

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2015.03.009



# 砂土地基上圆形浅基础三维破坏包络面的理论研究

范庆来<sup>1a</sup>, 郑静<sup>1b</sup>, 武科<sup>2</sup>

(1. 鲁东大学 a. 岩土工程重点实验室; b. 鲁东大学交通学院, 山东烟台 264025;

2. 山东大学岩土与结构工程研究中心, 济南 250061)

**摘要:**对砂土地基上圆形浅基础在竖向荷载  $V$ 、水平荷载  $H$  及力矩  $M$  复合加载条件下的承载力进行了系统的三维有限元分析。在分析中,砂土假定为纯摩擦材料,遵循基于 Mohr-Coulomb 破坏准则的理想弹塑性本构关系。首先,对圆形浅基础的竖向承载力进行了有限元计算,并与滑移线解法进行了对比,两种方法所得结果比较吻合。进而探讨了砂土内摩擦角对于基础在  $V-H$ 、 $V-M$  荷载平面与  $V-H-M$  三维荷载空间内的破坏包络轨迹的影响。计算结果表明,与不排水情况下软黏土地基上基础破坏包络面相比,砂土地基上圆形浅基础的破坏包络面形状有较大差异,但  $V-H$  和  $V-M$  平面内的破坏包络面形状仍具有较好的归一化特性。基于有限元计算结果,建立了圆形浅基础在  $V-H-M$  三维荷载空间内的破坏包络面方程,该方程可用来合理评价复合加载条件下砂土地基上圆形浅基础的整体稳定性。

**关键词:**圆形浅基础;复合加载;砂土;破坏包络面;承载力**中图分类号:**TU311; P315.9 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2015)03-0063-07

## Theoretical analysis on three dimensional failure envelope of circular footings on sand

Fan Qinglai<sup>1a</sup>, Zheng Jing<sup>1b</sup>, Wu Ke<sup>2</sup>

(1a. Key Laboratory of Geotechnical Engineering; b. School of Transportation, Ludong University, Yantai 264025, Shandong, P. R. China; 2. Geotechnical and Structural Engineering Research Institute, Shandong University, Jinan 250061, P. R. China)

**Abstract:** The bearing capacity of circular shallow footings subjected to combined loading composed of vertical component  $V$ , horizontal component  $H$  and moment  $M$  on sand is explored through three dimensional finite element numerical analyses. The sand is assumed to be purely frictional and obey elasto-perfectly plastic relationship following the Mohr-Coulomb failure criterion. The capacity of circular footing under centrally vertical load is computed, and the calculated results agree well with those derived from slip-line field theory. Then the influence of soil friction angle on the failure locus in the  $V-H$  and  $V-M$  load plane and  $V-H-M$  load space is investigated. The results show that the shape of failure envelopes of shallow foundations on sand is different from that on undrained

**收稿日期:**2014-12-12**基金项目:**国家自然科学基金(50909048);山东省高等学校科技计划项目(J12LG01)**作者简介:**范庆来(1977-),男,教授,博士,主要从事海洋岩土工程和软基处理研究,(E-mail)fanqinglai@ldu.edu.cn。**Received:**2014-12-12**Foundation item:** National Natural Science Foundation of China (No. 50909048); Project of Shandong Province Higher Educational Science and Technology Program (No. J12LG01)**Author brief:** Fan Qinglai(1977-), professor, PhD, main research interests: marine soil mechanics, soft soil improvement technique (E-mail)fanqinglai@ldu.edu.cn.

clay, whilst normalization of the failure envelope on the  $V-H$  and  $V-M$  load plane by the pure vertical bearing capacity allow it to be generalized for varying conditions. Based on finite element analyses, the equation of failure envelope in the  $V-H-M$  three dimensional load space is proposed, which can be used to evaluate the general stability of circular footings on sand under combined loading condition.

**Key words:** circular footing; combined loading; sand; failure envelope; bearing capacity

对于圆形浅基础,传统的地基承载力分析理论主要有 Terzaghi、Vesic、Hansen、Meyerhoff 等提出的各种经验、半经验公式,对于倾斜与偏心荷载作用下的浅基础稳定性问题,一般是基于 Terzaghi 竖向承载力公式,分别通过引入荷载倾斜系数与 Meyerhoff 有效宽度假定来考虑水平荷载和偏心荷载对竖向承载力的影响,对此栾茂田等<sup>[1]</sup>已经进行了比较全面的评述。

随着石油、天然气和金属矿物等海洋资源的大力开发,各种海洋基础稳定性评价方面的问题得到了高度重视。与陆地上基础相比,海洋基础除了承受竖向荷载  $V$  以外,通常还要抵抗波浪和风暴等所引起的水平荷载  $H$  与力矩  $M$ 。在这种复合加载情况下,海洋基础一般不在单纯的竖向荷载作用下达到极限平衡状态,而是在竖向荷载、水平荷载与力矩的不同组合条件下发生失稳破坏。因此,将传统的地基承载力理论用于海洋浅基础稳定性评价时,可能出现较大偏差,从而不适合含有较大水平荷载和力矩的情况<sup>[2]</sup>。为了解决这个问题,部分学者<sup>[1-2]</sup>通过系统研究提出了破坏包络面理论,认为在复合加载条件下,地基达到整体破坏时各个荷载分量的组合在三维荷载空间 ( $V, H, M$ ) 中将形成一个不依赖于加载路径的外凸曲面,其方程可由引起地基失稳时的各个荷载分量显式表达为  $f(V, H, M) = 0$ 。根据实际的受力状态与该破坏包络面之间的相对位置关系,可以直观评价设计荷载状态下海洋基础的整体稳定性。

目前所开展的研究工作大多针对软黏土地基,砂土地上圆形浅基础破坏包络面方程的研究较少,并仅限于模型试验研究。Martin 等<sup>[3]</sup>对于复合加载条件下黏土地上纺锤形基础的力学响应进行了比较系统的室内小比尺模型试验。在此基础上, Gottardi 等<sup>[4]</sup>、Cocjin 等<sup>[5]</sup>分别对于密砂上圆形和条形浅基础开展了一系列模型试验,并对试验数据进行拟合,建议了砂土地上浅基础的破坏包络面方程。Cassidy 等<sup>[6]</sup>针对松散钙质砂地基开展了小比尺复合加载试验研究,主要探讨了宏单元模型中的硬化准则和流动法则。但这些试验工作都是针对某种相对密度或内摩擦角的砂土,因此,本文对于共面复合加载条件下砂土地上圆形浅基础的承载力

进行比较系统的有限元分析,探讨了砂土内摩擦角 (对于圆形浅基础在  $V-H, V-M$  荷载平面与  $V-H-M$  荷载空间内的破坏包络轨迹的影响,并与已有的室内模型试验结果进行了对比。

## 1 有限元模型

直径  $D=1\text{ m}$  的圆形浅基础位于砂土地基上。不考虑浅基础本身的变形,因此采用离散刚体单元模拟。地基模型的半径和深度都取为  $5D$ ,经过试算,可以消除有限元模型中地基的边界效应影响。根据赵少飞等<sup>[7]</sup>的建议,土体单元类型选择 8 节点缩减积分实体单元 (C3D8R),在浅基础附近的局部区域加密网格,单元数为 26 240,如图 1 所示。

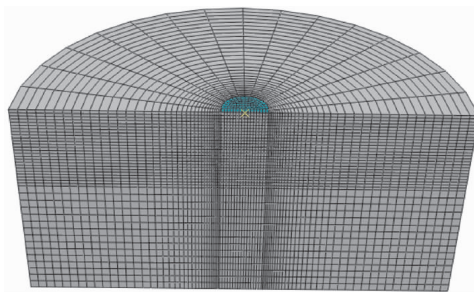


图 1 有限元模型

Fig. 1 Finite element mesh

在分析中,砂土假定为纯摩擦材料,重度取为  $\gamma=20\text{ kN/m}^3$ ,采用基于 Mohr-Coulomb 破坏准则的理想弹塑性本构模型,变形模量  $E=100\text{ MPa}$ ,泊松比  $\nu=0.3$ 。很多实验结果已经表明,砂土剪胀角  $\varphi$  低于内摩擦角  $\phi$ ,但为了与常用的竖向承载力解进行对比,仍然采用了相关联流动法则,即取  $\varphi = \phi$ 。土体为纯摩擦材料,基础与地基之间不能传递拉应力,因此,基础和地基间设为完全黏结约束,而未设置接触单元。

为了避免纯摩擦材料计算难以收敛的数值问题,同时又不影响材料真实的力学响应,需要在模型中人为赋予砂土一个很小的黏聚力值。根据 Zhu 等<sup>[8]</sup>利用 ABAQUS 软件计算矩形基础承载力时的建议,在本文考虑的砂土内摩擦角范围  $10^\circ \sim 30^\circ$  内,当  $\phi < 20^\circ$  时,取  $\frac{c}{\gamma B} = 0.25 \times 10^{-3}$ ,当  $\phi \geq 20^\circ$  时,取

$$\frac{c}{\gamma B} = 5 \times 10^{-3}.$$

## 2 竖向承载力

对于内摩擦角  $\phi=15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$  与  $30^\circ$  4 种情况, 分别进行了竖向承载力计算。在计算过程中, 采用位移控制加载, 当得到的基底中心处的节点反力  $V$ -竖向位移  $v$  曲线斜率陡降或接近零时, 与该状态相对应的基底反力即为地基的竖向承载力, 如图 2 所示。

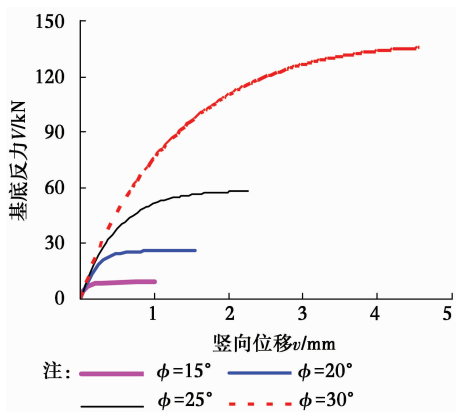


图 2 竖向荷载作用下基底反力与位移之间的关系  
Fig. 2 Relation of reaction force beneath foundation and displacement under vertical loading

同时, 也采用 Martin<sup>[9]</sup> 提出的滑移线方法和 Terzaghi 圆形浅基础公式对此问题进行了求解, 几种方法所得竖向承载力(单位: kN)都列于表 1, 通过比较可以看到, 在  $\phi \geq 20^\circ$  时有限元与滑移线解法所得结果都要比 Terzaghi 公式计算结果高, 而在  $\phi = 15^\circ$  时, 有限元计算结果比其它两种方法偏低。有限元法与滑移线解法所得结果之间相差不大, 最大误差为 8%, 从而说明本文有限元模型是基本合理的。

表 1 不同方法计算结果间的比较

Table 1 Comparison of results from different methods

计算方法	内摩擦角/(°)			
	15	20	25	30
有限元方法	9.2	25.0	57.4	134.2
滑移线方法	9.9	23.1	54.4	133.5
Terzaghi 公式	9.7	20.6	54.2	106.2

## 3 复合加载数值试验方法

### 3.1 swipe 型加载方法

构建不同荷载平面上完整的破坏包络面, 对于软黏土地基, 只需要一条 swipe 加载路径<sup>[10-11]</sup>, 但对

于砂土地基, 则需要两条加载路径, 如图 3 所示。加载路径 I 与软黏土地基相同, 包括两个加载步骤: 1) 沿  $i$  方向从初始状态开始施加位移  $u_i$  直到  $i$  方向反力达到极限值; 2) 固定  $i$  方向的位移, 沿  $j$  方向施加位移  $u_j$  直到  $j$  方向对应的反力  $F_j$  不随位移增大而改变, 此时步骤 2) 所形成的加载轨迹可以近似作为  $i$ - $j$  平面上破坏包络面的一部分。加载路径 II 含有一个加载步骤, 从初始状态开始约束  $i$  方向自由度, 沿  $j$  方向施加位移  $u_j$  直到  $j$  方向对应的反力  $F_j$  不随位移增大而改变, 该步骤所形成的加载轨迹可作为包络面的另外一部分。

### 3.2 probe 型加载方法

probe 型加载方法包括固定位移比加载、固定荷载比加载方法等, 范庆来等<sup>[10]</sup> 已经进行了比较详细的介绍, 在此不再赘述。最近, 赵少飞<sup>[7]</sup> 建立了一种较为直观的 probe 型加载方法, 该方法包含如下两个步骤: 1) 通过荷载控制, 沿  $i$  方向(一般为竖向)在基础上直接施加一定的荷载分量  $F_i$ ; 2) 保持所施加的荷载分量  $F_i$  不变, 沿  $j$  方向进行位移控制加载, 直到相应方向的反力  $F_j$  不再随位移增加而改变, 由此可确定出破坏包络面上的一个点  $(F_i, F_j)$ , 如图 3 所示。通过多次加载, 即可拟合一个完整的包络面。本文在构建  $V$ - $H$ 、 $V$ - $M$  荷载平面上的包络面时, 采用了该方法。

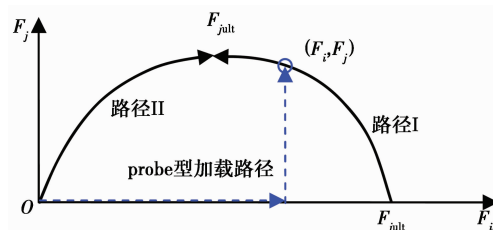


图 3 砂土地基复合加载方法

Fig. 3 Combined loading procedure for sand foundation

### 3.3 荷载-位移联合搜索方法

为了得到圆形浅基础在  $V$ - $H$ - $M$  荷载空间内的三维破坏包络面, 需采用荷载-位移联合搜索方法<sup>[10-11]</sup>。这个方法包含如下 3 个步骤: 1) 通过荷载控制, 在基底中心施加一定大小的竖向荷载分量  $V$ ; 2) 保持该竖向荷载分量不变, 进行  $H$ - $M$  荷载平面上的 swipe 型加载, 得到破坏包络面的近似形式; 3) 在此基础上, 进行若干次 probe 型加载, 确定最终的破坏包络面。

## 4 $V$ - $H$ 平面上的破坏包络轨迹

联合采用 swipe 型与 probe 型两种数值加载方法, 对于圆形浅基础在  $V$ - $H$  平面内的破坏包络轨迹

进行研究。所得到的  $V$ - $H$  荷载平面内的破坏包络轨迹如图 4(a) 所示, 采用竖向承载力  $V_{ult}$  进行归一化后, 可得  $V$ - $H$  荷载平面内的破坏包络面形状如图 4(b) 所示。

通过图 4(a) 可以看到, 随着砂土内摩擦角的增大,  $V$ - $H$  荷载平面内的破坏包络面大小在不断增长。在内摩擦角  $\phi = 30^\circ$  时, 图 4(a) 还具体给出了 swipe 型加载路径 I、II 与 probe 型加载得到的 3 个数据点(分别是在  $V/V_{ult} = 0.3, 0.5$  及  $0.7$  情况下得到的), 可以看到 swipe 型加载路径 I 与路径 II 在  $V/V_{ult} = 0.5$  处汇合, 构成了一个完整的包络面。probe 型加载得到的数据点与 swipe 型加载路径基本吻合, 考虑到数值计算误差, 可以表明破坏包络面是不依赖于加载路径的。在其它内摩擦角情况下, 也具有相同规律, 在图 4(a) 中不再一一表达。

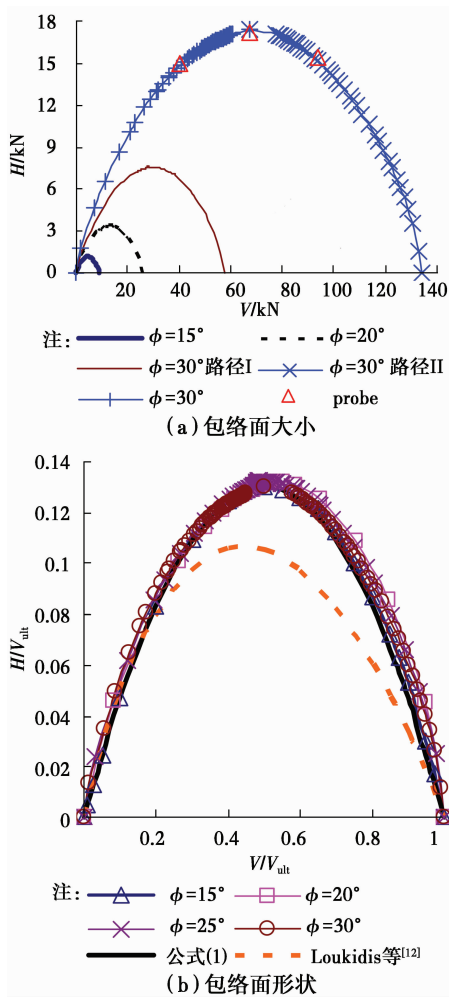


图 4 圆形浅基础  $V$ - $H$  破坏包络面

Fig. 4  $V$ - $H$  failure envelopes of circular shallow foundations

根据图 4(b) 可看出, 破坏包络面形状类似于橄榄球形, 基础所能承受的最大水平荷载  $H_{max}$  大致出现在竖向荷载水平  $V/V_{ult} = 0.5$  处, 而且对于不同内

摩擦角情况下,  $H_{max} \approx 0.13V_{ult}$ 。Gottardi 等<sup>[4]</sup> 针对内摩擦角  $\phi = 42.3^\circ$  以及 Bienen 等<sup>[12]</sup> 针对  $\phi = 34.3^\circ$  的砂土所进行的模型试验也得到了基本一致的结论  $H_{max} \approx 0.12V_{ult}$ 。Cassidy 等<sup>[6]</sup> 对于松散钙质砂也进行了试验, 得到的结果表明  $H_{max} \approx 0.15V_{ult}$ 。

因此, 如图 4(b) 所示, 不同内摩擦角情况下, 采用竖向极限承载力  $V_{ult}$  进行归一化后, 包络面形状几乎完全重合, 可采用式(1)进行描述。

$$\frac{H}{V_{ult}} = 4h_0 \frac{V}{V_{ult}} \left(1 - \frac{V}{V_{ult}}\right) \quad (1)$$

式中:  $h_0 = H_{max}/V_{ult}$ , 其取值范围在  $0.12 \sim 0.15$  之间, 对于本文有限元计算结果,  $h_0 = 0.13$ 。在图 4(b) 中还列出了 Loukidis 等<sup>[13]</sup> 建立的条形浅基础破坏包络面方程, 可见圆形与条形浅基础的破坏包络面形状存在一定差异。因此, 在分析基础稳定性时, 必须考虑其三维效应。

对于软黏土地基  $V$ - $H$  包络面, 水平荷载最大值位于  $V=0$ , 随着竖向荷载水平增大, 基础承受水平荷载的能力不断下降<sup>[10]</sup>, 这显然与砂土地基上基础破坏包络面特性有明显差异。

## 5 $V$ - $M$ 平面上的破坏包络轨迹

采用类似数值加载方法, 对于圆形浅基础在  $V$ - $M$  平面内的破坏包络轨迹进行了研究, 其中力矩  $M$  是通过在基底中心处施加转角边界条件控制加载。所得到的  $V$ - $M$  荷载平面内的破坏包络轨迹如图 5(a) 所示。采用基础直径  $D$  与竖向承载力  $V_{ult}$  之乘积  $DV_{ult}$  对于力矩  $M$  无量纲化, 可得  $V$ - $M$  荷载平面内的归一化破坏包络面形状如图 5(b) 所示。

通过图 5(a) 可以看到,  $V$ - $M$  荷载平面内的破坏包络面大小也随着砂土内摩擦角的增大而在不断增长。归一化后的破坏包络面形状基本重合, 也类似于橄榄球形, 基础所能承受的最大力矩荷载  $M_{max}$  大致出现在竖向荷载水平  $V/V_{ult} = 0.5$  处,  $M_{max} = 0.08DV_{ult}$ , 对应着偏心距为  $e/D = 1/6.25$ 。Gottardi 等<sup>[4]</sup> 根据密砂的模型试验得到  $M_{max} = 0.1DV_{ult}$ , Bienen 等<sup>[11]</sup> 根据松砂上的试验结果得到的结论则是  $M_{max} = 0.075DV_{ult}$ , 因此, 可以认为,  $V$ - $M$  平面内砂土地基上圆形浅基础的归一化最大弯矩承载力  $m_0 = M_{max}/(DV_{ult})$  在  $0.075 \sim 0.1$  之间。不同内摩擦角情况下, 包络面形状基本重合, 如图 5(b) 所示, 可采用如下抛物线方程式(2)进行描述。

$$\frac{M}{DV_{ult}} = 4m_0 \frac{V}{V_{ult}} \left(1 - \frac{V}{V_{ult}}\right) \quad (2)$$

式中:  $m_0$  取值范围在  $0.075 \sim 0.1$  之间, 对于本文有

限元计算结果,  $m_0 = 0.08$ 。与软土地基上基础 V-M 包络面方程<sup>[10]</sup>进行比较,可以看到偏心荷载情况下砂土与黏土地基上破坏包络面特性也存在显著差异。

式中:  $H_{vult}$ 、 $M_{vult}$  分别为圆形浅基础在给定竖向荷载水平  $V/V_{ult}$  下所能承受的最大水平荷载和弯矩,可相应由式(1)和式(2)得到。参数  $a$  反映了椭圆偏心率,参数  $a$  的取值越高,包络面的偏心率越大,在本文算例中,  $a = -0.2$ 。

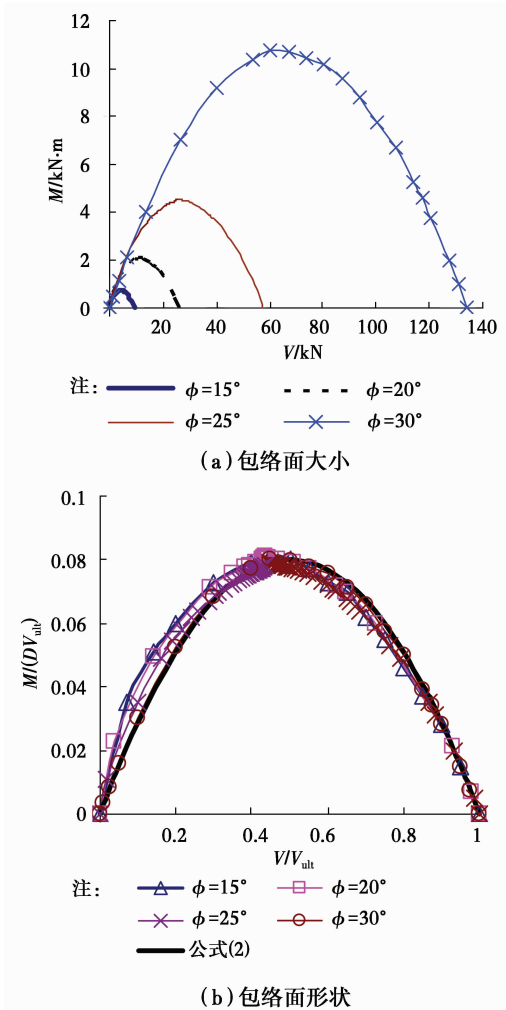


图 5 圆形浅基础 V-M 破坏包络面  
Fig. 5 V-M failure envelopes of circular shallow foundations

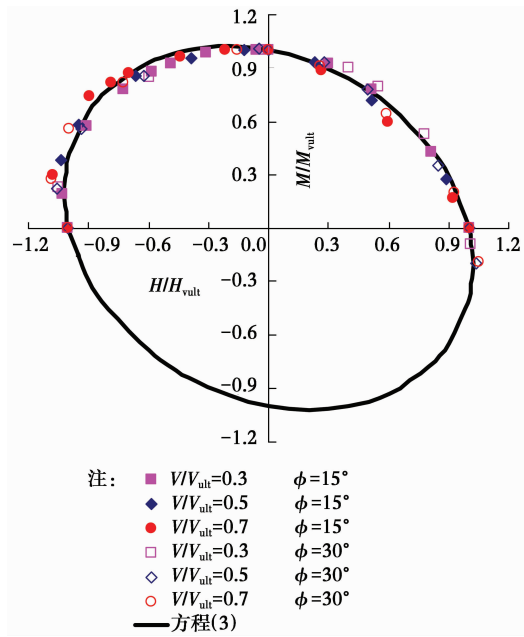


图 6 浅基础归一化 H-M 破坏包络轨迹  
Fig. 6 Normalized H-M failure locus of shallow foundations

将式(1)和(2)代入式(3),经过整理可得到 V-H-M 空间的破坏包络面方程,如式(4)所示。

$$\left(\frac{H}{h_0 V_{ult}}\right)^2 + \left(\frac{M}{m_0 DV_{ult}}\right)^2 - 2a\left(\frac{HM}{h_0 m_0 DV_{ult}^2}\right) - \left[4\left(\frac{V}{V_{ult}}\right)\left(1 - \frac{V}{V_{ult}}\right)\right]^2 = 0 \quad (4)$$

为了进一步验证该方程的合理性,对内摩擦角  $\varphi = 20^\circ$  和  $25^\circ$  情况下的 H-M 破坏包络轨迹进行了模拟,如图 7 所示。

通过比较,可以看到式(4)的模拟结果较好,因此,采用如式(4)所示的三维破坏包络面方程来评价复合加载条件下砂土地基上圆形浅基础承载力是合理的。在实际应用中,只需根据竖向极限承载力公式或其它方法确定相应的竖向承载力  $V_{ult}$ ,进而根据方程(4),就可以得到破坏包络面的显式表达式  $f(V, H, M/D) = 0$ ,如图 8 所示。若浅基础设计荷载组合点  $(V, H, M)$  位于包络面上时,说明地基处于承载能力极限状态。当荷载组合点  $(V, H, M)$  处于该包络面内部,则浅基础是整体稳定的,反之,则将发生失稳破坏,在工程中应对基础进行重新设计<sup>[14-16]</sup>。

## 6 V-H-M 空间的破坏包络面

采取荷载-位移联合搜索方法,分别对于  $V/V_{ult} = 0.3, 0.5$  和  $0.7$  三种情况下的 H-M 破坏包络轨迹进行研究。将内摩擦角  $\varphi = 15^\circ$  和  $30^\circ$  情况下的 H-M 破坏包络轨迹表达在  $H/H_{vult}-M/M_{vult}$  的归一化荷载平面内,如图 6 所示,可以看到对于不同内摩擦角与竖向荷载水平,归一化后的包络面基本重合,形状为一椭圆。

可以采用椭圆方程式(3)来描述。

$$\left(\frac{H}{H_{vult}}\right)^2 + \left(\frac{M}{M_{vult}}\right)^2 - 2a\frac{H}{H_{vult}}\frac{M}{M_{vult}} = 1 \quad (3)$$

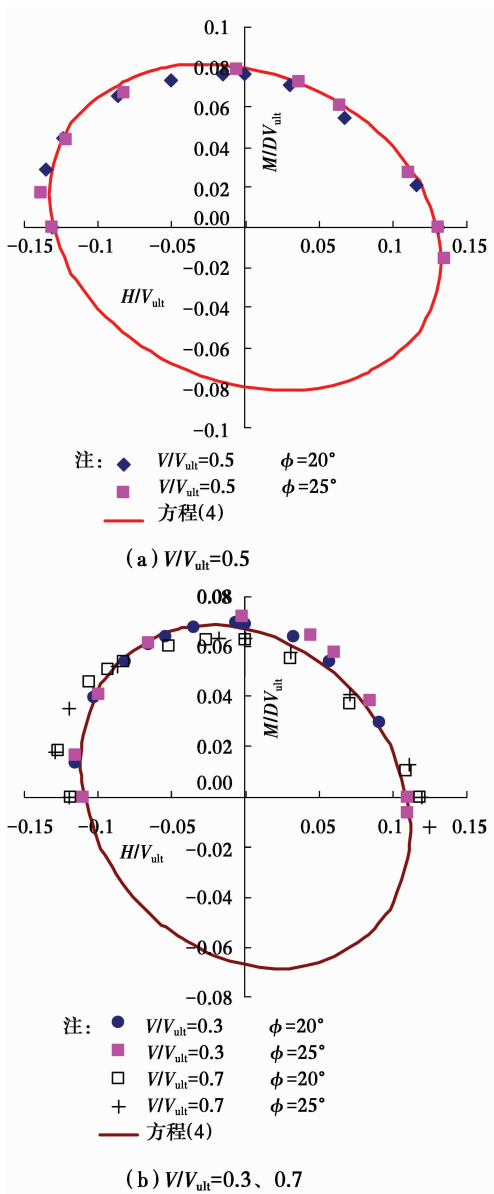


图 7 不同荷载水平下浅基础  $H$ - $M$  破坏包络轨迹  
 Fig. 7  $H$ - $M$  failure locus of shallow foundations under various vertical load levels

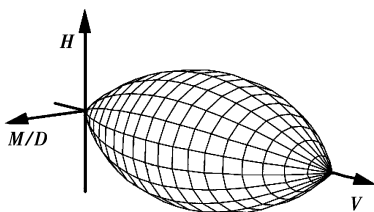


图 8 圆形浅基础三维破坏包络面  
 Fig. 8 Three dimensional failure envelope of circular shallow foundations

## 7 结论

1) 与不排水情况下软黏土地基上基础破坏包络面相比,砂土地基上圆形浅基础的破坏包络面形

状有较大差异,但  $V$ - $H$  和  $V$ - $M$  平面内的破坏包络面形状仍具有较好的归一化特性,可用抛物线方程进行表达。

2) 在一定竖向荷载水平下,不同内摩擦角情况下的  $H$ - $M$  破坏包络轨迹基本重合,形状为具有一定偏心度的椭圆。

3) 根据计算结果,提出了砂土地基上圆形浅基础三维破坏包络面方程。经过初步验证,该方程可以用来评价圆形浅基础在共面复合加载条件下是否稳定。

## 参考文献:

- [1] 栾茂田,范庆来,王忠涛,等. 海洋工程中若干土动力学问题的研究进展[C]//第七届全国土动力学学术会议论文集. 北京:清华大学出版社,2006:26-38.
- [2] Luan M T, Fan Q L, Wang Z T, et al. A state-of-the-art review on some key issues of soil dynamics in ocean and offshore engineering [C]// The 8th National Conference on Soil Dynamics. Beijing: Tsinghua University Press, 2006: 26-38. (in Chinese)
- [3] Zhang Y, Bienen B, Cassidy M J, et al. Undrained bearing capacity of deeply buried flat circular footings under general loading [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2012, 138(3): 385-397.
- [4] Martin C M, Houlsby G T. Combined loading of spudcan foundations on clay: laboratory tests [J]. Geotechnique, 2000, 50(4): 325-338.
- [5] Gottardi G, Houlsby G T, Butterfield R. Plastic response of circular footings on sand under general planar loading [J]. Geotechnique, 1999, 49(4): 453-469.
- [6] Cocjin M, Kusakabe O. Centrifuge observations on combined loading of a strip footing on dense sand [J]. Geotechnique, 2013, 63(5): 427-433.
- [7] Cassidy M J, Byrne B W, Houlsby G T. Modelling the behaviour of circular footings under combined loading on loose carbonate sand [J]. Geotechnique, 2002, 52(10): 705-712.
- [8] 赵少飞. 复合加载条件下海洋地基承载力特性数值分析方法研究[D]. 辽宁 大连:大连理工大学,2006.
- [9] Zhao S F. A study on numerical methods for analyses of bearing capacity behavior of offshore foundations under combined loading [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2006. (in Chinese)
- [10] Zhu M, Michalowski R L. Shape factors for limit loads on square and rectangular footings [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2005, 131(2): 223-231.
- [11] Martin C M. Exact bearing capacity calculations using

- the method of characteristics [C]// Proceedings of the 11th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics. Turin: [s. n.], 2005, 441-450.
- [10] Fan Q L, Luan M T, Gong X B. A unified equation of failure envelope for skirted foundations in normally consolidated clay [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(10): 1917-1924.
- [11] 范庆来, 栾茂田. 各向异性软黏土地基上浅基础破坏包络面研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(11): 2362-2369.
- Fan Q L, Luan M T. Study of failure envelope of shallow foundation on anisotropic soft clay [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(11): 2362-2369. (in Chinese)
- [12] Bienen B, Byrne B W, Houlsby G T, et al. Investigating six-degree-of-freedom loading of shallow foundations on sand [J]. Geotechnique, 2006, 56(6): 367-379.
- [13] Loukidis D, Chakraborty T, Salgado R. Bearing capacity of strip footings on purely frictional soil under eccentric and inclined loads [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, 45(6): 768-787.
- [14] 范庆来, 郑静. 复合加载模式下海上风机圆形浅基础亚塑性宏单元模型[J]. 土木建筑与环境工程, 2014, 36(3): 59-63.
- Fan Q L, Zheng J. A hypoplastic macro-element model for circular shallow foundations of offshore wind turbines under combined loading [J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2014, 36(3): 59-63. (in Chinese)
- [15] 范庆来, 赵海涛, 郑静, 等. 非共面复合加载条件下桶形基础稳定性研究[J]. 岩土力学, 2013, 34(12): 3643-3648.
- Fan Q L, Zhao H T, Zheng J, et al. Stability of bucket foundations under non-coplanar combined loading [J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(12): 3643-3648. (in Chinese)
- [16] 武科, 马明月, 栾茂田, 等. 扭剪荷载作用下桶形基础承载性能的弹塑性有限元数值分析[J]. 应用基础与工程科学学报, 2012, 20(5): 777-786.
- Wu K, Ma M Y, Luan M T, et al. Numerical analysis of bearing capacity behavior of bucket foundation subjected to torsion shear loading based on elasto-plastic FEM [J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2012, 20(5): 777-786. (in Chinese)

(编辑 王秀玲)