doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2016.03.011

基于加权最小二乘法的供水管网节点流量校核

范江[1]，杜坤[1]，周明[1]，徐冰峰[1]，龙天渝[2]
（1. 昆明理工大学 建筑工程学院，昆明 650500；2. 重庆大学 城市建设与环境工程学院，重庆 400045）

摘　要：管网水力模型是实现供水系统现代化管理的重要工具，要使水力模型能比较准确地反映管网真实运行状态，达到预期使用目的，其中的参数需要校核。将管网节点流量校核作为优化问题，采用加权最小二乘法逐步迭代求解，与已有研究相比，采用矩阵分析法推导供水管网雅克比矩阵解析式，引入水量分配矩阵聚合节点流量，将欠定问题转化为超定，提高了校核的计算效率和结果的可靠性。采用简单管网阐明了雅克比矩阵的计算、节点流量的聚合及梯度向量的构造，利用实际管网验证了方法的实用性。

关键词：供水管网；节点流量校核；加权最小二乘法；雅克比矩阵；解析式

中图分类号：TU 991.32　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1674-4764(2016)03-0073-07

Nodal demand calibration of water distribution system using the weighted least squares method

Fan Jiang[1], *Du kun*[1], *Zhou Ming*[1], *Xu Bingfeng*[1], *Long Tianyu*[2]
(1. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, P. R. China;
2. College of Urban Construction and Environmental Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: Hydraulic model of water distribution systems (WDSs) is an essential tool to realize modernization management of WDSs. To make the model capable of reflecting the system's behavior with reasonable accuracy and achieving intended purposes, the parameters in it should be calibrated. The nodal demand calibration of WDS models is formulated as a nonlinear optimization problem, which is then solved iteratively using weighted least squares method. Comparing to previous studies, the proposed method deduces the analytical solution of Jacobian matrix of WDSs based on matrix analysis method, and translates the under-determined problem to over-determined by aggregating the nodal demand using demand allocation matrix, such that the computational efficiency and the reliability of calibration results were improved. A simple network is used to illustrate the computation of Jacobian matrix, the construction of gradient vectors and the aggregation of nodal demand. The practicability of the method is further validated by a real network.

收稿日期：2015-08-02
基金项目：“十二五”国家科技支撑计划(2012BAJ25B06)；昆明理工大学人才科研启动基金(14008943)
作者简介：范江(1988-)，男，主要从事市政工程研究，(E-mail)775011092@qq. com；
杜坤(通信作者)，男，博士，(E-mail) 250977426@qq.com。
Received: 2015-08-02
Foundation item: Kunming University of Science and Technology Talent Scientific Research Foundation (No. 14008943); National Science and Technolgy Pillar Program during the 12th Five-Year Plan Period (No. 2012BAJ25B06)
Author brief: Fan Jiang (1988-), main research interest: municipal engineering, (E-mail) 775011092@qq.com.
Du Kun(corresponding author), PhD, (E-mail) 250977426@qq.com.

Keywords: water distribution system; nodal demand calibration; weighted least squares algorithm; jacobian matrix; analytical solution

管网水力模型不仅能用于指导供水调度、优化运营管理，还是开展其他相关研究的基础，如管网水质模拟、突发性水质污染事件预警与定位等。随着社会经济发展，各地自来水厂开始投入大量人力与财力构建或完善管网水力模型。管网水力模型校核，或称管网参数校正，是指通过调整模型中预先设置的水力参数，使模型计算值与监测值匹配的过程，其目的在于使构建的水力模型能比较准确地反映管网的真实运行状态，达到预期使用目的。在构建的管网水力模型中，由于节点流量随时间不断发生变化，为时间"常变量"，需要进行实时校核[1]。

针对管网节点流量校核，吴学伟等[2]尝试以节点水压为已知量计算节点流量，并采用实验室管网进行验证，结果表明，对实验室小型管网状态估计精度较高，但对于实际大型管网的工况分析有待进一步研究。丛海兵等[3]从管网实时模拟角度出发，提出状态估计的数学模型并采用简约梯度法求解。Shang 等[4]利用卡尔曼滤波法校核管网节点流量，该法利用上一步的节点流量作为校核初值以提高计算效率。鉴于管网中监测点数少于节点数，Cheng 等[5-6]采用截断奇异矩阵分解法求解欠定优化问题实现了节点流量校核。Preis 等[7]尝试采用遗传算法实时校核节点流量，为提高收敛速度，利用 M5 算法对节点流量进行预先估计。此外，目前最广泛使用的 WaterGEMS、InfoWorks WS 等商业软件也采用遗传算法校核管网水力模型[8]。然而，遗传算法的参数设置对算法性能影响较大，其本身就是个优化问题，要求校核人员具有相关的数学知识，且需要依据多次运算收敛情况判断参数设置是否合理，会导致使用困难与计算量大等缺点。例如，中国很多水厂都花费巨资购买上述软件，但实际使用效果并不理想。再者，Vassiljev 等[9-11]的最新研究表明，当大型管网变量个数大于 10 时，遗传算法计算时间长达数小时，无法实现节点流量的实时校核。总之，如何提高节点流量校核的计算效率及校核结果可靠性仍是管网研究领域的热点与难点问题。

加权最小二乘法是高斯－牛顿算法的变形，不仅计算效率高，还能通过调整权重系数提高校核结果的可靠性，被广泛用于解决各类实际工程问题。鉴于节点流量实时校核要求较高的计算效率，笔者深入研究了基于加权最小二乘法的管网节点流量校核，相较于以往研究，采用矩阵分析法推导供水管网雅克比矩阵解析式，引入水量分配矩阵将节点流量聚合减少未知量个数，提高了校核的计算效率与结果的可靠性。

1 基于加权最小二乘法的节点流量校核框架

将节点流量校核作为优化问题，构建目标函数

$$f(Q)=\sum_{i=1}^{nH}w_H[H_i^{\circ}-H_i(Q)]^2+\sum_{j=1}^{mq}w_q[q_j^{\circ}-q_j(Q)]^2 \tag{1}$$

式中：nH 为水压监测点数；mq 为流量监测点数；w_H、w_q 为水压与流量监测值的权重系数(取监测误差方差的倒数)；H_i°、$H_i(Q)$为第 i 个水压监测值与对应的模型计算值；q_j°、$q_j(Q)$为第 j 个流量监测值与对应的模型计算值。为便于推导，将目标函数写成矩阵形式

$$f(Q)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{\circ}-\boldsymbol{H}(Q)\\ \boldsymbol{q}_{\circ}-\boldsymbol{q}(Q)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{\circ}-\boldsymbol{H}(Q)\\ \boldsymbol{q}_{\circ}-\boldsymbol{q}(Q)\end{bmatrix} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{H}_{\circ}$、$\boldsymbol{q}_{\circ}$为水压与管道流量监测值向量；$\boldsymbol{H}(Q)$、$\boldsymbol{q}(Q)$为相应的模型计算值向量；$\boldsymbol{W}$ 为权重矩阵。由于管网的能量方程为非线性，采用迭代方法进行求解，若第 k 次迭代的解为

$$f(Q_k+\Delta Q_k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{\circ}-\boldsymbol{H}(Q_k+\Delta Q_k)\\ \boldsymbol{q}_{\circ}-\boldsymbol{q}(Q_k+\Delta Q_k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{W}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{\circ}-\boldsymbol{H}(Q_k+\Delta Q_k)\\ \boldsymbol{q}_{\circ}-\boldsymbol{q}(Q_k+\Delta Q_k)\end{bmatrix} \tag{3}$$

式(3)的线性展开式为

$$f(Q_k+\Delta Q_k)\approx\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{H}_k-\boldsymbol{J}_{\mathbf{H}}(Q_k)\Delta Q_k\\ \Delta\boldsymbol{q}_k-\boldsymbol{J}_{\mathbf{q}}(Q_k)\Delta Q_k\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{W}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{H}_k-\boldsymbol{J}_{\mathbf{H}}(Q_k)\Delta Q_k\\ \Delta\boldsymbol{q}_k-\boldsymbol{J}_{\mathbf{q}}(Q_k)\Delta Q_k\end{bmatrix} \tag{4}$$

式中：$\Delta\boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{H}_{\circ}\ \boldsymbol{H}(Q_k)$；$\Delta q_k=\boldsymbol{q}_{\circ}-\boldsymbol{q}(Q_k)$；$\boldsymbol{J}_{\mathbf{H}}(Q_k)$、$\boldsymbol{J}_{\mathbf{q}}(Q_k)$为节点水压与管道流量对节点流量的雅克比矩阵。根据多元函数极值理论，当目标函数取得极小值时，应有

$$\frac{\partial f(Q_k+\Delta Q_k)}{\partial \Delta Q_k} = -2\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{H}}(Q_k)\\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{q}}(Q_k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{W}\begin{bmatrix}\Delta \boldsymbol{H}_k - \boldsymbol{J}_{\mathrm{H}}(Q_k)\Delta Q_k \\ \Delta \boldsymbol{q}_k - \boldsymbol{J}_{\mathrm{q}}(Q_k)\Delta Q_k\end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

可得

$$\Delta Q_k = \left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{H}}(Q_k)\\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{q}}(Q_k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W} \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{H}}(Q_k)\\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{q}}(Q_k)\end{bmatrix}\right\}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{H}}(Q_k)\\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{q}}(Q_k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W} \begin{bmatrix}\Delta \boldsymbol{H}_k\\ \Delta \boldsymbol{q}_k\end{bmatrix} \tag{6}$$

由于实际管网中监测点个数小于节点数时，式(6)中的联合雅克比矩阵$[\boldsymbol{J}_{\mathrm{H}}(Q_k);\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{q}}(Q_k)]$的行数小于列数，即约束个数少于未知量个数，解不唯一。针对该欠定问题，最常用方法是将具有相似用水特征的节点流量赋予相同的用水乘子或聚合(二者不存在本质区别)，进而将欠定问题转化为超定进行求解。笔者也采用最通用的节点流量聚合法，不同之处在于，通过引入水量分配矩阵进行节点流量聚合，有助于简化运算并易于编程。图 1 为节点流量校核流程图，其中包括校核模块与正计算模块，二者将对方的输出作为输入反复运算直至 ΔQ 达到规定精度 ε，文中 $\varepsilon = 0.01$。

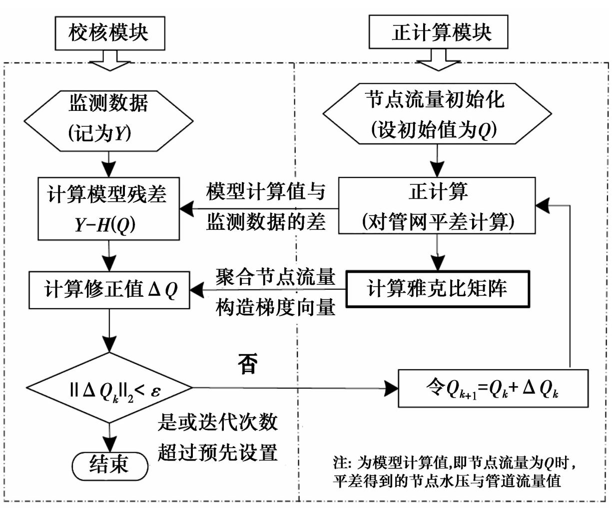

图 1　供水管网节点流量校核流程图

Fig. 1　Calibration Chart about the Node Flow of Network

2　供水管网雅克比矩阵计算

由图 1 可知，校核过程中需要多次计算管网雅克比矩阵，根据已有文献[12-15]，目前多采用扰动法进行管网雅克比矩阵计算，其通过逐个引入扰动至各参数，需要反复进行管网平差，会导致巨大计算量，故不利用节点流量实时校核。鉴于此，采用矩阵分析法推导了供水管网雅克比矩阵解析式，对稳态下供水管网，质量与能量方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{Q} = 0\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{h} = 0\end{cases} \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 管网衔接矩阵，n 与 m 为管网中的节点数与管道数。$\boldsymbol{A}$ 矩阵中元素采用如下方法确定

$$\boldsymbol{A}(i,j) = \begin{cases} -1 & \text{如果节点 } i \text{ 是节点 } j \text{ 的起始节点}\\ 0 & \text{如果节点 } i \text{ 与节点 } j \text{ 未连接}\\ +1 & \text{如果节点 } i \text{ 是节点 } j \text{ 的末端节点}\end{cases}$$

式(7)中，$\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别为管道流量与节点流量向量；$\boldsymbol{H}$ 是节点水头向量；$\boldsymbol{h}$ 是管道水头损失向量。根据式(7)，管网质量与能量方程的微分式写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{q} - \Delta\boldsymbol{Q} = 0\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H} + \Delta\boldsymbol{h} = 0\end{cases} \tag{8}$$

对配水管道的水头损失 h，多采用海澄-威廉公式计算

$$h = K\left(\frac{q}{C}\right)^{1.852}\frac{L}{d^{4.871}} \tag{9}$$

式中：K 为单位换算系数；d、L、q 及 C 分别为管道的管径、管长、流量及海澄-威廉系数。对单根管道，管道水头损失对管道流量的偏微分式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{C}\right)^{1.852}\frac{L}{d^{4.871}}\cdot(1.852\boldsymbol{q}^{-1}) = 1.852\cdot\frac{h}{q} \tag{10}$$

将式(10)写成矩阵形式

$$\Delta\boldsymbol{h} = \boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{q} \tag{11}$$

式中：$\Delta\boldsymbol{h}$ 与 $\Delta\boldsymbol{q}$ 均为 $m\times 1$ 向量，且有

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{q}_1}{1.852\boldsymbol{h}_1} & & & \\ & \frac{\boldsymbol{q}_2}{1.852\boldsymbol{h}_2} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \frac{\boldsymbol{q}_m}{1.852\boldsymbol{h}_m}\end{bmatrix}$$

此外，对于水泵项，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的元素为

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{h}} = \frac{1}{cb\ |\ \boldsymbol{q}\ |^{c-1}} \tag{12}$$

水泵曲线方程为

$$h_{\mathrm{pump}} = a - b\boldsymbol{q}^{c} \tag{13}$$

式中：a、b 及 c 为水泵性能曲线参数。根据式(8)可得

$$\Delta\boldsymbol{h} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H} \tag{14}$$

将式(11)带入(14)，有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{q} \tag{15}$$

将式(15)变形可得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H}=-\Delta\boldsymbol{q} \tag{16}$$

将式(16)两边同乘衔接矩阵 A,可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{q} \tag{17}$$

根据式(8)可知

$$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{q}=\Delta\boldsymbol{Q} \tag{18}$$

将式(18)带入式(17),可得

$$\Delta\boldsymbol{H}=-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\Delta\boldsymbol{Q} \tag{19}$$

同样地,对管道流量向量,有

$$\Delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{h} \tag{20}$$

由于 $\Delta\boldsymbol{h}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H}$,则有

$$\Delta\boldsymbol{q}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{H} \tag{21}$$

将式(19)带入式(21),可得

$$\Delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(ABA^{\mathrm{T}})^{-1}\Delta\boldsymbol{Q} \tag{22}$$

根据式(19)、(22),供水管网节点水压及管道流量对节点流量的雅克比矩阵解析式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial\boldsymbol{Q}}=-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\\[2mm]\dfrac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\end{cases} \tag{23}$$

3　节点流量聚合及梯度向量计算

由于实际管网中监测点数远少于节点数,节点流量校核为欠定问题,不存在唯一解。Waslki[16]最早提出采用节点流量聚合法将欠定问题转化为超定进行求解,随后该方法被绝大多数学者认可,如WaterGEMS、InfoWorks WS 等商业软件都采用了该方法。为简化运算、便于编程,引入水量分配矩阵 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{d}}$ 进行节点流量聚合。对管网中的 n 个节点,若分为 l 组,则水量分配 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{d}}$ 为 $n\times l$ 矩阵,其中,元素取值为各节点的基础需水量与对应聚合流量的比值。基于管网雅克比矩阵及水量分配矩阵,梯度向量能计算为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\mathrm{H}}(Q_g)\\\boldsymbol{J}_{\mathrm{q}}(Q_g)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{\mathrm{ob}}^{-1}\\\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{\mathrm{ob}}^{-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{G}_{\mathrm{d}} \tag{24}$$

式中:$[\boldsymbol{J}_{\mathrm{H}}(Q_g);\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{q}}(Q_g)]$为聚合流量的梯度向量;下标 ob 代表与观测值对应的雅克比矩阵行向量。但值得说明的是,供水管网的节点流量聚合并非易事,从工程经验来看,节点流量聚合是基于管网中某些节点流量具有相似用水特征;而从数学角度来看,节点流量聚合的实质是一种提高参数敏感度的参数化方法,其目的是通过牺牲解的分辨率来控制解的方差。通常节点用水类型划分越细,解的分辨率越高,但解的方差会很大,很小的观测误差都可能导致极大的解误差,甚至不切实际的解,尤其在利用有限水压监测值进行节点流量校核时,水压监测误差甚至会被放大2～3个数量级,因此,节点流量聚合的关键是如何在在分辨率与误差间取得折衷。

一些建模者认为,应先明确管网中各节点的用水类型,然后进行“精细”分类,最后再聚合。但实际中上述做法很难实现,一方面,管网水力模型中节点流量代表的是某个区域的用水量,其本身就包含了不同特征用水;另一方面,统计管网中各节点用水特征工作量巨大,尤其对未构建地理信息系统的管网。此外,若将漏损等不确定因素纳入考虑,准确划分节点用水类型甚至不可能。

Sanz 等[17]的最新研究表明,相较于根据节点实际用水特征进行参数化,根据节点地理位置进行流量聚合得到的校核结果精度高、方差小,这是由于相同地理位置的聚合流量对监测值敏感度更高,能形成单因子滤波,使校核结果可靠性更高。Du 等[18]认为可将变异系数(σ/μ)作为校核结果的可靠性评价指标,同时,结合管网的主要用水特征进行流量聚合,一方面保证校核结果的可靠性,另一方面使校核结果尽量与管网实际用水特征相符。鉴于本文的重点在于阐明整体校核框架,对节点流量的参数化方法及误差分析不做进一步探讨,相关内容可参见文献[18]。

4　案例分析

4.1　案例1

为阐明节点流量的聚合及梯度向量的构造,选用图2的小管网作为例子,管网中各管道的管长均为500 m,管径均为200 mm,海澄-威廉系数均为90。假设节点1与2、节点3与4分别为商业与居民用水并具有相似的用水曲线,根据各节点基本需水量,该管网的水量分配矩阵为

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}\dfrac{Q_1}{Q_{商}} & 0\\[2mm]\dfrac{Q_2}{Q_{商}} & 0\\[2mm]0 & \dfrac{Q_3}{Q_{居}}\\[2mm]0 & \dfrac{Q_4}{Q_{居}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\0.5 & 0\\0 & 0.3333\\0 & 0.6667\end{bmatrix}$$

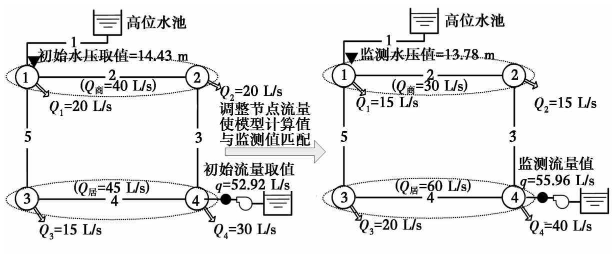

图 2　案例 1 管网

Fig. 2　Network of Case 1

则存在关系式

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{g}}=\boldsymbol{Q}_{\mathrm{b}} \tag{25}$$

式中:$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{g}}$ 为 2×1 的聚合流量向量;$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{b}}$ 为 4×1 的节点流量向量;$\boldsymbol{G}_{\mathrm{d}}$ 为 4×2 水量分配矩阵。通过聚合节点流量,未知参数个数由 4 变为 2,优化问题变为正定(两个未知量对应两个监测值)。根据式(23),该管网的雅克比矩阵计算见表 1。

表 1　节点水压对节点流量的雅克比矩阵 $-(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})^{-1}$

Table 1　Node Pressure of Node Flow Jacobian Matrix

节点	节点 1	节点 2	节点 3	节点 4
节点 1	−0.202 3	−0.186 9	−0.189 8	−0.163 7
节点 2	−0.186 9	−0.243 0	−0.186 2	−0.184 8
节点 3	−0.189 8	−0.186 2	−0.227 3	−0.180 9
节点 4	−0.163 7	−0.184 8	−0.180 9	−0.216 6

雅克比矩阵中的元素代表了节点水压或管道流量对节点流量的敏感度,例如 $-(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 的第 1 行、第 1 列元素表明如果节点 1 的流量增大 1 L/s,节点 1 的水压会下降 0.202 3 m。根据式(24),第 1 次迭代时的梯度向量矩阵见表 2。

表 2　管道流量对节点流量的雅克比矩阵 $\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})^{-1}$

Table 2　Pipe Flow of Node Flow Jacobian Matrix

管道	节点 1	节点 2	节点 3	节点 4
管道 1	0.628 9	0.581 2	0.590 0	0.509 1
管道 2	0.162 3	−0.592 8	0.037 5	−0.222 6
管道 3	0.162 3	0.407 2	0.037 5	−0.222 6
管道 4	−0.208 8	−0.011 6	−0.372 5	0.286 5
管道 5	−0.208 8	−0.011 6	0.627 5	0.286 5
水泵	0.371 1	0.418 8	0.410 0	0.490 9

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\mathrm{H}}(Q_g^1)\\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{q}}(Q_g^1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})_1^{-1}\\ \boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})_5^{-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{G}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}-0.194\ 6 & -0.172\ 4\\ 0.395\ 0 & 0.463\ 9\end{bmatrix} \tag{26}$$

式中:$-(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})_1^{-1}$ 表示提取矩阵 $-(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 的第 1 行(对应于节点 1);$\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})_5^{-1}$ 表示提取矩阵 $-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 的第 5 行(对应于水泵)。模型计算值与监测值的初始残差为

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{H}_1\\ \Delta\boldsymbol{q}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13.78-14.43\\ 55.96-52.92\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.65\\ 3.04\end{bmatrix} \tag{27}$$

将式(26)、(27)带入式(6),可得聚合节点流量的第 1 次修正值为

$$\begin{bmatrix}\Delta Q_{商}\\ \Delta Q_{居}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10.067\\ 15.056\end{bmatrix} \tag{28}$$

表 3 给出了迭代过程中所有 ΔQ 值,表明通过 3 次迭代就得到了最终解。

表 3　迭代过程中 ΔQ 值

Table 3　ΔQ Value inIteration process

初始值	$Q_{k=1}$	$Q_{k=2}$	$Q_{k=3}$	校核结果	真实值
$Q_{商}$ = 40 L/s	−10.067	0.008 7	−0.001 9	30 L/s	$Q_{商}$ = 30 L/s
$Q_{居}$ = 45 L/s	15.057 9	−0.060 1	0.002 1	60 L/s	$Q_{居}$ = 60 L/s
$\lVert\Delta Q\rVert_2$	18.079 7	0.060 7	0.002 9		

4.2　案例 2

利用图 3 的实际管网进一步验证算法可行性。该管网水力模型中仅保留了 DN200 及以上管道,包括 103 根管道与 85 个节点。根据管道的管材与管龄,管道的海曾威廉系数估计为 115。根据水厂提供的用水信息,供水区域大致分为工业区与居民区,其中,工业区内主要包括 4 个集中水点,其用水量占总用水总量的约 50%。

在校核管网水力模型前,将平均时用水量作为节点基本用水量,除了 4 个集中用水点外,假设居民

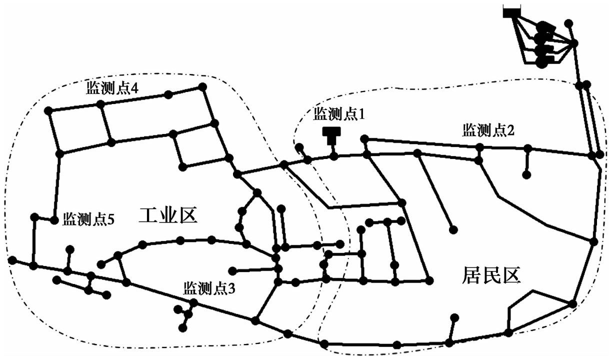

图3 案例2管网

Fig. 3 Network of Case 2

与未计量用水沿管线长度平均分配，并具有相同的用水模式。根据监测的水泵供水量变化曲线确定用水模式，对管网进行延时状态下水力模拟。限于篇幅，仅给出了某天24 h水泵水压与流量的监测值与模型计算值，详见图4。其中，节点水压平均误差为1.1 m、监测流量平均误差33 m^3/h，模型计算值与监测值相差不大，故该管网水力模型能基本反映管网的真实运行状态。

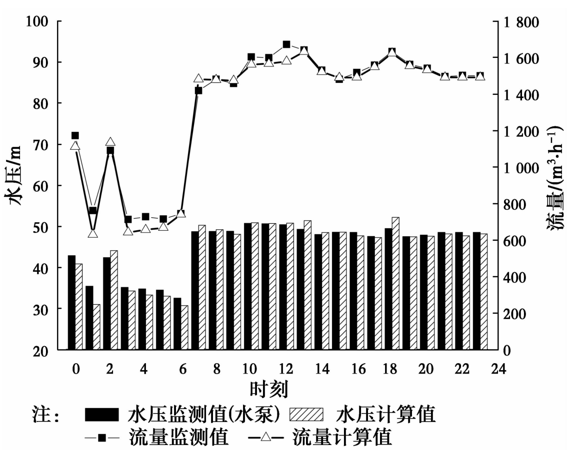

图4 某天24 h水泵水压流量监测值与模型计算值

Fig. 4 Comparing the Monitoring Date with Model Calculation Value about the Pressure and Flow in 24 hours a day

值得说明的是，在利用优化算法校核节点流量前，必须先对管网进行初步的宏观校核，控制模型计算值与监测值的差在一定范围内。如果发现模型计算值与监测值误差异过大，一般当水压差>3 m、流量差>15%时，应复核水泵曲线、检查管网拓扑结构或节点标高是否出错，必要时应进行实地勘察。

在利用所提出算法校核管网节点流量时，为保证校核结果可靠性，控制其变异系数$\sigma/\mu\leqslant 0.1$。通过分析7个监测值对应雅克比矩阵向量，并结合该管网主要用水特征，将区域内节点分为2组。限于篇幅原因，表4仅给出了第10时监测值与校核前后模型计算值，整个校核过程花费时间小于5 s。

表4 第10时段各节点监测值与模型计算值

Table 4 The Monitoring Date and Simulation Calculation Value about Every Node at 10 Time Step m^3

监测点	监测值	初始计算值	校核后计算值	校核前误差	校核后误差
监测点1	31.8	31.96	31.61	−0.16	0.19
监测点2	36.3	36.60	35.74	−0.30	0.56
监测点3	23.9	26.68	24.47	−2.78	−0.57
监测点4	25.4	26.39	24.13	−0.99	1.27
监测点5	23.4	26.36	24.16	−2.96	−0.76
水泵水压	50.7	51.03	50.51	−0.33	0.19
水泵流量	1 598.5	1 540.3	1 564.4	58.26	34.13

根据表4可知，在校核节点流量后，并非所有模型计算值与监测值的差都减小，相反有些节点的差会略微增大，一部分原因是由于影响模型计算值的参数除了节点流量外，还包括管道阻力系数、节点标高等。总体而言，模型计算误差的绝对平均值有明显下降，这表明校核后的模型能更准确地反映真实管网运行状态，由此可见，所提出方法能用于实际管网节点流量校核。

5 结论

探讨了基于加权最小二乘法的供水管网节点流量校核，应用矩阵分析法推导供水管网雅克比矩阵的解析式，采用节点流量聚合法将欠定问题转化为超定进行求解；将所有计算过程转化为简洁的矩阵运算，提高了校核的计算效率与结果可靠性。案例分析结果表明，所提出方法计算效率高，能用于实际管网节点流量校核。

对实际管网节点流量校核，如何合理聚合节点流量是关键，通常当管网中节点流量呈现明显同步变化特征时，节点流量聚合法更适用。此外，吉洪若夫正规化与截断奇异矩阵分解法也能求解该类欠定问题，由于3种方法数学机理不同，对不同规模、不同类型管网的适用性问题有待进一步研究。

参考文献：

[1] KANG D, LANSEY K. Demand and roughness estimation in water distribution systems [J]. Journal of

Water Resources Planning and Management, 2010, 137 (1): 20-30.
[2] 吴学伟，赵洪宾. 给水管网状态估计方法的研究[J]. 哈尔滨建筑大学学报，1995，28(6)：60-64.
WU X W, ZHAO H B. Study of state estimation of water supply system [J]. Journal of Harbin University of Civil Engineering and Architecture, 1995, 28(6): 60-64. (in Chinese)
[3] 丛海兵，黄廷林. 给水管网的状态模拟[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版)，2004，35(4)：343-346.
CONG H B, HUANG T L. State simulation of water supply system [J]. Journal of Xi′an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition), 2004, 35(4): 343-346. (in Chinese)
[4] SHANG F, UBER J G, VAN BLOEMEN WAANDERS B G, et al. Real time water demand estimation in water distribution system [C] // 8th Annial Water Distribution Systems Analysis Symposium, 2006: 1-14.
[5] CHENG W, HE Z. Calibration of nodal demand in water distribution systems [J]. Journal of Water Resources Planning and Management, 2010, 137(1): 31-40.
[6] CHENG W P, YU T C, XU G. Real-time model of a large-scale water distribution system [J]. Procedia Engineering, 2014, 89: 457-466.
[7] PREIS A, ALLEN M, WHITTLE A J. On-line hydraulic modeling of a water distribution system in Singapore [J]. American Society of Civil Engineers, 2012(425): 1336-1348.
[8] WU Z Y, WALSKI T M. Effective approach for solving battle of water calibration network problem [J]. Journal of Water Resources Planning and Management, 2011, 138(5): 533-542.
[9] VASSILJEV A, KOPPEL T. Estimation of real-time demands on the basis of pressure measurements [C] // Proceedings of the 8th International Conference on Engineering Computational Technology, Stirling, United Kingdom: Civil-Comp Press, 2012: 54.
[10] PUUST R, VASSILJEV A. Real water network comparative calibration studies considering the whole process from engineer′s perspective [J]. Procedia Engineering, 2014, 89: 702-709.
[11] VASSILJEV A, KOPPEL T. Estimation of real-time demands on the basis of pressure measurements by different optimization methods [J]. Advances in Engineering Software, 2015, 80(1): 67-71.
[12] LANSEY K E, EL-SHORBAGY W, AHMED I, et al. Calibration assessment and data collection for water distribution networks [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2001, 127(4): 270-279.
[13] KANG D, LANSEY K. Real-time demand estimation and confidence limit analysis for water distribution systems [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2009, 135(10): 825-837.
[14] PEREZ R, PUIG V, PASCUAL J, et al. Pressure sensor distribution for leak detection in Barcelona water distribution network [J]. Water Science and Technology: Water Supply, 2009, 9(6): 715.
[15] MéNDEZ M, ARAYA J A, SANCHEZ L D. Automated parameter optimization of a water distribution system [J]. Journal of Hydroinformatics, 2013 15(1), 71-85.
[16] WALSKI T. Technique for calibrating network models [J]. Journal of Water Resources Planning and Management, 1983, 360 (4), 360-372.
[17] SANZ G, PÉREZ R. Sensitivity analysis for sampling design and demand calibration in water distribution networks using the singular value decomposition [J]. Journal of Water Resources Planning and Management, 2015, 141(10):1-9.
[18] DU K, LONG T Y, WANG J H, et al. Inversion model of water distribution systems for nodal demand calibration[J]. Journal of Water Resources Planning and Management, 2015, 141(9):1-12.

(编辑　胡英奎)