ <sup>[15]</sup>。考虑梁的抗弯刚度受横向剪切变形影响后,产生的附加挠度而使得梁截面转动产生的轴向位移  $u_{bs}$  为

$$u_{bs} = u_{vs} + u_{ws} = \beta_{ys}u_{vb} + \beta_{zs}u_{wb} \quad (9)$$

对于  $y$ 、 $z$  轴方向截面抗弯刚度受剪切变形影响后产生的附加挠度而使得梁截面转动产生的横向位移分别有

$$v_{bs} = \beta_{ys}v_b, w_{bs} = \beta_{zs}w_b \quad (10)$$

式中:  $\beta_{ys} = -\frac{\varphi_y}{1+2\varphi_y}$ ,  $\beta_{zs} = -\frac{\varphi_z}{1+2\varphi_z}$ 。

$\varphi_y$ 、 $\varphi_z$  是由于剪切影响对  $y$  轴和  $z$  轴方向抗弯刚度的影响系数,  $\varphi_y = \frac{12K_sEI_z}{GA_{sy}L^2}$ ,  $\varphi_z = \frac{12K_sEI_y}{GA_{sz}L^2}$ ,  $A_{sy}$ 、 $A_{sz}$  为杆截面沿  $y$  轴和  $z$  轴的有效抗剪面积;  $I_y$ 、 $I_z$  是  $y$  轴和  $z$  轴主惯性矩,  $L$  是相当长度,  $K_s$  为

剪切效应的截面影响系数。

3) 横向剪切变形引起的轴向位移  $u_s$  [15]。梁的剪切变形引起的沿  $x$  轴的位移  $u_{s,y}$  和  $u_{s,z}$  分别沿截面高度和宽度按三次曲线变化,即

$$\begin{cases} u_{s,y} = -y^3 \frac{4}{3b^2} \frac{\partial v_s}{\partial x} \\ u_{s,z} = -z^3 \frac{4}{3h^2} \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{cases} \quad (11)$$

剪切变形引起的沿  $x$  轴的总位移  $u_s$  :

$$u_s = u_{s,y} + u_{s,z} \quad (12)$$

式中:  $h, b$  分别为梁横截面高度和宽度。

### 3 应用于向量式有限元的精细梁模型

#### 3.1 精细梁单元节点位移及应变

基于精细梁理论,可得二维梁单元的位移公式为

$$u = u_T + u_b + u_{bs} + u_s \quad (13)$$

$$v = v_b + v_{bs} + v_s$$

假设位移形函数:  $u_T = a_1 + a_2x, v_b = -\left(a_3 \frac{x^3}{6} + a_4 \frac{x^2}{2} + a_5x + a_6\right), v_s = \Omega a_3 x l^2$  [12]。其中:

$\Omega = \frac{EI_a}{GA_s K_s l^2}, G$  为剪切弹性模量。根据式(8)、

(9)、(10)可得  $u_b = \varphi y, u_{bs} = \beta_{ys} u_b, u_s = -\frac{4y^3}{3b^2} \Omega a_3 l^2,$

$v_{bs} = \beta_{ys} v_b$ 。

则有:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + (1 + \beta_{ys})\varphi y - \frac{4y^3}{3b^2} \Omega a_3 l^2 \\ v &= -(1 + \beta_{ys})\left(a_3 \frac{x^3}{6} + a_4 \frac{x^2}{2} + a_5x + a_6\right) + \Omega a_3 x l^2 \end{aligned} \quad (14)$$

当取时间较小的途径单元时转角  $\varphi$  近似等于  $-\frac{\partial v_b}{\partial x}$ ,

$$\varphi = \left(a_3 \frac{x^2}{2} + a_4x + a_5\right)$$

$$\epsilon_x = \frac{d(\Delta \eta^{2d})}{ds} = \frac{du}{ds} =$$

$$\frac{1}{l} \left[ 1 - y \frac{1 + \beta_{ys}}{1 + \beta_{ys} + 12\Omega} (6s(1 + \beta_{ys}) - (4(1 + \beta_{ys}) + 12\Omega)) - y \frac{1 + \beta_{ys}}{1 + \beta_{ys} + 12\Omega} (6s(1 + \beta_{ys}) - (2(1 + \beta_{ys}) - 12\Omega)) \right]$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = B_1 d_e$$

式中  $s = \frac{x}{l}$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{6\Omega(1 + \beta_{ys})}{1 + \beta_{ys} + 12\Omega} \left[ 0 \quad \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) \quad \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) \right] \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = B_2 \hat{d}_e \quad (19)$$

平面梁单元节点处的变形满足下列条件

$$\begin{cases} x = 0, y = 0, u = 0, v = 0, \varphi = \theta_1 \\ x = l, y = 0, u = \Delta_e, v = 0, \varphi = \theta_2 \end{cases} \quad (15)$$

代入式(17)可得 6 个常数:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_2 = \frac{\Delta_e}{l}, a_3 = \frac{6(1 + \beta_{ys})}{l^2(1 + \beta_{ys} + 12\Omega)} (\theta_1 + \theta_2) \\ a_4 &= \frac{-3(1 + \beta_{ys})}{l(1 + \beta_{ys} + 12\Omega)} (\theta_1 + \theta_2) + \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{l}, \\ a_5 &= \theta_1, a_6 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

将所得的常数代入原方程式,可得

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \frac{1 + \beta_{ys}}{1 + \beta_{ys} + 12\Omega} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$R_{11} = \frac{x(1 + \beta_{ys} + 12\Omega)}{l(1 + \beta_{ys})},$$

$$R_{12} = y \left\{ 3(1 + \beta_{ys}) \frac{x^2}{l^2} - [4(1 + \beta_{ys}) + 12\Omega] \frac{x}{l} + 1 + \beta_{ys} + 6\Omega - \frac{8y^2\Omega}{l^2b^2} \right\}$$

$$R_{13} = y \left\{ 3(1 + \beta_{ys}) \frac{x^2}{l^2} - [2(1 + \beta_{ys}) - 12\Omega] \frac{x}{l} + 6\Omega - \frac{8y^2\Omega}{l^2b^2} \right\},$$

$$R_{22} = \frac{-(1 + \beta_{ys})x^3}{l^2} + \frac{2(1 + \beta_{ys} + 3\Omega)x^2}{l} - (1 + \beta_{ys} + 6\Omega)x$$

$$R_{23} = \frac{-(1 + \beta_{ys})x^3}{l^2} + \frac{(1 + \beta_{ys} - 6\Omega)x^2}{l} + 6\Omega x,$$

$$R_{32} = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{4(1 + \beta_{ys} + 3\Omega)x}{l(1 + \beta_{ys})} + \frac{1 + \beta_{ys} + 12\Omega}{1 + \beta_{ys}}$$

$R_{33} = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2(1 + \beta_{ys} - 6\Omega)x}{l(1 + \beta_{ys})}$  进一步可得到单元的轴向应变和剪切应变为

(18)

### 3.2 单元轴向应变和剪应变对应的等效内力

积分可得单元轴向应变对应的等效内力

$$\begin{cases} f_{2xM} \\ m_{1zM} \\ m_{2zM} \end{cases} = \frac{E_a (1 + \beta_{ys})^2}{l(1 + \beta_{ys} + 12\Omega)^2} \begin{bmatrix} A_a \frac{(1 + \beta_{ys} + 12\Omega)^2}{(1 + \beta_{ys})^2} & 0 & 0 \\ 0 & (4(1 + \beta_{ys})^2 + 24\Omega(1 + \beta_{ys}) + 144\Omega^2) I_a & (2(1 + \beta_{ys})^2 - 24\Omega(1 + \beta_{ys}) - 144\Omega^2) I_a \\ 0 & (2(1 + \beta_{ys})^2 - 24\Omega(1 + \beta_{ys}) - 144\Omega^2) I_a & (4(1 + \beta_{ys})^2 + 24\Omega(1 + \beta_{ys}) + 144\Omega^2) I_a \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta_e \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{cases} \quad (20)$$

如梁截面为矩形(宽  $b$ , 高  $h$ ), 则梁对应的内力增量为

$$\begin{cases} f_{2xV} \\ m_{1zV} \\ m_{2zV} \end{cases} = 36GK_s l \frac{\Omega^2 (1 + \beta_{ys})^2}{(1 + \beta_{ys} + 12\Omega)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6A_a}{5} - \frac{8I_a}{b^2} & \frac{6A_a}{5} - \frac{8I_a}{b^2} \\ 0 & \frac{6A_a}{5} - \frac{8I_a}{b^2} & \frac{6A_a}{5} - \frac{8I_a}{b^2} \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta_e \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{cases} \quad (21)$$

将两部分内力叠加可得总的内力增量:

$$\begin{cases} f_{2x} \\ m_{1z} \\ m_{2z} \end{cases} = \begin{cases} f_{2xM} \\ m_{1zM} \\ m_{2zM} \end{cases} + \begin{cases} f_{2xV} \\ m_{1zV} \\ m_{2zV} \end{cases} = \int_{V_a} B_1^T E B_1 d_e dV_a + \int_{V_a} B_2^T G K_s B_2 d_e dV_a \quad (22)$$

进一步由静力平衡条件可得  $f_{1x}$ 、 $f_{2y}$ 、 $f_{1y}$ 。

## 4 向量式有限元静力分析算例

### 算例 1

悬臂梁如图 7 所示<sup>[12]</sup>, 长度  $L = 2.0$  m, 梁宽  $b = 0.2$  m, 高  $h = 0.2$  m, 弹性模量  $E = 2 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, 单位长度质量  $m = 2.0$  kg, 剪切效应的截面影响系数  $K_s = 5/6$ , 泊松比  $\nu = 0.25$ , 剪切模量  $G = 8 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup>, 梁的右端点处承受外力  $P = 2.5 \times 10^3$  N, 时间步长  $\Delta t = 10^{-5}$  s。用 VFIFE 编写 Euler 梁、Timoshenko 梁和精细梁程序对悬臂梁进行计算, 可得表 1 所示自由端竖向位移。

表 1 不同分析方法所得的悬臂梁自由端竖向位移  
Table 1 The displacement of the cantilever beam's free end obtained by different analysis methods m

方法	梁模型		
	Euler 梁	Timoshenko 梁	精细梁
向量式有限元	$2.5002 \times 10^{-2}$	$2.5132 \times 10^{-2}$	$2.5310 \times 10^{-2}$
ANSYS	$2.5093 \times 10^{-2}$	$2.5187 \times 10^{-2}$	

由表 1 可见, 采用考虑了剪切变形和刚度折减影响的精细梁模型后得到的自由端节点竖向位移最大; 只考虑剪切影响的 Timoshenko 梁得到的位移次之; Euler 梁得到的位移最小。但由于高跨比 ( $h/L = 1/10$ ) 较小, 属于工程梁范畴 ( $h/L = 1/8 \sim 1/12$ ), 剪切变形和刚度折减影响均较小, 因此, 采用上述 3 种梁模型所得结果相差不大。此外, VFIFE 所得的结果和 ANSYS 结果较接近, 可验证所编 VFIFE 程序的正确性。

分别采用 ANSYS 实体模型、Timoshenko 梁模型和向量式精细梁模型对高跨比 ( $h/L = 1/10, 1/5, 1/3$ ) 的上述悬臂梁进行分析, 可得表 2 所示自由端竖向位移。

表 2 不同分析方法所得的不同高跨比悬臂梁自由端竖向位移  
Table 2 The displacement of the cantilever beam's free end obtained by different analysis methods m

方法	高跨比		
	1/3	1/10	1/5
ANSYS 实体模型	$2.5339 \times 10^{-2}$	$3.4320 \times 10^{-3}$	$9.5402 \times 10^{-4}$
向量式有限元精细梁	$2.5310 \times 10^{-2}$	$3.3717 \times 10^{-3}$	$9.1728 \times 10^{-4}$
ANASYS 铁木辛柯梁	$2.5187 \times 10^{-2}$	$3.2191 \times 10^{-3}$	$7.3101 \times 10^{-4}$

由表 2 可见,当高跨比  $h/L=1/10$  时,3 种方法所得的位移值基本一致;随着高跨比变大,三者之间的差距也变大。当高跨比为  $1/3$  时,实体模型所得的结果最大且与精细梁所得的结果相差不大;Timoshenko 梁所得的结果最小且与其他两种方法所得结果相差较大。因此,在进行深梁分析时,精细梁模型所得的结果较 Timoshenko 梁所得更为准确。

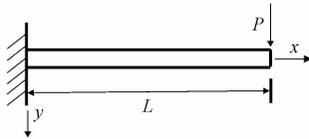


图 6 悬臂梁承受外力作用  
Fig. 6 Force on cantilever beam

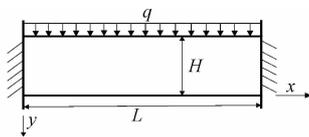


图 7 深梁受均布荷载作用  
Fig. 7 Distributed load on deep beam

算例 2

考虑两端为固定端的深梁如图 8 所示<sup>[16]</sup>。弹性模量  $E=2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , 单位长度质量  $m=2.0 \text{ kg}$ , 剪切效应的截面影响系数  $K_s=5/6$ , 泊松比  $\nu=0.3$ , 剪切模量  $G=7.692 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ , 梁承受均布外力  $q=6 \times 10^7 \text{ N/m}^2$  作用, 悬臂梁分为 10 个单元。分别采用 Euler 梁 (VE)、Timoshenko 梁 (VT) 和精细梁 (VP) 模型对不同高跨比 ( $H/L=1/3, 1/2, 1$ ) 的固端梁进行分析, 可得图 9 所示梁位移。图中  $x$  为单元节点横坐标,  $v$  为单元节点  $y$  向位移。

如图 9 所示,当高跨比为  $H/L=1/3, 1/2, 1$  时,采用 Euler 梁 (VE) 所得结果明显小于其它两种模型,表明 Euler 梁 (VE) 用于深梁或浅深梁分析存在较大误差,所得结果偏小。当高跨比为  $1/3$  时, Timoshenko 梁 (VT) 结果与精细梁 (VP) 结果基本接近,但随着高跨比增大,两者差距逐渐增大,表明刚度折减影响逐渐增大。当梁较深时,刚度折减影响不容忽视。因此,对于高跨比较大的深梁或浅深梁,采用同时考虑剪切变形和刚度折减影响的精细梁模型是必要的。

算例 3

门式框架如图 10 所示。弹性模量  $E=2.1 \times 10^6$ , 杆件截面宽  $b=0.3$ , 高  $h=0.3$ , 剪切效应的截面影响系数  $K_s=5/6$ , 泊松比  $\nu=0.3$ , 剪切模量  $G=8.077 \times 10^5$ , 横梁中间受一竖向力作用, 底端两

节点固定。分别采用 Euler 梁 (VE)、Timoshenko 梁 (VT) 和精细梁 (VP) 模型对不同高跨比 ( $h/L=1/30, 1/6$ ) 的门式框架进行分析, 得到图 11、图 12 所示荷载-横梁中点竖向位移曲线。

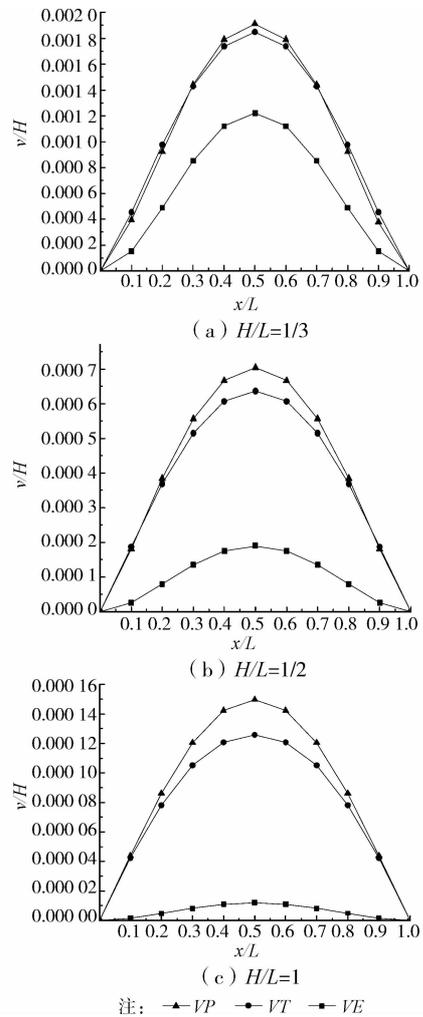


图 8 不同高跨比时梁位移  
Fig. 8 Displacement of the beam with different depth-span ratio

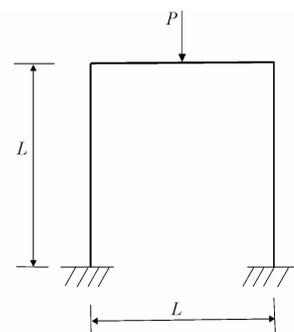


图 9 平面门式框架  
Fig. 9 The portal frame

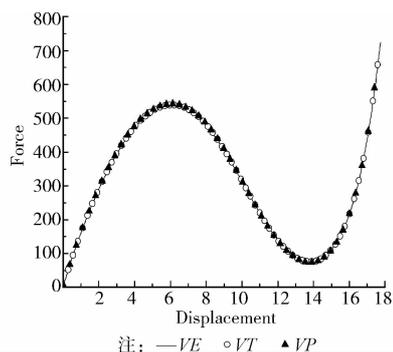


图10 高跨比为1/30的荷载-位移曲线

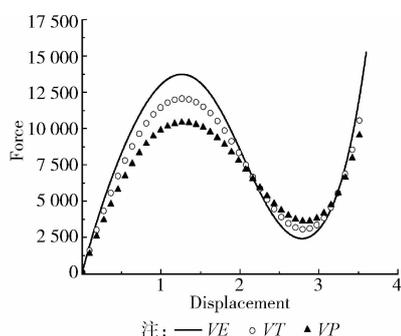
Fig. 10 Load-displacement curves when  $h/L=1/30$ 

图11 高跨比为1/6的荷载-位移曲线

Fig. 11 Load-displacement curves when  $h/L=1/6$ 

由图可见,当高跨比为1/30时,采用3种梁模型所得结果基本接近,表明工程梁分析时,剪切变形和刚度折减的影响较小,可以忽略。当高跨比为1/6时,由上述公式可得剪切变形和刚度折减所产生的位移修正项变得较大。精细梁模型同时考虑了两者的影响, Timoshenko梁模型只考虑了剪切变形的影响,而 Euler梁模型两者的影响都没有考虑,所以 VE 所得的屈曲荷载最大, VP 所得的屈曲荷载最小,此时剪切变形和刚度折减的影响不能忽略。

## 5 结论

以精细梁理论为基础,综合考虑了剪切变形及附加轴向位移、附加横向位移对单元内力和变形的影响,推导了基于精细梁模型的向量式有限元基本公式。通过编写 FORTRAN 程序分析算例得到以下结论:

1)对于高跨比较小的工程梁, Euler梁、Timoshenko梁以及精细梁所得的结果十分接近,表明此时剪切变形和刚度折减的影响较小,可以忽略。

2)对于高跨比较大的深梁或浅深梁,精细梁所得的结果比 Timoshenko梁和 Euler梁所得的结果大得多,此时梁的剪切变形和刚度折减的影响较大,不能忽略。

3)对工程梁进行分析时,由于剪切变形和刚度

折减影响较小,选择较为简单的 Euler梁模型是可行的。但对于超出工程梁范围的深梁或浅深梁,采用考虑剪切变形和刚度折减影响的精细梁模型可望得到更准确的结果。

## 参考文献:

- [1] 丁承先,王仲宇,吴东岳,等. 运动解析与向量式有限元 [R]. 中国,台湾:中央大学工学院桥梁工程研究中心, 2007.
- [2] Ting E C, Shih C, Wang Y K. Fundamentals of a vector form intrinsic finite element: Part I. Basic procedure and a plane frame element [J]. Journal of Mechanics, 2004, 20(2): 113-122.
- [3] Ting E C, Shih C, Wang Y K. Fundamentals of a vector form intrinsic finite element: Part II.
- [4] Shih C, Wang Y K, Ting E C. Fundamentals of a vector form intrinsic finite element: Part III. Convected material frame and examples [J]. Journal of Mechanics, 2004, 20(2): 133-143.
- [5] 喻莹. 基于有限质点法的空间钢结构连续倒塌破坏研究 [D]. 浙江大学, 2012.
- [6] 班自愿,张若京. 悬臂梁大变形的向量式有限元分析 [J]. 计算机辅助工程, 2012, 19: 25-29.
- [7] 梁育铭. 高楼施工之向量式有限元模拟 [D]. 中原大学, 2012.
- [8] Timoshenko S P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars [J]. Philosophical Magazines, 1921, 41: 744-746.
- [9] Thomas J, Abbas B A H. Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam [J]. Journal of Sound and Vibration, 1975, 41(3): 291-299.
- [10] Nickell R E, Secor G A. Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1972, 5: 243-245.
- [11] Reddy J N. On locking-free shear deformable beam finite elements [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 149: 113-132.
- [12] 李贤华. 向量有限元方法应用于 Timoshenko梁分析之研究 [D]. 台湾高雄:台湾国立中山大学, 2009.
- [13] 钱若军,袁行飞,林智斌. 固体和结构分析理论及有限元法 [M]. 南京:东南大学出版社, 2013.
- [14] 丁承先,段元锋,吴东岳. 向量式结构力学 [M]. 北京:科学出版社, 2008.
- [15] 马春来. 考虑剪切位移和多因素耦合影响下的空间梁非线性分析模型研究 [D]. 浙江大学, 2008.
- [16] Ahmed S R, Idris A B M, Uddin M W. Numerical solution of both ends fixed deep beams [J]. Computer and Structures, 1996, 61: 21-29.