

doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2016.06.008



考虑剪切变形影响的桩基 m 法计算理论

杨美良, 罗婉庆, 张建仁

(长沙理工大学土木与建筑学院, 长沙 410114)

摘要:考虑桩基的剪切变形影响,利用单广义位移深梁理论,建立了桩基 m 法的计算方法,导出了水平位移、转角、弯矩和剪力的初参数表达式和无量纲参数函数的统一表达式,根据桩底边界条件建立了初参数解的计算公式;给出了无量纲参数函数随换算深度和弯剪刚度比的变化图形。研究表明,换算深度小于 3.0 时,弯剪刚度比对无量纲参数函数影响较小,换算深度大于 4.0 时,弯剪刚度比对无量纲参数函数影响的趋势非常明显,桩基剪切变形的影响程度与桩的边界条件有关。算例结果表明,桩身的剪切变形有增大桩顶水平位移、提高弯矩零点位置、改变弯矩分布特征、扩大桩侧土压力大小等影响。

关键词:桩;单广义位移梁理论;剪切变形;初参数;m 法

中图分类号:TU473 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4764(2016)06-0054-08

Calculating theory of m method assumption for piles with shear deformation effect

Yang Meiliang, Luo Wanqing, Zhang Jianren

(School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, P. R. China)

Abstract: Considering the shear deformation effect of piles, the calculating theory of m method assumption for piles was presented by using the single generalized displacement theory of deep beam. The initial parameter formulae to horizontal displacement, slope, moment and shear force were derived. The unified non-dimensional functions were also put forward. According to the boundary conditions, the initial parameters solutions were determined. The changing figures of non-dimensional functions with converting length and ratio of bend stiffness to shear stiffness were plotted. Some conclusions were summarized that when the converting length was less than 3.0, there was little influence of the ratio of bending stiffness to shear stiffness on the non-dimensional functions, while the converting length was greater than 3.0, the influence of the ratio of bending stiffness to shear stiffness on the non-dimensional functions became obvious; the influencing degree of the shear deformation effect was related to the boundary conditions. Example results showed that shear deformation can enlarge the horizontal displacement at the top, lift the

收稿日期:2016-04-08

基金项目:国家自然科学基金(51278072);湖南交通科技创新项目(201452)

作者简介:杨美良(1967-),女,教授,博士,主要从事桥梁结构理论分析,(E-mail)yangmeiliang@163.com。

Received:2016-04-08

Foundation item: National Natural Science Foundation of China(No. 51278072); Communication Science and Technology Innovation Project of Hunan(No. 201452)

Author brief: Yang Meiliang(1967-), professor, PhD, main research interest: theoretical analysis of bridge structure, (E-mail)yangmeiliang@163.com.

position of zero moment, change moment distribution and magnify the soil pressure on pile.

Keywords: pile; single generalized displacement beam theory; shear deformation; initial parameter; m method

桩基础是桥梁、建筑等工程中常用的基础形式,并有日益推广使用的趋势^[1],其水平桩的计算理论主要有 m 法、K 法、C 值法、双参数法等^[1-2]。目前,规范推荐采用基于 Euler 梁理论的 m 法,并编制了大量计算表格,相应的有限元法^[3-4]、有限差分法^[4]和瑞利-里兹法^[3]等。基于深梁理论,考虑桩身剪切变形影响的研究也取得积极进展,肖世卫^[5]考虑桩身剪切变形影响,利用深梁单元分析了桩横向受力问题,并以此分析桩身剪切变形对桩顶位移和桩身内力的影响,得到了剪切变形影响极小的结论。该文不足之处是采用有限元法进行数值研究,没有推导理论解析解;桩身抗弯刚度矩阵采用 Timoshenko 梁单元位移函数、但桩侧土抗力刚度却采用 Euler 梁单元位移函数,两者不统一。

目前,考虑剪切变形影响的深梁有 0~3 阶剪切变形理论,被广泛认同的理论有 Timoshenko 理论^[6]、Jemielita 理论^[7]、Levinson 理论^[8]、Bickford 理论^[9]、Reddy 理论^[10]等,这些理论都有 2 个或以上的位移,计算上不方便。2000 年,龚克提出了单广义位移深梁理论^[11],该理论能用单一的广义挠度表出转角、弯矩和剪力,计算上非常方便,本文选择该理论来建立桩基 m 法分析方法,以考虑基桩的剪切变形影响,推动桩基计算理论的发展。

1 单广义位移深梁理论

2000 年龚克提出单广义位移深梁理论,建立理论模型时取梁的中心线为 x 轴,梁的挠曲面为 xy 平面,对梁的变形作如下假设^[11]:1)梁的中性轴的轴向位移不计, y 方向的挤压变形不计;2)变形前垂直于中心线的平面在变形后仍保持为平面(不一定垂直于挠曲线);3)剪切转角随 x 二阶变化率不计。相应的平衡方程、转角 ψ 、弯矩 M 和剪力 Q 表达式如下^[13]见式(1)。

$$\begin{cases} D \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q \\ \psi = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{D}{C} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ M = D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D}{C} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \\ Q = D \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \end{cases} \quad (1)$$

式中: $D(=EI)$ 为桩身的抗弯刚度、 $C(=kGA)$ 为桩身的抗剪刚度、 k 为桩身截面的剪切修正系数,圆形截面取 9/10、矩形截面取 5/6。

从以上计算公式可以看出,单广义位移深梁理论的平衡方程与 Euler 梁理论一致,转角、弯矩和剪力用广义位移挠度表示,该理论的正确性和推广应用已在文献[11]中有充分论证。

2 弹性桩的 m 法计算理论

采用弹性桩 m 法的计算假定,弹性桩侧受水平分布力的平衡条件为

$$D \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + mbxw = 0 \quad (2)$$

引入桩的变形系数 $\alpha = \sqrt[5]{\frac{mb}{D}}$,上式可改写为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\alpha^5 \cdot x \cdot w \quad (3)$$

设桩侧水平位移解为级数解,如式(4)所示。

$$w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (4)$$

将式(4)求导,其第一、二、三、四阶导数为

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot i \cdot x^{i-1}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{i=2}^{\infty} a_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot x^{i-2}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \sum_{i=3}^{\infty} a_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdot x^{i-3}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{i=4}^{\infty} a_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdot (i-3) x^{i-4} \quad (5)$$

将式(4)、(5)代入式(3),并展开,使等式恒成立,则应有 $a_4 = 0$,除 $a_4 = 0$ 外,其他系数应满足关系式

$$a_{n+4} = -\alpha^5 \cdot \frac{a_{n-1}}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \quad (6)$$

式中: $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ 。

进一步分析,可知

$$a_{5k-1} = 0, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_{5k} = (-1)^k \cdot (\alpha^5)^k \cdot \frac{(5k-4)!!}{(5k)!} \cdot a_0$$

$$\begin{aligned}
 a_{5k+1} &= (-1)^k \cdot (\alpha^5)^k \cdot \frac{(5k-3)!!}{(5k+1)!} \cdot a_1 \\
 a_{5k+2} &= (-1)^k \cdot (\alpha^5)^k \cdot \frac{2(5k-2)!!}{(5k+2)!} \cdot a_2 \quad (7) \\
 a_{5k+4} &= (-1)^k \cdot (\alpha^5)^k \cdot \frac{6(5k-1)!!}{(5k+3)!} \cdot a_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= w_0, a_1 = \psi_0 - \frac{Q_0}{C}, \\
 a_2 &= \frac{M_0}{2D}, a_3 = \frac{Q_0}{6D} \quad (12)
 \end{aligned}$$

用 $x=0$ 时的初参数表示的位移、转角、弯矩和剪力为

$$\begin{aligned}
 w(x) &= w_0 \cdot TA_1(x) + \frac{\psi_0}{\alpha} \cdot TB_1(x) + \\
 &\frac{M_0}{\alpha^2 D} \cdot TC_1(x) + \frac{Q_0}{\alpha^3 D} \cdot TD_1(x) \quad (13)
 \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{cases}
 TA_1(x) = EA_1(x) \\
 TB_1(x) = EB_1(x) \\
 TC_1(x) = EC_1(x) \\
 TD_1(x) = ED_1(x) - \frac{\alpha^2 D}{C} \cdot EB_1(x)
 \end{cases} \quad (14)$$

式中: $EA_1(x), EB_1(x), EC_1(x), ED_1(x)$ 为不考虑剪切变形影响时基于 Euler 梁理论的对应无量纲参数函数, 具体表达式为^[2]

$$\begin{aligned}
 EA_1(x) &= Y_0(x) = \\
 &1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(5k-4)!!}{(5k)!} \cdot (\alpha x)^{5k} \\
 EB_1(x) &= \alpha Y_1(x) = \\
 &\alpha \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(5k-3)!!}{(5k+1)!} \cdot (\alpha x)^{5k+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \right] \\
 EC_1(x) &= \frac{\alpha^2}{2} Y_2(x) = \\
 &\frac{\alpha^2}{2} \left[x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(5k-2)!!}{(5k+2)!} \cdot (\alpha x)^{5k+2} \cdot \frac{2}{\alpha^2} \right] \\
 ED_1(x) &= \frac{\alpha^3}{6} Y_3(x) = \\
 &\frac{\alpha^3}{6} \left[x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(5k-1)!!}{(5k+3)!} \cdot (\alpha x)^{5k+3} \cdot \frac{6}{\alpha^3} \right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

转角表达式为

$$\begin{aligned}
 \frac{\psi(x)}{\alpha} &= w_0 \cdot TA_2(x) + \frac{\psi_0}{\alpha} \cdot TB_2(x) + \\
 &\frac{M_0}{\alpha^2 D} \cdot TC_2(x) + \frac{Q_0}{\alpha^3 D} \cdot TD_2(x) \quad (16)
 \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned}
 TA_2(x) &= EA_2(x) + \frac{\alpha^2 D}{C} \cdot EA_4(x) \\
 TB_2(x) &= EB_2(x) + \frac{\alpha^2 D}{C} \cdot EB_4(x) \\
 TC_2(x) &= EC_2(x) + \frac{\alpha^2 D}{C} \cdot EC_4(x) \\
 TD_2(x) &= ED_2(x) - \frac{\alpha^2 D}{C} \cdot EB_2(x) +
 \end{aligned}$$

式中: $(\)!!$ 符号含义式(8)所示。

$$(5k-T)!! =$$

$$\begin{aligned}
 &[5k-T][5(k-1)-T][5(k-2)-T] \cdots \\
 &[5 \cdot 2 - T][5 \cdot 1 - T] \quad (8)
 \end{aligned}$$

将各系数表达式代入位移解, 有

$$\begin{aligned}
 w(x) &= a_0 \cdot Y_0(x) + a_1 \cdot Y_1(x) + \\
 &a_2 \cdot Y_2(x) + a_3 \cdot Y_3(x) \quad (9)
 \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned}
 Y_0(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(5k-4)!!}{(5k)!} \cdot (\alpha x)^{5k} \\
 Y_1(x) &= x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(5k-3)!!}{(5k+1)!} \cdot (\alpha x)^{5k+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \\
 Y_2(x) &= x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(5k-2)!!}{(5k+2)!} \cdot (\alpha x)^{5k+2} \cdot \frac{2}{\alpha^2} \\
 Y_3(x) &= x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(5k-1)!!}{(5k+3)!} \cdot (\alpha x)^{5k+3} \cdot \frac{6}{\alpha^3}
 \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时, 假定桩顶的位移、转角、弯矩和剪力代入式(9), 可确定参数 a_0, a_1, a_2, a_3 。由式(1)的第 2、3、4 式可知, 桩的转角、弯和剪力用广义位移表示为

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{D}{C} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = a_0 \cdot Y'_0(x) + a_1 \cdot Y'_1(x) + \\
 &a_2 \cdot Y'_2(x) + a_3 \cdot Y'_3(x) + \frac{D}{C} \cdot [a_0 \cdot Y'''_0(x) + \\
 &a_1 \cdot Y'''_1(x) + a_2 \cdot Y'''_2(x) + a_3 \cdot Y'''_3(x)] \\
 M &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D}{C} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &D \left\{ a_0 \cdot Y''_0(x) + a_1 \cdot Y''_1(x) + a_2 \cdot Y''_2(x) + \right. \\
 &a_3 \cdot Y''_3(x) + \frac{D}{C} \cdot [a_0 \cdot Y_0^{IV}(x) + \\
 &a_1 \cdot Y_1^{IV}(x) + a_2 \cdot Y_2^{IV}(x) + a_3 \cdot Y_3^{IV}(x)] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = D [a_0 \cdot Y'''_0(x) + a_1 \cdot Y'''_1(x) + \\
 &a_2 \cdot Y'''_2(x) + a_3 \cdot Y'''_3(x)] \quad (10)
 \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 w_0 &= a_0, \quad \psi_0 = a_1 + \frac{6D}{C} \cdot a_3, \\
 M_0 &= 2D \cdot a_2, \quad Q_0 = 6D \cdot a_3 \quad (11)
 \end{aligned}$$

解得

$$\frac{\alpha^2 D}{C} \cdot ED_4(x) - \left(\frac{\alpha^2 D}{C}\right)^2 \cdot EB_4(x) \quad (17)$$

式中: $EA_2(x), EB_2(x), EC_2(x), ED_2(x)$ 为不考虑剪切变形影响时基于 Euler 梁理论的对应无量纲参数函数, 分别由 $EA_1(x), EB_1(x), EC_1(x), ED_1(x)$ 求一次导数后再除以 α 得到。

弯矩表达式为

$$\begin{aligned} \frac{M(x)}{\alpha^2 D} &= \omega_0 \cdot TA_3(x) + \frac{\psi_0}{\alpha} \cdot TB_3(x) + \\ &\frac{M_0}{\alpha^2 D} \cdot TC_3(x) + \frac{Q_0}{\alpha^3 D} \cdot TD_3(x) \end{aligned} \quad (18)$$

式中:

$$\begin{aligned} TA_3(x) &= EA_3(x) + \frac{\alpha^2 D}{C} \cdot EA_5(x) \\ TB_3(x) &= EB_3(x) + \frac{\alpha^2 D}{C} \cdot EB_5(x) \\ TC_3(x) &= EC_3(x) + \frac{\alpha^2 D}{C} \cdot EC_5(x) \\ TD_3(x) &= ED_3(x) - \frac{\alpha^2 D}{C} \cdot EB_3(x) + \\ &\frac{\alpha^2 D}{C} \cdot ED_5(x) - \left(\frac{\alpha^2 D}{C}\right)^2 \cdot EB_5(x) \end{aligned} \quad (19)$$

式中: $EA_3(x), EB_3(x), EC_3(x), ED_3(x)$ 和 $EA_5(x), EB_5(x), EC_5(x), ED_5(x)$ 为不考虑剪切变形影响时基于 Euler 梁理论的对应无量纲参数函数, 分别是由 $EA_2(x), EB_2(x), EC_2(x), ED_2(x)$ 和 $EA_4(x), EB_4(x), EC_4(x), ED_4(x)$ 求一次导数后再除以 α 得到。

剪力表达式为

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{\alpha^3 D} &= \omega_0 \cdot TA_4(x) + \frac{\psi_0}{\alpha} \cdot TB_4(x) + \\ &\frac{M_0}{\alpha^2 D} \cdot TC_4(x) + \frac{Q_0}{\alpha^3 D} \cdot TD_4(x) \end{aligned} \quad (20)$$

式中:

$$\begin{cases} TA_4(x) = EA_4(x) \\ TB_4(x) = EB_4(x) \\ TC_4(x) = EC_4(x) \\ TD_4(x) = ED_4(x) - \frac{\alpha^2 D}{C} \cdot EB_4(x) \end{cases} \quad (21)$$

$EA_4(x), EB_4(x), EC_4(x), ED_4(x)$ 为不考虑剪切变形影响时基于 Euler 梁理论的对应无量纲参数函数, 分别是由 $EA_3(x), EB_3(x), EC_3(x), ED_3(x)$ 求一次导数后再除以 α 得到。

从以上所推导的计算公式可以看出, 正是由于单广义位移深梁理论具有位移、转角、弯矩和剪力都可用单广义位移来表示的特点, 使得考虑剪切变形影响的桩基 m 法分析仍可用级数来求解。如果采

用经典的 Timoshenko 深梁理论来考虑剪切变形的影响, 其级数解非常复杂。可以这样说, 选用单广义位移深梁理论是建立考虑剪切变形影响的桩基 m 法分析模型的最成功技巧。

3 计算公式的统一表达

从上述计算公式可以看出, 考虑剪切变形的计算函数 $EA_i(x), EB_i(x), EC_i(x), ED_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 都可由不考虑剪切变形的无量纲参数函数表示, 而不考虑剪切变形影响的计算函数可用一种统一的公式来表达^[12]。即

$$AA(i, j) = S(i, j) \cdot (\alpha x)^{j-i} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{[5k - (5-j)]!!}{(5k + j - i)!} \cdot (\alpha x)^{5k+j-i} \quad (22)$$

式中: $i = 1, 2, 3, 4, 5$ 代表上式中挠度、转角、弯矩、剪力及补充项的计算, $j = 1, 2, 3, 4$ 代表各计算公式中的 A、B、C、D。其中的 $S(i, j)$ 表达式如式(23)。

$$S(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{(j-i)!} & j > i \\ 1 & j = i \\ 0 & j < i \end{cases} \quad (23)$$

式(23)中, 级数收敛很快, 一般取前 10 项就有很高的计算精度, 甚至取前 5 项即可。

4 边界条件的处理及桩顶位移的确定

4.1 摩擦桩、柱承桩 ω_0, ψ_0 的计算

当摩擦桩的 $ah \geq 2.5$ 、柱承桩的 $ah \geq 3.5$ 时, 桩底转角很小, 可以忽略^[2], 相应的桩顶位移、转角用桩顶弯矩、剪力表示为

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{Q_0}{\alpha^3 D} TA_{\omega_0} + \frac{M_0}{\alpha^2 D} TB_{\omega_0} \\ \psi_0 = -\left(\frac{Q_0}{\alpha^2 D} TA_{\psi_0} + \frac{M_0}{\alpha D} TB_{\psi_0}\right) \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } TA_{\omega_0} &= \frac{TB_3 \cdot TD_4 - TB_4 \cdot TD_3}{TA_3 \cdot TB_4 - TA_4 \cdot TB_3}, TB_{\omega_0} = \\ &\frac{TB_3 \cdot TC_4 - TB_4 \cdot TC_3}{TA_3 \cdot TB_4 - TA_4 \cdot TB_3}, TA_{\psi_0} = \frac{TA_3 \cdot TD_4 - TA_4 \cdot TD_3}{TA_3 \cdot TB_4 - TA_4 \cdot TB_3}, \\ &TB_{\psi_0} = \frac{TA_3 \cdot TC_4 - TA_4 \cdot TC_3}{TA_3 \cdot TB_4 - TA_4 \cdot TB_3} \end{aligned}$$

4.2 嵌岩桩 ω_0, ψ_0 的计算

嵌岩桩桩底固结, 据此条件可求出桩顶位移、转角用桩顶弯矩、剪力表示为

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{Q_0}{\alpha^3 D} TA_{\omega_0} + \frac{M_0}{\alpha^2 D} TB_{\omega_0} \\ \psi_0 = -\left(\frac{Q_0}{\alpha^2 D} TA_{\psi_0} + \frac{M_0}{\alpha D} TB_{\psi_0}\right) \end{cases} \quad (25)$$

$$\text{式中: } TA_{\infty 0} = \frac{TB_2 \cdot TD_1 - TB_1 \cdot TD_2}{TA_2 \cdot TB_1 - TA_1 \cdot TB_2}, TB_{\infty 0} =$$

$$\frac{TB_2 \cdot TC_1 - TB_1 \cdot TC_2}{TA_2 \cdot TB_1 - TA_1 \cdot TB_2}, TA_{\psi 0} = \frac{TA_2 \cdot TD_1 - TA_1 \cdot TD_2}{TA_2 \cdot TB_1 - TA_1 \cdot TB_2},$$

$$TB_{\psi 0} = \frac{TA_2 \cdot TC_1 - TA_1 \cdot TC_2}{TA_2 \cdot TB_1 - TA_1 \cdot TB_2}$$

5 无量纲参数函数

考虑剪切变形影响时的无量纲参数函数 $TA_i(x)$ 、 $TB_i(x)$ 、 $TC_i(x)$ 、 $TD_i(x)$ 与不考虑剪切变形影响的无量纲参数函数 $EA_i(x)$ 、 $EB_i(x)$ 、 $EC_i(x)$ 、 $ED_i(x)$ 间有一个重要的参数 $\frac{\alpha^2 D}{C}$ ，此参数可以分解为换算深度 ah 和弯剪刚度比 R 之积，即

$$\frac{\alpha^2 D}{C} = (ah \cdot R)^2, \text{ 弯剪刚度比定义为}$$

$$R = \sqrt{\frac{D}{Ch^2}} = \sqrt{\frac{E}{kG} \cdot \frac{I/A}{h^2}} = \sqrt{\frac{E}{kG}} \cdot \frac{\lambda}{h} \quad (26)$$

从式(26)可以看出，弯剪刚度比与构件的细长比 $\frac{\lambda}{h}$ 有相同的含义，只是增加了材料弹性模量、剪切模量及截面剪切修正系数等信息。

改变桩的弯剪刚度比 R 和换算深度 ah ，各无量纲参数函数随 R 、 ah 的变化如下图 1 所示。计算中 R 取 0、0.1、0.125、0.15、0.175、0.20、0.22、0.23、0.24。当 $R=0$ 时，表示抗剪劲度无穷大，即为不考虑桩的剪切变形影响的计算结果。

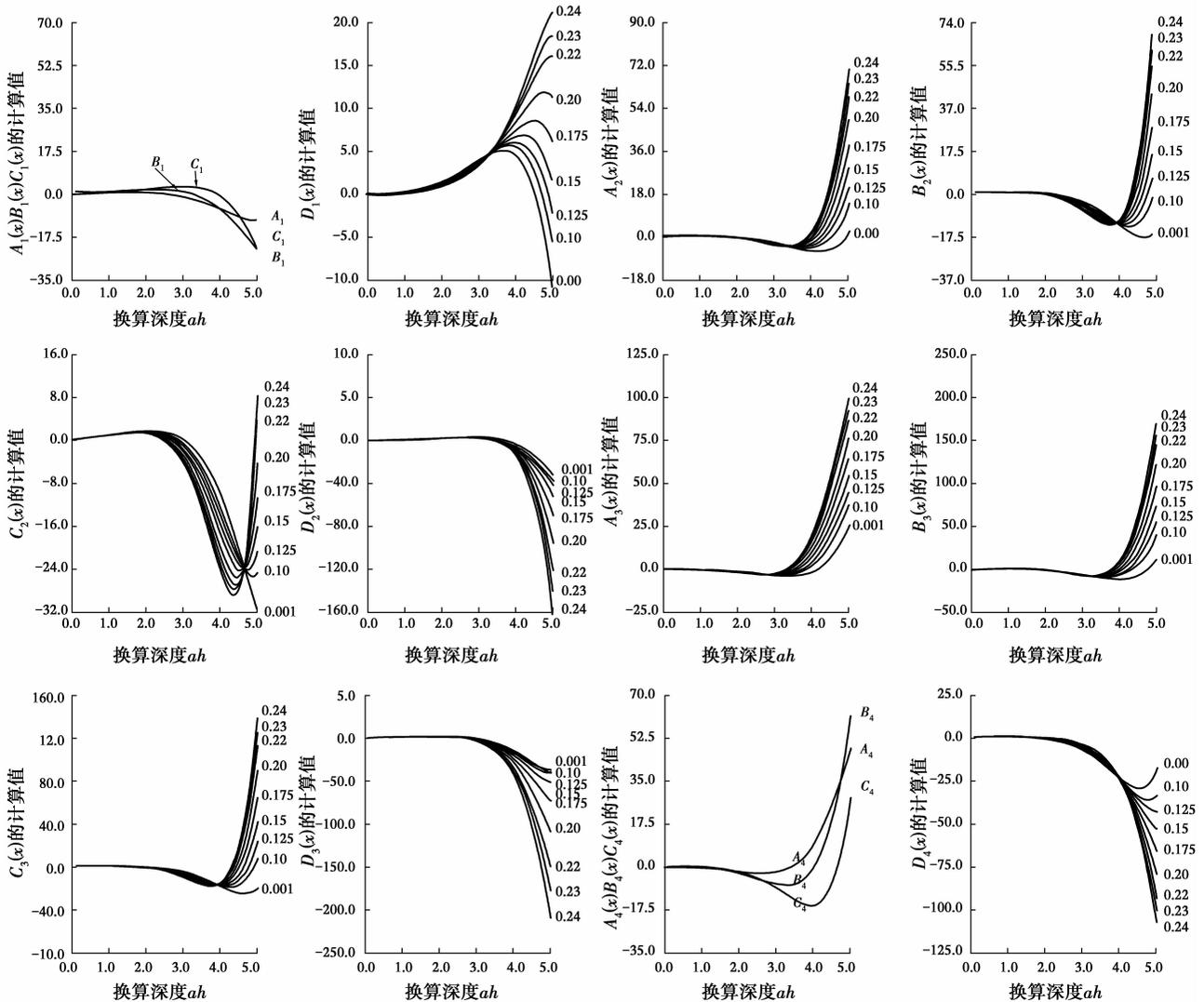


图 1 桩身位移和内力的计算参数函数随换算深度 ah 和弯剪刚度比 R 的变化
 Fig. 1 Calculating parameter functions of inner displacements and forces changing with converting length and ratio of bending stiffness to shear stiffness

从图 1 可以看出,当换算深度 $ah < 3.0$ 时,弯剪刚度比 R 对无量纲参数函数的影响较小;只有当 $ah > 3.0$ 后,弯剪刚度比 R 对无量纲参数函数的影响才开始显示出来;在 $ah > 4.0$ 后,弯剪刚度比 R 对无量纲参数函数的影响的趋势非常明显。

根据式(24),摩擦桩或柱承桩的计算参数随弯剪刚度比 R 、换算深度 ah 的变化如图 2 所示。计算中 R 取 0、0.02、0.04、0.06、0.08、0.10、0.12、0.14、0.16、0.18、0.20、0.24。

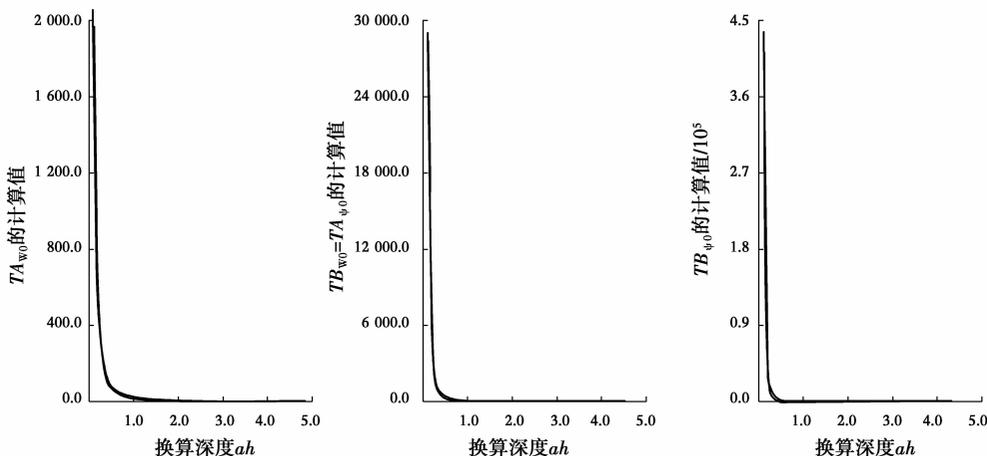


图 2 摩擦桩或支承桩的计算参数随换算深度 ah 和弯剪刚度比 R 的变化
 Fig. 2 Calculating parameters of inner displacements and forces changing with converting length and ratio of bending stiffness to shear stiffness

从图 2 可以看出,弯剪刚度比 R 对摩擦桩、支承桩的计算参数的影响非常小,在图中由于分辨的原因基本看不出来。其与不考虑剪切变形时($R=0$)的相应参数基本一致。因此对于摩擦桩、支承桩,可以不考虑剪切变形的影响。

度比 R 、换算深度 ah 的变化如图 3 所示。计算中 R 取 0~3.6。从图 3 可以看出,当换算深度 $ah < 3.0$ 时,弯剪刚度比对嵌岩桩的计算参数影响较大,而在 $ah > 3.0$ 后,其影响则比较小。因此,剪切变形对桩基的影响与其边界条件有关。

根据式(25),嵌岩桩的计算参数函数随弯剪刚

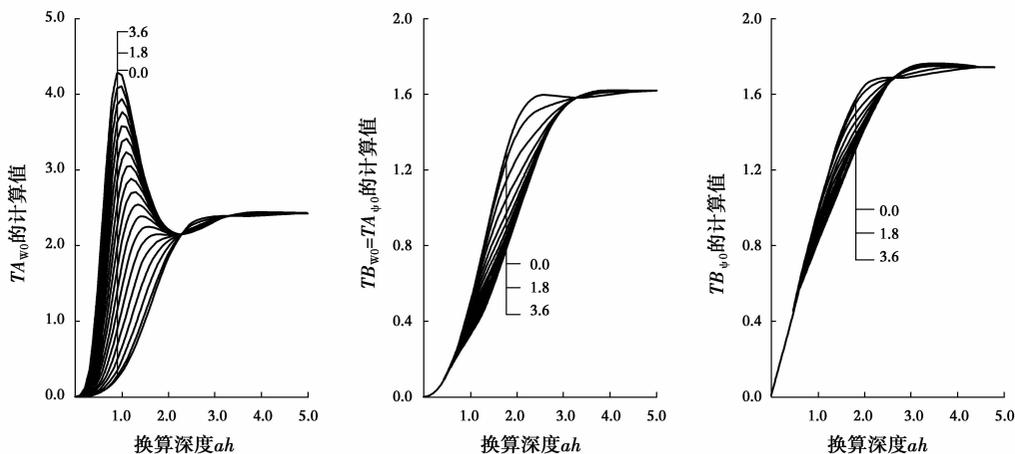
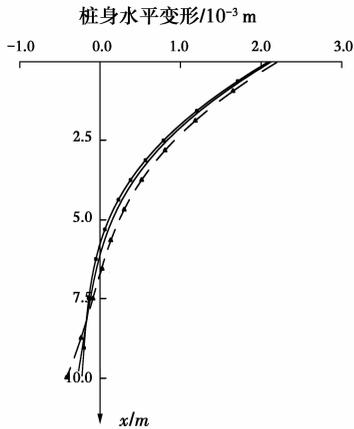


图 3 嵌岩桩的计算参数函数随换算深度 ah 和弯剪刚度比 R 的变化
 Fig. 3 Calculating parameter functions of inner displacements and forces changing with converting length and ratio of bending stiffness to shear stiffness

6 计算示例

已知一桩基,弹性模量 $E=2.6 \times 10^7$ kPa、桩径 $r=1.65$ m、计算宽度 $b=0.9(r+1)=2.385$ m、抗弯刚度折减系数 0.67,桩身抗弯刚度实际取值为 $D=0.67EI=6.338 \times 10^6$ kN·m²、抗剪刚度 $C=kGA=$

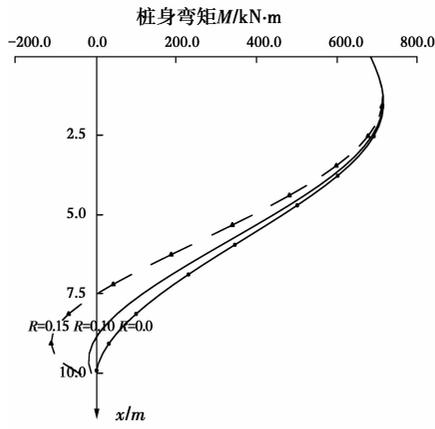
2.085×10^6 kN,桩长 10 m,边界条件为嵌岩桩,按式(25)计算桩顶的变形参数。桩顶作用的水平剪力 $Q_0=35.70$ kN、弯矩 $M_0=684.70$ kN·m。计算时桩的变形系数 $\alpha=0.32739$ 。人为改变弯剪刚度比 R ,桩身水平变形、弯矩、桩侧土水平压力随桩长的变化如图 4~6 所示。



注: — $R=0.0$ — $R=0.10$ — $R=0.15$

图 4 桩身水平变形分布图

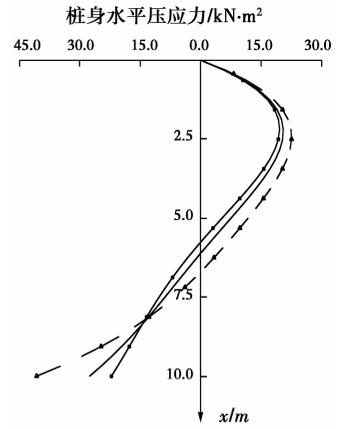
Fig. 4 Horizontal displacement distribution



注: — $R=0.0$ — $R=0.10$ — $R=0.15$

图 5 桩身弯矩分布图

Fig. 5 Moment distribution



注: — $R=0.0$ — $R=0.10$ — $R=0.15$

图 6 桩侧土水平压力分布图

Fig. 6 Horizontal stress distribution

表 1 计算结果比较表

Table 1 Comparing of calculating results

R	桩顶水平位移		正侧最大弯矩		负侧最大弯矩/(kN·m)	正侧最大压应力		负侧最大压应力	
	计算结果/m	差别/%	计算结果/(kN·m)	差别/%		计算结果/(kN·m ⁻²)	差别/%	计算结果/(kN·m ⁻²)	差别/%
0.00	0.002 099 2	0.00	716.23	0.00	无负弯矩	19.559	0.00	23.340	0.00
0.10	0.002 133 0	1.61	715.06	-0.16	10.234	20.471	4.66	29.769	27.54
0.15	0.002 214 9	5.51	713.57	-0.37	110.13	22.531	15.20	45.408	94.55

从图 4 和表 1 的桩顶水平位移数据栏可以看出,随着 R 的加大,桩的抗剪刚度减小,桩顶水平位移加大。当 $R=0.15$ 时,桩顶水平位移与不考虑剪切变形的位移大 5.51%。

从图 4 和表 2 的正侧最大弯矩、负侧最大弯矩数据栏可以看出,考虑剪切变形影响时,桩侧最大正弯矩减小、负侧最大弯矩增大。本算例中,不考虑剪切变形时,桩身长度范围内不出现负弯矩,但考虑剪切变形后,由于桩身的弯曲刚度减小,桩身变形加大,正侧弯矩与不考虑剪切变形影响时的结果减小 0.37%,同时,在另一侧出现负弯矩现象,不考虑剪切变形影响时则无负弯矩出现。因此,剪切变形对桩身的弯矩分布有一定影响,并有提高弯矩 0 点位置的作用。

从图 5 和表 2 的正侧最大压应力和负侧的最大压应力数据栏可以看出,考虑剪切变形的影响后,正、负侧的最大压应力都有所扩大,其中,正侧正应力与不考虑剪切变形时的结果扩大 15.20%、负侧正应力扩大 94.55%。

7 结论

从以上的分析、公式推导和算例分析可以看出:

1) 本文精心选择单广义位移深梁理论,建立桩基 m 法分析方法,可以考虑桩身剪切变形影响,当弯剪刚度比为 0 时可退化成不考虑剪切变形影响的形式,因此,所导出计算公式的适应性比目前基于 Euler 梁理论的常用 m 法更好。

2) 不考虑边界条件时,桩身位移、内力计算的无

量纲参数函数有统一表达式,计算时取级数的前 10 项就有非常高的精度。

3)当换算深度 $ah > 3.0$ 时,剪切变形对位移、内力计算的无量纲参数函数的影响才开始显示出来,当换算深度 $ah < 3.0$ 时剪切变形影响甚小。

4)随着弯剪刚度比的增大,剪切变形有扩大桩顶位移、减小桩身正弯矩、改变桩身两侧弯矩的分布特征、提高弯矩 0 点位置等作用。

参考文献:

- [1] 吴恒立. 计算推力桩的综合刚度原理和双参数法[M]. 北京:人民交通出版社,2000:1-38.
WU H L. Synthetical stiffness principle and biparameter method for lateral loaded piles [M]. Beijing: China Communications Press, 2000: 1-38. (in Chinese)
- [2] 凌治平. 基础工程[M]. 北京:人民交通出版社,1986: 96-114.
LIN Z P. Foundation engineering[M]. Beijing: China Communications Press, 1986: 96-114. (in Chinese)
- [3] 夏桂云. 嵌岩弹性桩的稳定分析[J]. 重庆交通学院学报, 2001, 20(1): 79-82.
XIA G Y. Stability analysis of socketed poles [J]. Journal of Chongqing Communications University, 2001, 20(1): 79-82. (in Chinese)
- [4] 戴自航, 陈林靖. 多层地基中水平荷载桩计算 m 法的两种数值解析[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(5): 690-696.
DAI Z H, CHEN L J. Two numerical solutions of laterally loaded piles installed in multi-layered soils by m method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(5): 690-696. (in Chinese)
- [5] 肖世卫. 横向受力桩中剪切变形影响的分析[J]. 西南交通大学学报, 1992(1): 28-31.
XIA S W. Analysis of the influence of shear deformation on laterally loaded piles [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 1992 (1): 28-31. (in Chinese)
- [6] 夏桂云, 李传习. 考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用[M]. 北京:人民交通出版社, 2008.
XIA G Y, LI C X. Calculating theory and its applications of frame structures with shear deformation effects [M]. Beijing: China Communications Press, 2008. (in Chinese)
- [7] WANG C M, REDDY J N, LEE K H. Shear deformable beams and plates [M]. Amsterdam: Elsevier, 2000.
- [8] LEVINSON M. A new rectangular beam theory [J]. Journal of Sound and Vibration, 1981(74): 81-87.
- [9] BRICKFORD W B. A consistent higher order beam theory [J]. Developments in Theoretical and Applied Mechanics, 1982(11): 137-150.
- [10] REDDY J N. A simple higher order theory for laminated composite plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984(51): 745-752.
- [11] 龚克. 单广义位移的深梁理论与中厚板理论[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(9): 984-990.
GONG K. Bending Theories for beams and plates with single generalized displacement [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(9): 984-990. (in Chinese)
- [12] 周相略. 桩基础 m 法计算系数的统一表达式[J]. 公路, 1993(6): 18-22.
ZHOU X N. Uniform expressions for calculating parameters of piles by m method [J]. Highway, 1993 (6): 18-22. (in Chinese)

(编辑 胡玲)