

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2016.02.009



三维轴对称功能梯度材料瞬态热传导问题的自然单元法

李庆华, 陈莘莘, 徐青

(华东交通大学 土木建筑学院, 南昌 330013)

摘要:为了更有效地求解三维轴对称功能梯度材料瞬态热传导问题,对无网格自然单元法应用于此类问题进行了研究,并发展了相应的计算方法。基于几何形状和边界条件的轴对称性,三维的轴对称问题可降为二维平面问题。为了简化本质边界条件的施加,轴对称面上的温度场采用自然邻近插值进行离散。功能梯度材料特性的变化由高斯点的材料参数进行模拟。时间域上,采用传统的两点差分法进行离散求解,进而得到瞬态温度场的响应。数值算例结果表明,提出的方法是行之有效的,理论及方法不仅拓展了自然单元法的应用范围,而且对三维轴对称瞬态热传导分析具有普遍意义。

关键词:自然单元法;轴对称;功能梯度材料;瞬态热传导

中图分类号:TP301.6 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2016)02-0069-06

Natural element method for transient heat conduction analyse of 3D axisymmetric functionally graded solids

Li Qinghua, Chen Shenshen, Xu Qing

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, P. R. China)

Abstract: In order to solve the transient heat conduction problems in three-dimensional (3D) axisymmetric continuously nonhomogeneous functionally graded materials (FGMs) more effectively, a novel numerical method based on the meshless natural element method is proposed. Axial symmetry of geometry and boundary conditions helps to transform the 3D axisymmetric problem into a two-dimensional (2D) problem. In order to simplify the imposition of the essential boundary conditions, the natural neighbour interpolation is adopted to discretize the temperature field within the cross section. The variations of functionally graded material properties are simulated by employing proper material parameters at Gauss points. The spatially discretized heat conduction equation is solved numerically with the traditional two-point difference technique in the time domain. The present method not only broadens the application scope of the natural element method, but also will be generally available to transient heat conduction analyses of 3D axisymmetric solids.

Keywords: natural element method; axisymmetric; functionally graded materials; transient heat conduction

收稿日期:2015-11-15

基金项目:国家自然科学基金(21466012);江西省教育厅项目(KJLD14041).

作者简介:李庆华(1976-),女,主要从事数值传热学研究,(E-mail) jessylqh@126.com.

Received:2015-11-15

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (No. 21466012); Foundation of Jiangxi Educational Committee (No. KJLD14041)

Author brief: Li Qinghua(1976-), main research interest: numerical heat transfer, (E-mail) jessylqh@126.com.

功能梯度材料是通过特定的材料制备工艺将不同性能的两种或两种以上材料按一定的设计规律组合起来的新型非均匀复合材料^[1]。功能梯度材料的最大特点是材料参数的连续性,完全避免了层合复合材料的材料参数在层层之间的间断面处不连续的问题,提高了材料强度和耐热性。因此,功能梯度材料在航空、航天及核反应堆等高温环境中具有广泛的应用潜力,对功能梯度材料的热力学行为进行研究十分必要^[2-5]。然而,相对于二维平面问题,目前对于三维轴对称功能梯度材料瞬态热传导问题的数值方法研究相对较少^[6-8]。

自然单元法^[9-10]是一种新兴的数值分析方法,因其独特的优势,得到了国内外许多学者的极大关注^[11-15]。这种方法基于离散节点的 Voronoi 图和 Delaunay 三角化几何结构,采用自然邻近插值构造全域近似函数和试函数。自然邻近插值方案构造简单,不涉及到复杂的矩阵求逆运算,而且不需要任何人为参数,从而避免了无单元伽辽金法中由于不确定的影响半径造成的影响域计算的不确定性。此外,自然单元法的形函数满足插值性质,可以准确地施加本质边界条件,无需其他无网格法类似的特殊处理过程。自然单元法已经被成功地应用于很多领域,但目前尚未见到三维轴对称热传导分析的无网格自然单元法的研究成果。

为了进一步拓展自然单元法的应用范围,本文基于加权残值法详细推导了三维轴对称功能梯度材料瞬态热传导分析的自然单元法理论公式,并给出了其详细的数值实现过程。在此基础上,采用 FORTRAN 自编了相关的计算程序。最后,通过典型算例的计算和对比分析,不仅验证了自然单元法应用于三维轴对称功能梯度材料瞬态热传导分析的有效性和合理性,并且讨论了梯度参数的变化对计算结果的影响。

1 自然邻近插值

考虑二维空间中由 M 个离散节点构成的点集 $N = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ 描述的封闭区域。点集 N 的 Voronoi 结构是能够唯一地把该二维空间分成若干个子空间 T_I , 并且点 x_I 对应的子空间 T_I 内的任意一点到 x_I 的距离比到其他节点 x_J 的距离近。其数学表达式为

$$T_I = \{x \in R^2 : d(x, x_I) < d(x, x_J), \forall J \neq I\} \quad (1)$$

式中: $d(x, x_I)$ 为点 x 与节点 x_I 的距离。

为确定 Sibson 插值形函数,定义二次 Voronoi 结构为

$$T_{IJ} = \{x \in R^2 : d(x, x_I) < d(x, x_J) < d(x, x_K), \forall J \neq I \neq K\} \quad (2)$$

在几何意义上, T_{IJ} 实际上是以节点 x_I 为最近点,节点 x_J 为次近点的空间点位置的集合。图 1 所示为平面 7 个节点的 Voronoi 结构和待插点 x 的二次 Voronoi 结构。

构造出插值点 x 的一次和二次 Voronoi 结构后,插值点 x 的形函数及其导数可以写为^[9]

$$\varphi_I(x) = A_I(x)/A(x) \quad (3)$$

$$\varphi_{I,j}(x) = \frac{A_{I,j}(x) - \varphi_I(x)A_j(x)}{A(x)} \quad (4)$$

式中: $A_I(x)$ 表示插值点 x 的二次 Voronoi 结构 T_{xI} 的面积; $A(x)$ 表示插值点 x 的一次 Voronoi 结构 T_x 的面积,即 T_{xI} 的总和。

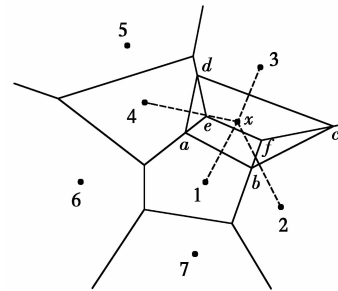


图 1 点 x 的一次和二次 Voronoi 结构

Fig. 1 First-order and second-order Voronoi cells about x

定义了各节点的插值函数后,点 x 的温度函数类似于有限元法可写为

$$T(x) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(x) T_I \quad (5)$$

式中: $T_I (I = 1, 2, \dots, n)$ 是计算点 x 周围自然邻节点 I 的节点温度。

2 控制方程的弱形式及其离散化

在三维轴对称瞬态热传导问题中,空间参量只有半径 r 和轴向参量 z 。在轴对称面 Ω 上, Γ_1 和 Γ_2 分别表示问题域的本质边界和自然边界。空间的温度分布应该满足下面的偏微分方程

$$(k(x)rT_{,i}(x,t))_{,i} + rQ(x,t) = \frac{k(x)r}{\alpha(x)} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}, \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

式中: $T(x,t)$ 为瞬态温度场; t 为时间, $Q(x,t)$ 为

单位体积的内部热源; $k(\mathbf{x})$ 为热传导系数, $\alpha(\mathbf{x})$ 为热扩散系数。对应的边界条件和初始条件为

$$T(\mathbf{x}) = \bar{T}(\mathbf{x}), \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (7a)$$

$$k(\mathbf{x})T_{,i}(\mathbf{x})n_i(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x}), \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (7b)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0, \quad \text{in } \Omega \quad (7c)$$

式中: \bar{T} 和 \bar{q} 分别为边界上给定的温度和热流密度; T_0 为给定的初始温度; n_i 为边界单位外法线向量。

式(6)的等效积分形式的伽辽金提法可表示为

$$\int_{\Omega} \delta T (k(\mathbf{x})rT_{,i}(\mathbf{x}, t))_{,i} d\Omega = \int_{\Omega} \delta T \left(\frac{k(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - Q(\mathbf{x}, t) \right) r d\Omega \quad (8)$$

式中: δT 代表真实温度的变分。对式(8)进行分部积分并考虑式(7b), 可得

$$\int_{\Gamma_2} \delta T \bar{q} r d\Gamma - \int_{\Omega} k(\mathbf{x}) \delta T_{,i} T_{,i}(\mathbf{x}, t) r d\Omega = \int_{\Omega} \delta T \left(\frac{k(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - Q(\mathbf{x}, t) \right) r d\Omega \quad (9)$$

由于只对空间域进行离散, 求解域 Ω 内的试函数 $T^h(\mathbf{x}, t)$ 可由式(5)表示为

$$T^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) T_I(t) \quad (10)$$

将空间离散后的温度表达式(10)代入式(9), 并考虑到 δT_I 的任意性, 就可以得到最终的线性常微分方程组

$$\dot{\mathbf{C}}\mathbf{T}(t) + \mathbf{K}\mathbf{T}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (11)$$

式中:

$$\mathbf{C}_{IJ} = \int_{\Omega} \frac{k(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \varphi_I \varphi_J r d\Omega \quad (12a)$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} k(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \frac{\partial \varphi_J}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_I}{\partial z} \frac{\partial \varphi_J}{\partial z} \right) r d\Omega \quad (12b)$$

$$\mathbf{P}_I = \int_{\Gamma_2} \varphi_I \bar{q} r d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi_I Q r d\Omega \quad (12c)$$

3 时间积分方案

经过对空间域的无网格自然单元法离散, 已将温度场的偏微分方程转化为一组以时间 t 为独立变量的一阶线性常微分方程组。本文中采用传统的两点差分法^[16]对时间域进行离散。

一般情况下, 两点差分格式可以写成

$$\theta \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_{t+\Delta t} + (1-\theta) \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_t = \frac{\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \quad (13)$$

式中: Δt 是时间步长, θ 为时间加权系数。将上式代入式(11), 经过整理后可得到

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}_{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t} \quad (14)$$

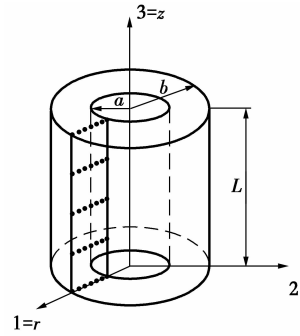


图 2 空心圆筒的节点布置方案

Fig. 2 Nodal distribution for a hollow cylinder

式中

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{C}/\Delta t + \theta \mathbf{K} \quad (15a)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t} = (\mathbf{C}/\Delta t - (1-\theta)\mathbf{K})\mathbf{T}_t + \theta \mathbf{P}_{t+\Delta t} + (1-\theta)\mathbf{P}_t \quad (15b)$$

通过从 0 到 1 更改参数 θ , 有关这个系列方法都可以得到。本文取 $\theta = 2/3$ 。

4 数值算例

4.1 空心圆筒

有一无限长的功能梯度空心圆筒, 其内半径 $a = 8 \times 10^{-2} \text{ m}$, 外半径 $b = 10 \times 10^{-2} \text{ m}$, 如图 2 所示。为了该问题的分析, 截取长 $L = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$ 的一段, 且上下两截面视为绝热面。内表面温度 $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, 外表面温度 $T_1 = 1 \text{ }^\circ\text{C}$, 初始温度给定为零。计算中, 均匀布置 45(9×5) 个节点, 时间步长取 $\Delta t = 0.5 \text{ s}$ 。

假设热传导系数与热扩散系数沿径向指数变化, 即

$$k = k_0 e^{\gamma(r-a)}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{\gamma(r-a)} \quad (16)$$

式中: $k_0 = 17 \text{ W/m} \cdot \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha_0 = 1.7 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。为了检验本文方法的有效性, 取 $k = k_0$ 和 $\alpha = \alpha_0$ 计算得到了均质材料($\gamma = 0$)的情况下空心圆筒在 $r = 9 \text{ cm}$ 处温度随时间的变化, 如图 3 所示。为了进行对比, 图 3 中还给出了相应的解析解^[17]。可以看出, 本文方法与解析解精确吻合, 证明本文方法是有效的。

为了研究梯度参数 γ 对温度变化的影响, 采用自然单元法计算得到了 $\gamma = 0.0, \gamma = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ 和 $\gamma = 0.5 \text{ cm}^{-1}$ 时空心圆筒在 $r = 9 \text{ cm}$ 处温度随时间的变化, 如图 4 所示。正如我们期待的, 在图 4 中, 随着梯度参数的增加, 材料导热性增加, 对应的温度也随之上升。

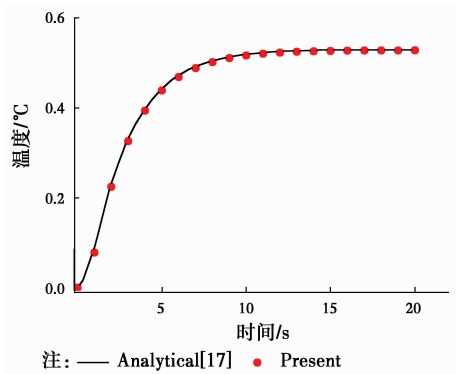


图 3 均质空心圆筒在 $r=9.0$ cm 处温度随时间的变化
Fig. 3 Time variations of the temperature at $r=9.0$ cm in the hollow cylinder with homogeneous material properties

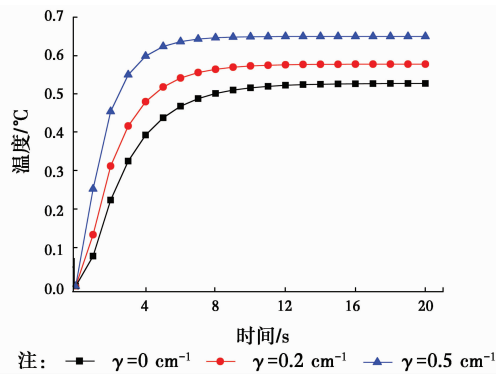


图 4 功能梯度空心圆筒在 $r=9.0$ cm 处温度随时间的变化
Fig. 4 Time variations of the temperature at $r=9.0$ cm in a functionally graded hollow cylinder

4.2 实心圆筒

为了进一步验证本文数值方法的有效性,考虑如图 5 所示的一无限长的功能梯度实心圆筒,其半径 $a=1$ m。截取长 $L=1$ m 的一段,外表面温度 $T=100$ °C,其余边界绝热,初始温度给定为零。计算中,沿径向均匀布置 9 个节点,沿轴向均匀布置 5 个节点,时间步长取 $\Delta t=0.02$ s。

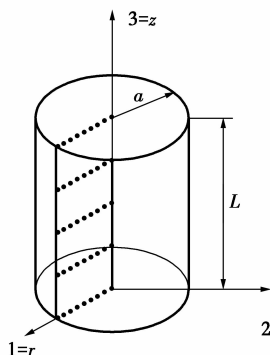


图 5 实心圆筒的节点布置方案

Fig. 5 Nodal distribution for a full cylinder

假设热传导系数与热扩散系数沿径向指数变化,即

$$k = k_0 e^{\gamma r}, \alpha = \alpha_0 e^{\gamma r} \quad (17)$$

式中: $k_0=1.0$ W/m·°C, $\alpha_0=1.0$ m²/s。与前一算例类似,取 $k=k_0$ 和 $\alpha=\alpha_0$ 对均质材料($\gamma=0$)情况下的实心圆筒进行了瞬态热传导分析。图 6 给出了均质实心圆筒在对称轴处的温度随时间变化的本文数值解与解析解^[17]的比较,可以看出采用自然单元法的数值解与解析解吻合很好,说明自然单元法在三维轴对称瞬态热传导分析中可以取得很高的计算精度。

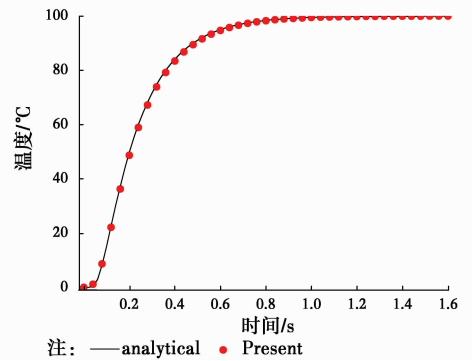


图 6 均质实心圆筒对称轴处温度随时间的变化
Fig. 6 Time variations of the temperature on the axis of the full cylinder with homogeneous material properties

为了进一步研究梯度参数 γ 对温度变化的影响,图 7 给出了 $\gamma=0.0$, $\gamma=-1$ m⁻¹ 和 $\gamma=-2$ m⁻¹ 时采用自然单元法计算得到的实心圆筒在对称轴处温度随时间的变化。显然,图 7 也反映了这种温度随着梯度参数增加而上升的现象。

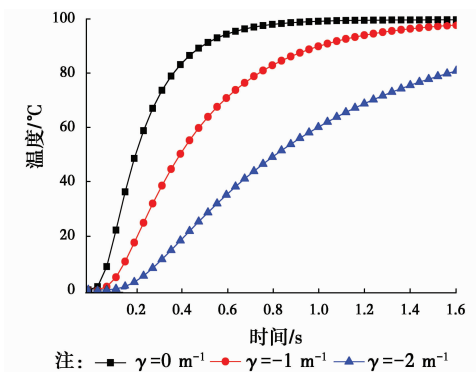


图 7 功能梯度实心圆筒在对称轴处温度随时间的变化
Fig. 7 Time variations of the temperature on the axis of a functionally graded full cylinder

5 结论

作为介于有限元法与无网格法之间的一种数值

方法,自然单元法的节点影响域是由节点的Voronoi结构所规定的自然相邻关系给出,不受人为参数的影响,具有其他无网格法不可比拟的优越性。根据三维轴对称功能梯度材料瞬态热传导方程及其边界条件,利用加权残值法,选取自然邻近插值对轴对称面上的温度场进行离散,首次详细推导了三维轴对称功能梯度材料瞬态热传导问题的自然单元法计算公式,并编制了相应的FORTRAN计算程序。本文分析和算例求解结果表明,采用自然单元法求解三维轴对称功能梯度材料瞬态热传导问题是可行的,具有精度高和稳定性好的优点。本文方法还可以容易地推广到三维轴对称功能梯度材料热弹性问题的求解计算。

参考文献:

- [1] 张静华,魏军杨. DQ法求解FGM Levinson梁的静态弯曲问题[J]. 华东交通大学学报, 2014, 31(3): 80-87.
ZHANG J H, WEI J Y. Static bending solution of functionally graded material Levinson beams based on differential quadrature method [J]. Journal of East China Jiaotong University, 2014, 31(3): 80-87. (in Chinese)
- [2] WANG H, QIN Q H, KANG Y L. A meshless model for transient heat conduction in functionally graded materials [J]. Computational Mechanics, 2006, 38: 51-60.
- [3] 蓝林华,富明慧,程正阳. 功能梯度材料瞬态热传导问题的降维精细积分法[J]. 固体力学学报, 2010, 31(4): 406-410.
LAN L H, FU M H, CHENG Z Y. Decrement-dimensional precise time integration of 2D transient heat conduction equation for functionally graded materials [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2010, 31(4): 406-410. (in Chinese)
- [4] 陈建桥,丁亮. 功能梯度材料瞬态热传导问题的MLPG方法[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2007, 35(4): 119-121.
CHEN J Q, DING L. A MLPG method of transient heat transfer in FGMs [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2007, 35(4): 119-121. (in Chinese)
- [5] 李庆华,陈莘莘,薛志清,等. 基于自然单元法和精细积分法的功能梯度材料瞬态热传导问题求解[J]. 计算机辅助工程, 2011, 20(3): 25-28.
LI Q H, CHEN S S, XUE Z Q, et al. Transient heat conduction solution to functionally graded materials based on natural element method and precise integration method [J]. Computer Aided Engineering, 2011, 20(3): 25-28. (in Chinese)
- [6] LI Q H, CHEN S S, ZENG J H. A meshless model for transient heat conduction analyses of 3D axisymmetric functionally graded solids [J]. Chinese Physics B, 2013, 22: 120204.
- [7] SLADEK J, SLADEK V, HELLMICH C h, et al. Heat conduction analysis of 3D axisymmetric and anisotropic FGM bodies by meshless local Petrov-Galerkin method [J]. Computational Mechanics, 2007, 39: 323-333.
- [8] SLADEK J, SLADEK V, KRIVACEK J, et al. Local BIEM for transient heat conduction analysis in 3D axisymmetric functionally graded solids [J]. Computational Mechanics, 2003, 32: 169-176.
- [9] SUKUMAR N, MORAN T, BELYTSCHKO T. The natural element method in solid mechanics [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43(5): 839-887.
- [10] SUKUMAR N, MORAN B. C1 natural neighbour interpolation for partial differential equations [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1999, 15(4): 417-447.
- [11] 江涛,章青. 直接增强自然单元法计算应力强度因子[J]. 计算力学学报, 2010, 27(2): 264-269.
JIANG T, ZHANG Q. Computing stress intensity factors by enriched natural element method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2010, 27(2): 264-269. (in Chinese)
- [12] 张勇,易红亮,谈和平. 求解辐射导热耦合换热的自然单元法[J]. 工程热物理学报, 2013, 34(5): 918-922.
ZHANG Y, YI H L, TAN H P. Natural element method for coupled radiative and conductive heat transfer [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2013, 34(5): 918-922. (in Chinese)
- [13] 董轶,马永其,冯伟. 弹性力学的杂交自然单元法[J]. 力学学报, 2012, 44(3): 568-575.
DONG Y, MA Y Q, FENG W. The hybrid natural element method for elasticity [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, 44(3): 568-575. (in Chinese)

- [14] 曾祥勇,朱爱军,邓安福. Winkler 地基上厚板分析的自然单元法[J]. 固体力学学报, 2008, 29(2): 163-169.
ZENG X Y, ZHU A J, DENG A F. Natural element method for analysis of thick plates lying over Winkler foundation [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2008, 29(2): 163-169. (in Chinese)
- [15] 周书涛,刘应华,陈莘莘. 基于自然单元法的极限上限分析[J]. 固体力学学报, 2012, 33(1): 39-47.
ZHOU S T, LIU Y H, CHEN S S. Upper-bound limit analysis based on natural element method [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2012, 33(1): 39-47. (in Chinese)
- [16] CHEN L, LIEW K M. A local Petrov-Galerkin approach with moving Kriging interpolation for solving transient heat conduction problems [J]. Computational Mechanics, 2011, 47: 455-467.
- [17] CARSLAW H S, JAEGER J C. Conduction of heat in solids [M]. Oxford: Clarendon Press, 1959.

(编辑 胡 玲)