doi:10.11835/j.issn.1674-4764.2016.06.009

剪切变形对基桩 P-Δ 效应的影响

李微哲[1,2],娄平[1]
(1. 中南大学 土木工程学院 长沙 410012;2. 中煤科工集团 重庆设计研究院有限公司,重庆 400016)

摘　要:给出了小剪切变形下的基桩 $P-\Delta$ 效应和大剪切变形下支座 $P-\Delta$ 效应计算的杆单元刚度矩阵方程。假定杆单元弯曲变形位移函数为三次幂函数,剪切变形函数为线性函数,根据有限元法一般原理,推导了一种同时计入竖向力径向剪切分力剪切变形和水平力剪切变形的 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度方程,推导了一种仅计入竖向力径向剪切分力剪切变形而忽略水平力剪切变形的 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度方程,推导了一种仅计入水平力剪切变形而忽略竖向力径向剪切分力剪切变形的 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度方程。计入水平力剪切变形而忽略竖向力径向剪切分力剪切变形的 $P-\Delta$ 效应杆单元可良好的模拟支座在大剪切变形下的偏心工作特性,能实时计入其偏心弯矩影响,为实时计入支座偏心特性的结构动静力分析提供了理论支撑。最后通过自编 MATLAB 程序进行算例分析,结果表明,计入支座大剪切变下的 $P-\Delta$ 效应后,基桩内力位移和地基土压力均显著增大。基桩自身剪切变形对桩身内力位移和地基土压力影响较小,可以忽略。

关键词:基桩;支座;水平力剪切变形;竖向力径向剪切分力;$P-\Delta$ 效应;有限杆单元法
中图分类号:TU470　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1674-4764(2016)06-0062-10

P-Δ effect analysis of pile and bearing with shear deformation

Li Weizhe[1,2], *Lou Ping*[2]
(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410000, P. R. China; 2. China Coal Technology & Engineering Group, Chongqing Design & Research Institute Co. Ltd. Chongqing 400016, P. R. China)

Abstract: Finite pole element method is presented for P-Δ effect analysis of pile and bearing while shear deformation is well considered. It is assumed that horizontal displacement of the pole element has a longitudinally cubic power function and the shear displacement has a longitudinally linear function, the P-Δ effect pole element rigid equation considering the shear deformation produced by lateral load and the radial component of vertical load, is derived. The P-Δ effect pole element rigid equation considering the shear deformation only produced by lateral load is derived in the paper. The P-Δ effect pole element rigid equation considering the shear deformation only produced by the radial component of vertical load, is derived in the paper. And the P-Δ effect pole element considering the shear deformation only produced by lateral load can simulate the bearing working eccentrically well in real-time. Matlab process of finite pole element method for P-Δ effect analysis of pile and bearing is edited, and case analysis is done, and the theory and the method is proved good. Finally conclusions are drawn as follows: (i) the P-Δ effect analysis result of pile will increase obviously while the eccentric bending moment of the bearing is well considered; (ii) the deformation has little effect on the P-Δ effect analysis result of the pile and bearing.

收稿日期:2016-03-07
作者简介:李微哲(1981-),男,主要从事桩基础及路基研究,(E-mail)46414461@qq.com。
Received: 2016-03-07
Author brief: Li Weizhe(1981-), main research interests: pile foundation and subgrade engineering, (E-mail)46414461@qq.com.

Keywords: pile; bearing; lateral shear deformation; radial component of vertical load; P-Δ effect; finite pole element method

倾斜荷载下的基桩,不仅水平力产生剪切变形,竖向力因转角产生径向剪切分力也将产生剪切变形。桩顶支座大剪切变形下的 $P-\Delta$ 效应极显著,不容忽略。目前,计入剪切变形的基桩 $P-\Delta$ 效应计算的有杆单元法尚似未见报道。而弹簧、刚臂或等效偏心弯矩均难实时模拟支座大剪切变形下的 $P-\Delta$效应。因此研究计入小剪切变形下的基桩 $P-\Delta$效应和大剪切变形下支座 $P-\Delta$ 效应计算方法具有实际意义。

目前基桩 $P-\Delta$ 效应计算分析方法较多,可分为解析解法和有限元法两大类。线弹性土中基桩 $P-\Delta$效应静力计算解析解,主要有 m 法假定的幂级数解[1],C 法(张氏法)假定的解析解[2-3],以及(mz+C)法假定的幂级数解[4]。随后栾鲁宝等[5]给出了粘弹性土中考虑 $P-\Delta$ 效应时基桩水平振动的解析解答。赵明华等[6]提出应用有限元一有限层法进行基桩 $P-\Delta$ 效应计算。在有限杆元法中,通过附加几何刚度矩阵来考虑 $P-\Delta$ 效应。常用的杆单元几何刚度矩阵为线性近似的几何刚度矩阵或一致几何刚度矩阵。但因假定和推导过程差异,几何刚度矩阵形式较多。王用中等[7]、赵明华等[8,10]、夏拥军等[9]均给出了不同形式的 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度矩阵方程。梁仁杰等[11]提出用白噪声扫描的手段,结合数值计算的方法,求解结构考虑 $P-\Delta$ 效应时的模态参数,并研究了 $P-\Delta$ 效应对结构动力特性影响。李刚等[12]应用有限杆单元法对结构 $P-\Delta$ 效应动力分析,认为 $P-\Delta$ 效应将降低结构抗震能力。耿江玮等[13]对考虑材料非线性和 $P-\Delta$ 效应的非规则连续梁桥进行地震反应分析,魏标等[14]重点研究了支座布置对不等高墩非规则连续梁桥地震响应的影响,张志俊等[15]进行了弹性支座对桥梁车致振动的隔振效果研究,以上学者均用弹簧或弹簧阻尼单元模拟桥梁支座,忽略了支座的偏心弯矩效应。马长飞等[16]、刘彦辉等[17]通过构造水平力偶代替支座偏心弯矩,应用有限杆单元法对上下部结构和隔震支座进行了地震反应分析,虽考了了支座偏心弯矩效应,但求解较复杂,通用性不足。孟凡涛等[18]综合考虑剪切变形和梁柱节点连接半刚性影响的基础上,给出了框架柱的抗侧移刚度公式,认为剪切变形对框架结构的 $P-\Delta$ 效应影响显著,已超出工程上可接受的 5%的误差范围。

本文将假定杆单元剪切变形和弯曲变形的位移模式,推导小剪切变形下的 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度方程,用以计算桩身剪切变形影响;推导大剪切变形下的 $P-\Delta$ 效应的杆单元刚度方程,用以计算支座大剪切变形下的 $P-\Delta$ 效应。

1　计入剪切变形的 P-Δ 效应杆单元

为推导计入了剪切变形和 $P-\Delta$ 效应的杆单元刚度方程,假定弯曲变形产生的水平位移为三次幂函数,剪切变形产生的水平位移为线性函数。

1.1　$P-\Delta$ 效应杆单元受力平衡微分方程

假定 $P-\Delta$ 效应杆单元为弹性体,单元受力如图 1 所示。

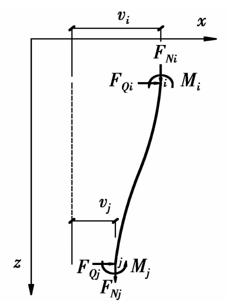

图 1　杆单元受力分析示意图

Fig. 1　mechanics analysis of $P-\Delta$ effect element

假定单元节点的弯矩逆时针方向为正,顺时针方向为负;节点剪力、轴力方向与坐标轴方向相为正。则根据材料力学原理,单元节点 i、j 的弯矩与节点位移关系如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_i = -EI\dfrac{\mathrm{d}^2 v_i}{\mathrm{d}z^2} \\ \boldsymbol{M}_j = EI\dfrac{\mathrm{d}^2 v_j}{\mathrm{d}z^2} \end{cases} \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{M}_i$、v_i、$\boldsymbol{M}_j$、v_j 分别为节点 i 的弯矩、位移和节点 j 的弯矩和位移;z 为单元长度方向坐标;E 为计算弹性模量。

对节点 i 进行平衡弯矩分析,其弯矩平衡方程为

$$(M_i + M_j) + F_{Qj}(z_j - z_i) - F_{Nj}(v_j - v_i) = 0 \tag{2}$$

对节点 j 进行平衡弯矩分析,其弯矩平衡方程为

$$(M_i + M_j) - F_{Qi}(z_j - z_i) + F_{Ni}(v_j - v_i) = 0 \tag{3}$$

将式(1)代入式(2)得

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 v_j}{\mathrm{d}z^2} - EI\frac{\mathrm{d}^2 v_i}{\mathrm{d}z^2} + F_{Qj}(z_j - z_i) - F_{Nj}(v_j - v_i) = 0 \tag{4}$$

将式(1)代入式(3)得

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 v_j}{\mathrm{d}z^2}-EI\frac{\mathrm{d}^2 v_i}{\mathrm{d}z^2}-F_{Qi}(z_j-z_i)+F_{Ni}(v_j-v_i)=0 \tag{5}$$

设：$\mathrm{d}M=EI\frac{\mathrm{d}^2 v_j}{\mathrm{d}z^2}-EI\frac{\mathrm{d}^2 v_i}{\mathrm{d}z^2}$，$\mathrm{d}z=z_j-z_i$，$\mathrm{d}v=v_j-v_i$，则式(3)可写成

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}-F_{Nj}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+F_{Qj}=0 \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}+F_{Ni}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}-F_{Qi}=0 \tag{7}$$

1.2 剪切变形和弯曲变形位移模式

假定考虑剪切变形的杆单元水平位移模式为

$$v=v_{\mathrm{b}}+v_s \tag{8}$$

$$v_{\mathrm{b}}(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3 \tag{9}$$

$$v_{\mathrm{s}}=v_{\mathrm{sL}}+v_{\mathrm{sV}}=a_4+a_5z \tag{10}$$

式中：v 为单元总水平位移；v_{b} 弯曲变形引起的水平位移；v_{s} 为剪切变形引起的水平位移；v_{sL} 为水平力剪切变形产生的水平位移；v_{sV} 为竖向力径向剪切分力剪切变形产生的水平位移。

则仅考虑弯曲变形时，单元 i 节点(Z=0)和单元 j 节点(z=l)的水平位移和转角如下：

$$\left.\begin{aligned}v_{\mathrm{b}}(0)&=v_{i\mathrm{b}}=a_0\\ v'_b(0)&=\tilde{\omega}_{i\mathrm{b}}=a_1\\ v_{\mathrm{b}}(l)&=v_{j\mathrm{b}}=a_0+a_1l+a_2l^2+a_3l^3\\ v'_{\mathrm{b}}(l)&=\tilde{\omega}_{j\mathrm{b}}=a_1+2a_2l+3a_3l^2\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中：l 为单元长度；a_0、a_1、a_2、a_3 为待定系数；$v_{i\mathrm{b}}$、$v_{j\mathrm{b}}$、$\varphi_{i\mathrm{b}}$、$\varphi_{j\mathrm{b}}$ 为仅考虑弯曲变形时单元节点 i 和 j 的水平位移和转角。

根据式(11)，可将 a_0、a_1、a_2、a_3 待定系数表达成 $v_{i\mathrm{b}}$、$\varphi_{i\mathrm{b}}$、$v_{j\mathrm{b}}$、$\varphi_{j\mathrm{b}}$ 的表达式为

$$\left.\begin{aligned}a_0&=v_{i\mathrm{b}}\\ a_1&=\varphi_{i\mathrm{b}}\\ a_2&=-\frac{3}{l^2}v_{i\mathrm{b}}-\frac{2}{l}\varphi_{i\mathrm{b}}+\frac{3}{l^2}v_{j\mathrm{b}}-\frac{1}{l}\varphi_{j\mathrm{b}}\\ a_3&=\frac{2}{l^3}v_{i\mathrm{b}}+\frac{1}{l^2}\varphi_{i\mathrm{b}}-\frac{2}{l^3}v_{j\mathrm{b}}+\frac{1}{l^2}\varphi_{j\mathrm{b}}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

将式(12)代入式(9)，可得单元弯曲变形水平位移函数为

$$\left.\begin{aligned}&v_{\mathrm{b}}(z)=[N_1,N_2,N_3,N_4]\{v_{i\mathrm{b}},\varphi_{i\mathrm{b}},v_{j\mathrm{b}},\varphi_{j\mathrm{b}}\}^{\mathrm{T}}\\ &N_1=\frac{1}{l^3}(2z^3-3z^2l+l^3),\\ &N_2=\frac{1}{l^3}(z^3l-2z^2l^2+zl^3)\\ &N_3=\frac{1}{l^3}(-2z^3+3z^2l),\\ &N_4=\frac{1}{l^3}(z^3l-z^2l^2)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

则仅考虑剪切变形时，单元 i 节点(Z=0)和单元 j 节点(z=l)的水平位移和转角为

$$\left.\begin{aligned}v_{\mathrm{s}}(0)&=v_{is}=a_4\\ v'_{\mathrm{s}}(0)&=\tilde{\omega}_{is}=a_5\\ v_s(l)&=v_{js}=a_4+a_5l\\ v'_{\mathrm{s}}(l)&=\tilde{\omega}_{js}=a_5\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

将式(14)代入式(10)，则单元剪切变形水平位移函数为

$$\left.\begin{aligned}&v_{\mathrm{s}}(z)=[N_5,N_6]\{v_{is},v_{js}\}^{\mathrm{T}}\\ &N_5=1-\frac{z}{l},N_6=\frac{z}{l}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

依材料力学和图1假定，水平剪力、竖向力径向剪切分力产生的剪切变形计算为

$$\varphi_{is}=\varphi_{js}=\frac{v_{js}-v_{is}}{l}=-\frac{k\left(F_{\mathrm{Q}i}+\frac{v_i-v_j}{l}F_{\mathrm{N}i}\right)}{GA}=\frac{k\left(F_{\mathrm{Q}j}+\frac{v_i-v_j}{l}F_{\mathrm{N}j}\right)}{GA} \tag{16}$$

$$\varphi_{is\mathrm{L}}=\varphi_{js\mathrm{L}}=\frac{v_{js\mathrm{L}}-v_{is\mathrm{L}}}{l}=-\frac{kF_{\mathrm{Q}i}}{GA}=\frac{kF_{\mathrm{Q}j}}{GA} \tag{17}$$

$$\varphi_{is\mathrm{V}}=\varphi_{js\mathrm{V}}=\frac{v_{js\mathrm{V}}-v_{is\mathrm{V}}}{l}=-\frac{kF_{\mathrm{N}i}\frac{v_i-v_j}{l}}{GA}=\frac{kF_{\mathrm{N}j}\frac{v_i-v_j}{l}}{GA} \tag{18}$$

式中：F_{Q} 为单元剪力；k 为形状剪切系数，对矩形截面取1.2，对圆形截面取10/9，G 为计算剪切模量；$v_{is\mathrm{L}}$、$v_{js\mathrm{L}}$、$\varphi_{is\mathrm{L}}$、$\varphi_{js\mathrm{L}}$ 分别为水平力剪切变形在单元 i、j 节点产生的水平位移和转角；$v_{is\mathrm{V}}$、$v_{js\mathrm{V}}$、$\varphi_{is\mathrm{V}}$、$\varphi_{js\mathrm{V}}$ 分别为竖向力径向剪切分力剪切变形在单元 i、j 节点产生的水平位移和转角。

1.3 单元刚度矩阵方程

因剪切变形引起的转角在节点不连续，则

$$\begin{cases}\varphi_i\neq\varphi_{i\mathrm{b}}+\varphi_{is}\\ \varphi_j\neq\varphi_{j\mathrm{b}}+\varphi_{js}\\ v_{j\mathrm{b}}-v_{i\mathrm{b}}=l(\frac{\varphi_{i\mathrm{b}}+\varphi_{j\mathrm{b}})}{2}\end{cases} \tag{19}$$

根据式(5)、式(8)和式(10)可得

$$EI\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}z^3}=EI\frac{\mathrm{d}^3 v_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}z^3} \tag{20}$$

则联合式(1)、(4)和式(13)，可得单元剪力为

$$\begin{cases}F_{\mathrm{Q}i}=\frac{\mathrm{d}M_i}{\mathrm{d}z}+F_{\mathrm{N}i}\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}z}=EI\frac{\mathrm{d}^3 v_{i\mathrm{b}}}{\mathrm{d}z^3}+F_{\mathrm{N}i}\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}z}\\ F_{\mathrm{Q}j}=-\frac{\mathrm{d}M_j}{\mathrm{d}z}+F_{\mathrm{N}j}\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}z}=-EI\frac{\mathrm{d}^3 v_{j\mathrm{b}}}{\mathrm{d}z^3}+F_{\mathrm{N}j}\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}z}\end{cases} \tag{21}$$

或

$$\begin{cases} F_{Qi}=\dfrac{\mathrm{d}M_i}{\mathrm{d}z}+F_{Ni}\dfrac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}z}=EI\dfrac{\mathrm{d}^3v_{ib}}{\mathrm{d}z^3}+F_{Ni}\dfrac{(v_j-v_i)}{l} \\ F_{Qj}=-\dfrac{\mathrm{d}M_j}{\mathrm{d}z}-F_{Nj}\dfrac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}z}=-EI\dfrac{\mathrm{d}^3v_{jb}}{\mathrm{d}z^3}+F_{Nj}\dfrac{(v_j-v_i)}{l} \end{cases} \tag{22}$$

将式(13)代入式(22)可得单元节点剪力为

$$F_{Qi}=EI\left[\frac{12}{l^3},\frac{6}{l^2},\frac{-12}{l^3},\frac{6}{l^2}\right]\{v_{ib},\varphi_{ib},v_{jb},\varphi_{jb}\}^{\mathrm{T}}+F_{Ni}\frac{(v_j-v_i)}{l} \tag{23}$$

$$F_{Qj}=-EI\left[\frac{12}{l^3},\frac{6}{l^2},\frac{-12}{l^3},\frac{6}{l^2}\right]\{v_{ib},\varphi_{ib},v_{jb},\varphi_{jb}\}^{\mathrm{T}}+F_{Nj}\frac{(v_j-v_i)}{l} \tag{24}$$

将式(13)、(19)代入式(1)可得单元节点弯矩为

$$M_i=-EI\frac{\mathrm{d}^2v_{ib}}{\mathrm{d}z^2}=EI\left[\frac{6}{l^2},\frac{4}{l},\frac{-6}{l^2},\frac{2}{l}\right]\{v_{ib},\varphi_{ib},v_{jb},\varphi_{jb}\}^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

$$M_j=EI\frac{\mathrm{d}^2v_{ib}}{\mathrm{d}z^2}=EI\left[\frac{6}{l^2},\frac{2}{l},\frac{-6}{l^2},\frac{4}{l}\right]\{v_{ib},\varphi_{ib},v_{jb},\varphi_{jb}\}^{\mathrm{T}} \tag{26}$$

将式(16)代入式(23)可得计入剪切变形后单元节点位移关系为

$$\begin{cases} \dfrac{GA(v_{is}-v_{js})}{kl}-\dfrac{v_i-v_j}{l}F_{Ni}= \\ \dfrac{12EI}{l^3}(v_{ib}-v_{jb})+\dfrac{6EI}{l^2}(\varphi_{ib}+\varphi_{jb})-F_{Ni}\dfrac{(v_i-v_j)}{l} \\ v_i-v_j=(v_{ib}-v_{jb})+(v_{is}-v_{js}) \end{cases} \tag{27}$$

或

$$\begin{cases} v_{ib}-v_{jb}=\dfrac{v_i-v_j}{1+b}-\dfrac{bl}{2(1+b)}(\varphi_{ib}+\varphi_{jb}) \\ b=\dfrac{12kEI}{l^2GA} \end{cases} \tag{28}$$

将式(17)代入式(23)可得仅计入水平力剪切变形而忽略竖向力径向剪切分力剪切变形时的单元节点位移关系如下：

$$\begin{cases} v_{ib}-v_{jb}=v_i-v_j-\dfrac{klF_{Qi}}{GA} \\ v_i-v_j=(v_{ib}-v_{jb})+(v_{isL}-v_{jsL}) \end{cases} \tag{29}$$

由式(18)可得仅计入竖向力径向剪切分力剪切变形而忽略水平力剪切变形时的单元节点位移关系如下：

$$\begin{cases} v_{isV}-v_{jsV}=\dfrac{kF_{Ni}}{GA}(v_i-v_j) \\ v_i-v_j=(v_{ib}-v_{jb})+(v_{isV}-v_{jsV}) \end{cases} \tag{30}$$

将式(27)代入式(23)可得同时计入水平力剪切变形和竖向力径向剪切分力剪切变形时，单元节点剪力、弯矩与节点总水平位移、弯曲变形引起的转角之间关系为

$$F_{Qi}=\left[\frac{12EI}{l^3(1+b)}-\frac{F_{Ni}}{l}\right](v_i-v_j)+\frac{6EI}{l^2(1+b)}(\varphi_{ib}+\varphi_{jb}) \tag{31}$$

$$F_{Qj}=-\left[\frac{12EI}{l^3(1+b)}-\frac{F_{Ni}}{l}\right](v_i-v_j)-\frac{6EI}{l^2(1+b)}(\varphi_{ib}+\varphi_{jb}) \tag{32}$$

$$M_i=\frac{6EI}{l^2(1+b)}(v_i-v_j)+\frac{EI(4+b)}{l(1+b)}\varphi_{ib}+\frac{EI(2-b)}{l(1+b)}\varphi_{jb} \tag{33}$$

$$M_j=\frac{6EI}{l^2(1+b)}(v_i-v_j)+\frac{EI(2-b)}{l(1+b)}\varphi_{ib}+\frac{EI(4+b)}{l(1+b)}\varphi_{jb} \tag{34}$$

整理式(31)-式(34)可得考虑水平力剪切变形、竖向力切向剪切变形时 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度矩阵方程为

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} F_{Qi}^{e} \\ M_i^{e} \\ F_{Qj}^{e} \\ M_j^{e} \end{Bmatrix}=\dfrac{1}{1+b}\begin{bmatrix} \dfrac{12EI}{l^3}-\dfrac{F_N}{l}(1+b) & \dfrac{6EI}{l^2} & -\dfrac{12EI}{l^3}+\dfrac{F_N}{l}(1+b) & \dfrac{6EI}{l^2} \\ \dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{(4+b)EI}{l} & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{(2-b)EI}{l} \\ -\dfrac{12EI}{l^3}+\dfrac{F_N}{l}(1+b) & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{12EI}{l^3}-\dfrac{F_N}{l}(1+b) & -\dfrac{6EI}{l^2} \\ \dfrac{6EI}{l^2}+ & \dfrac{(2-b)EI}{l} & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{(4+b)EI}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_{ib} \\ v_j \\ \varphi_{jb} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_{Ni}^{e} \\ F_{Nj}^{e} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{EA}{l} & -\dfrac{EA}{l} \\ -\dfrac{EA}{l} & \dfrac{EA}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \end{cases} \tag{35}$$

式中：F_{Ni}^{e}、F_{Qi}^{e}、M_{i}^{e}、F_{Nj}^{e}、F_{Qj}^{e}、M_{j}^{e} 为单元节点内力；F_N 为单元内力，计算时可取节点 i 的轴力；v_i、v_j、φ_{ib}、φ_{jb} 意义同前。

将式(29)代入式(23)可得仅计入水平力剪切变形而忽略竖向力径向剪切分力剪切变形时，$P-\Delta$ 效应杆单元刚度矩阵方程式(36)。

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} F_{Qi}^{e} \\ M_{i}^{e} \\ F_{Qj}^{e} \\ M_{j}^{e} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1+b}\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3}-\frac{F_N}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3}+\frac{F_N}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2}+\frac{bF_N}{2} & \frac{(4+b)EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}-\frac{bF_N}{2} & \frac{(2-b)EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3}+\frac{F_N}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3}-\frac{F_N}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2}+\frac{bF_N}{2} & \frac{(2-b)EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}-\frac{bF_N}{2} & \frac{(4+b)EI}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_{ib} \\ v_j \\ \varphi_{jb} \end{Bmatrix} \\
&\begin{Bmatrix} F_{Ni}^{e} \\ F_{Nj}^{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

将式(30)代入式(23)可得仅计入竖向力径向剪切分力剪切变形而忽略水平力剪切变形时，$P-\Delta$ 效应杆单元刚度矩阵方程式(37)。

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} F_{Qi}^{e} \\ M_{i}^{e} \\ F_{Qj}^{e} \\ M_{j}^{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3}-\frac{F_N}{l}(1+b) & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3}+\frac{F_N}{l}(1+b) & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2}-\frac{bF_N}{2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}+\frac{bF_N}{2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3}+\frac{F_N}{l}(1+b) & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3}-\frac{F_N}{l}(1+b) & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2}-\frac{bF_N}{2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}+\frac{bF_N}{2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_{ib} \\ v_j \\ \varphi_{jb} \end{Bmatrix} \\
&\begin{Bmatrix} F_{Ni}^{e} \\ F_{Nj}^{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

如将剪切刚度视为无穷大，则 $b=0$，则可将式(35)～(37)简化为不考虑剪切变形但考虑 $P-\Delta$ 效应的单元刚度矩阵方程如式(38)。可见，式(38)中的单元刚度矩阵即为梁单元刚度矩阵和几何刚度矩阵之和。

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} F_{Qi}^{e} \\ M_{i}^{e} \\ F_{Qj}^{e} \\ M_{j}^{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3}+\frac{F_{Ni}}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3}-\frac{F_{Ni}}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3}-\frac{F_{Ni}}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3}+\frac{F_{Ni}}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_{ib} \\ v_j \\ \varphi_{jb} \end{Bmatrix} \\
&\begin{Bmatrix} F_{Ni}^{e} \\ F_{Nj}^{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

1.4 $P-\Delta$ 效应单刚矩阵中 F_N 变量求解

忽略 $P-\Delta$ 效应和剪切变形影响的一般杆单元刚度方程式(39)。

$$\begin{Bmatrix} F_{\mathrm{N}i}^{\mathrm{e}} \\ F_{\mathrm{Q}i}^{\mathrm{e}} \\ M_i^{\mathrm{e}} \\ F_{\mathrm{N}j}^{\mathrm{e}} \\ F_{\mathrm{Q}j}^{\mathrm{e}} \\ M_j^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \tag{39}$$

按忽略 $P-\Delta$ 效应的一般杆系有限元分析，即求解得各单元节点的轴力 F_N（受压为负），实际计算分析时可取 $\min(F_{\mathrm{N}i},F_{\mathrm{N}j})$ 作为 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度矩阵的变量 F_{N}。

1.5　考虑剪切变形时单元节点转角的计算

由式(35)、式(36)、式(37)可知，考虑剪切变形的 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度矩阵方程中，节点转角仅考虑了弯曲变形，并未计入剪切变形的影响。同时考虑剪切变形和弯曲变形的节点转角计算式为

$$\varphi_i=\frac{0.5(v_{i+1}-v_{i-1})}{l} \tag{40}$$

$$\varphi_i=\frac{(v_{i+1}-v_i)}{l} \tag{41}$$

$$\varphi=\frac{(v_i-v_{i-1})}{l} \tag{42}$$

式中：φ_i 为节点 i 转角；$v_{i-1}v_i$ 、v_{i+1} 分别为 $i-1$ 节点、i 节点和 $i+1$ 节点的位移，式(40)应用于一般节点，式(41)或式(42)适用于端节点。

1.6　单元内力求解

在小变形情况下，当已知节点位移时，可按式(35)～(37)计算单元节点内力时，剪力结果未计入竖向力径向剪切分力结果。如需在小变形情况下计入竖向力径向剪切分力影响，在计入剪切变形影响、仅计入水平力剪切变形影响、仅计入竖向力径向剪切分力剪切变形影响时应分别按式(26)、(27)、(28)计算单元节点内力。

$$\left.\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} F_{\mathrm{Q}i}^{\mathrm{e}} \\ M_i^{\mathrm{e}} \\ F_{\mathrm{Q}j}^{\mathrm{e}} \\ M_j^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix}=\frac{1}{1+b}\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{(4+b)EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{(2-b)EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{(2-b)EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{(4+b)EI}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_{i\mathrm{b}} \\ v_j \\ \varphi_{j\mathrm{b}} \end{Bmatrix} \\ &\begin{Bmatrix} F_{\mathrm{N}i}^{\mathrm{e}} \\ F_{\mathrm{N}j}^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} F_{\mathrm{Q}i}^{\mathrm{e}} \\ M_i^{\mathrm{e}} \\ F_{\mathrm{Q}j}^{\mathrm{e}} \\ M_j^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix}=\frac{1}{1+b}\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3}+\frac{bF_{\mathrm{N}}}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3}-\frac{bF_{\mathrm{N}}}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2}+\frac{bF_{\mathrm{N}}}{2} & \frac{(4+b)EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}-\frac{bF_{\mathrm{N}}}{2} & \frac{(2-b)EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3}-\frac{bF_{\mathrm{N}}}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3}+\frac{bF_{\mathrm{N}}}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2}+\frac{bF_{\mathrm{N}}}{2} & \frac{(2-b)EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}-\frac{bF_{\mathrm{N}}}{2} & \frac{(4+b)EI}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_{i\mathrm{b}} \\ v_j \\ \varphi_{j\mathrm{b}} \end{Bmatrix} \\ &\begin{Bmatrix} F_{\mathrm{N}i}^{\mathrm{e}} \\ F_{\mathrm{N}j}^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i^{\mathrm{e}} \\ u_j^{\mathrm{e}} \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$
\left\{\begin{matrix} F_{Qi}^{e} \\ M_i^{e} \\ F_{Qj}^{e} \\ M_j^{e} \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3}-\frac{F_N}{l}b & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3}+\frac{F_N}{l}b & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2}-\frac{bF_N}{2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}+\frac{bF_N}{2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3}+\frac{F_N}{l}b & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3}-\frac{F_N}{l}b & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2}-\frac{bF_N}{2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2}+\frac{bF_N}{2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} v_i \\ \varphi_{ib} \\ v_j \\ \varphi_{jb} \end{matrix}\right\}
$$

$$
\left\{\begin{matrix} F_{Ni}^{e} \\ F_{Nj}^{e} \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} u_i \\ u_j \end{matrix}\right\} \tag{45}
$$

式(43)～(45)分别由式(35)～(37)演化而来，主要是在反算单元节点剪力时已计入了小变形情况下竖向力因倾角而产生的径向剪切分力。式(43)～(45)的剪力项分别减去式(35)～(37)对应的剪力项即可得竖向力因倾角而产生的径向剪切分力。

1.7 支座等大剪切变形构件 $P-\Delta$ 效应计算

工程中大部分构件剪切变形影响很小而可以忽略。但如支座等大剪切变形构件，竖向力产生的偏心弯矩十分显著，而刚臂或弹簧均不能实时模拟支座的偏心弯矩效应。支座发生大剪切变形时，本文竖向力径向剪切分力近似计算公式不再适用。但是仅计入水平力剪切变形时的 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度方程式(36)却能很好地反映支座的工作性能，可以很好地计入竖向力在因支座大剪切变形而产生的偏心弯矩影响，即支座的 $P-\Delta$ 效应。

2 支座 $P-\Delta$ 效应算例一

某支座高 $h=0.3$ m，直径 $d=850$ mm，剪切模量 $G=2$ MPa，抗压弹性模量 $E=5\ 000$ MPa，竖向力 $F_N=15\ 000$ kN，水平力 $F_H=180$ kN。

支座受力如图 2，支座顶水平位移由剪切变形 V_s 和弯曲变形 V_m 组成，但剪切变形远大于弯曲变形，且与支座高度 h 同数量级，为典型的大剪切变形构件；支座底部总弯矩由竖向力偏心弯矩和水平力矩组成，竖向力偏心弯矩往往极显著，且远大于水平力矩。支座偏心受压后其竖向抗压刚度会随之变化，其弯曲变形会出现一定的非线性，本文暂时忽略此影响，并假定其抗压弹模不变。

本文中将支座划分为 10 个杆单元，按仅计入水平力剪切变形而忽略竖向力径向剪切分力剪切变形时，$P-\Delta$ 效应杆单元刚度矩阵方程式（21），自编

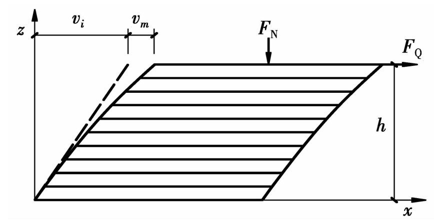

图 2 支座受力示意图

Fig. 2 mechanics analysis of bearing

Matlab 程序计算，支座单元节点水平位移、弯曲转角、弯矩计算如下表 1 所示。可见支座底面偏心弯矩占总弯矩的 93.65%，水平力产生的弯矩仅占 6.35%。偏心弯矩显著，不容忽略，在基桩内力位移计算分析时应予以考虑。

表 1 支座位移内力结果

Table1 Deformation and moment of bearing element

计算点距支座顶面距离/mm	节点水平位移/mm	弯曲转角/(10^{-3})	总弯矩/(kN·m)	水平力产生的弯矩/(kN·m)
0	53.07	−0.996	0.00	0
30	47.75	−0.986	−85.15	5.4
60	42.43	−0.956	−170.29	10.8
90	37.12	−0.906	−255.41	16.2
120	31.81	−0.837	−340.51	21.6
150	26.50	−0.747	−425.56	27
180	21.19	−0.637	−510.58	32.4
210	15.88	−0.508	−595.54	37.8
240	10.58	−0.358	−680.44	43.2
270	5.29	−0.189	−765.26	48.6
300	0.00	0.000	850.01	54

3　支座基桩共同作用算例二

某桥梁基桩[1,7,9]，冲刷线以上桩长 30.212 m，其中 $l_1=8.012$ m，$d_1=1.8$ m，$E_1=1.9333\times10^4$ MPa；$l_2=22.2$ m，$d_2=2.2$ m，$E_2=1.8\times10^4$ MPa；在冲刷线以下桩长 $l_3=42.8$ m，$d_3=2.2$ m，$E_3=1.8\times10^4$ MPa；地基比例系数 $m=10\,000$ kN/m^3，竖向荷载 $Fz=9\,102.2$ kN，水平荷载 $Fx=165$ kN。设墩顶支座同算例一，且基桩剪切模型 $G=0.4E$。

支座基桩受力如图 3，支座顶水平位移由基桩水平位移 V_p 和支座自身水平变形 V_b 组成；且二者同数量级。基桩顶荷载除了上部结构传递的竖向力 F_N 和水平力 F_Q 外，还有竖向力因支座自身变形而产生的偏心弯矩 $F_N\cdot V_b$，因竖向力和支座变形均很大，因此偏心弯矩不能忽略。

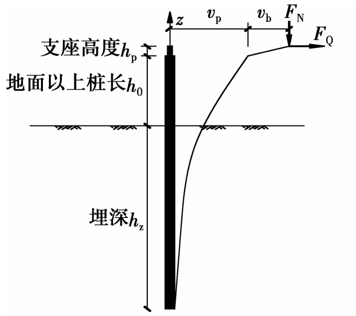

图 3　支座基桩受力示意图

Fig. 3　mechanics analysis of bearing and pile

将支座划分了 2 个杆单元，其单元刚度矩阵方程采用式(36)；基桩划分了 731 个杆单元，在忽略和计入桩身剪切变性影响情况下其单元刚度矩阵方程分别采用 (38)和式(35)；并用自编 MATLAB 有限元程序计算，结果如表 2 和图 4。

表 2　基桩和支座 $P-\Delta$ 效应主要结果

Table 2　$P-\Delta$ effect analysis result of the pile and bearing

	项目	文献[1]	文献[9]	本文 1	本文 2	本文 3
不计 $P-\Delta$ 效应	x_p/mm	134.019	133.96	133.956		
	x_0/mm	6.426	6.419	6.419		
考虑 $P-\Delta$ 效应和桩自重	x_z/mm				257.931	259.742
	x_p/mm	182.17	182.15	182.159	206.581	208.376
	$\varphi_p(10^{-3})$		−7.784	−7.784 6	−9.222	−9.273
	x_0/mm	8.434	8.418	8.418 3	9.246	9.331
	$\phi_0(10^{-3})$	−2.324	−2.319	−2.319 3	−2.558	−2.596
	M_{max}/(kN. m)	6 918.1	6 915.7	6 914.8	7 663.0	7 680.7
	Q_{max}/kN		−923.3	−918.9	−1 016.2	−1 006.4
	Q_p/kN			235.86	248.95	249.55
	σ_{max}(kPa)			91.35	99.94	99.84

注：表中 x_p 为桩顶水平位移，x_z 为支座顶水平位移，φ_p 为桩顶转角，x_0 为地面处桩身位移，ϕ_0 为地面处桩身转角，M_{max}为桩身最大弯矩，Q_p 为桩顶修正剪力(计入了竖向力径向剪切分力)，Q_{max}为桩身最大剪力，为最大计算土压力。本文 1 解答未考虑剪切变形和支座影响，本文 2 解答则计入了支座 $P-\Delta$ 效应影响，3 解答则计入了支座 $P-\Delta$ 效应、桩身剪切变形影响。

由表 1 可知，在忽略桩身剪切变形的情况下，计入支座偏心弯矩效应(即 $P-\Delta$ 效应)后，桩顶位移和转角分别增加了 13.41%和 18.46%，地面处桩身位移和转角分别增加了 9.83%和 10.29%，桩身最大弯矩和最大剪力分贝增加了 10.82%和 10.59%，桩顶修正剪力增加了 5.55%，最大土压力增加了 9.40%。进一步考虑桩身剪切变形影响后，桩顶位移和转角分别增加了 0.70%和 0.87%，地面处桩身位移和转角分别增加了 0.55%和 0.92%，桩身最大弯矩和最大剪力分贝增加了 1.49%和 0.23%，桩顶修正剪力增加了 0.24%，最大土压力增加了一 0.10%。

因此，支座 $P-\Delta$ 效应对基桩内力位移影响显著，应该考虑；而剪切变形对桩身内力位移影响极小，则可忽略。

支座偏心弯矩效应也可以通过水平力作用在支座的剪切变形乘以竖向力近似求得，并将此偏心弯矩加载至基桩顶，即可在基桩 $P-\Delta$ 效应计算时等效考虑支座的影响。但在上下部结构、支座和地基共同作用时，支座的偏心弯矩效应很难用等效弯矩

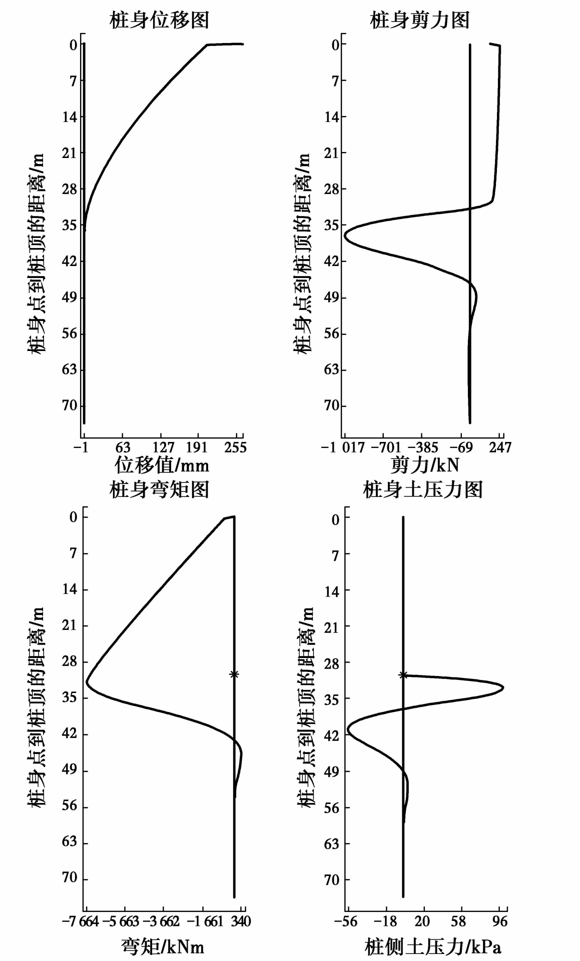

图4　支座和基桩 $P-\Delta$ 效应的内力位移分布图(忽略桩身剪切变形影响)

Fig. 4　Distribution of internal force, displacement and soil pressure for pile and bearing while shear deformation of pile is ignored

进行实时模拟。因此,提出的计入水平力剪切变形时的 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度方程式(35)能很好地反映支座的偏心工作特性,为上下部结构共同作用的关键衔接构件——支座提供了理论支撑。

4　结论

假定杆单元位弯曲变形移函数为三次幂函数,剪切变形位移函数为线性函数,根据有限元一般原理,导出了考虑了 $P-\Delta$ 效应、水平力剪切变形、竖向力径向剪切分力剪切变形的杆单元的刚度方程,通过算例分析,主要结论如下:

1)推导了同时考虑水平力剪切变形、竖向力径向剪切分力剪切变形和 $P-\Delta$ 效应的杆单元刚度矩阵方程;推导了仅计入水平力剪切变形而忽略竖向力径向剪切分力剪切变形时的 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度矩阵方程;推导了仅计入竖向力径向剪切分力剪切变形而忽略水平力剪切变形时的 $P-\Delta$ 效应杆单元刚度矩阵方程,进一步完善了 $P-\Delta$ 效应杆单元理论。

2)仅计入水平力剪切变形而忽略竖向力径向剪切分力剪切变形时的 $P-\Delta$ 效应杆单元能很好地反映支座大剪切变形的偏心工作特性,为上下部结构共同作用动静力分析的关键衔接构件——支座提供了理论支撑。

3)支座和基桩共同作用的 $P-\Delta$ 效应分析表明,在水平力作用下,支座大剪切变形下的 $P-\Delta$ 效应将使基桩内力位移和桩侧土压力显著增大,并进一步削弱支座和墩台综合水平刚度,基桩 $P-\Delta$ 效应分析、墩台水平力分配时应予以考虑。

4)基桩自身剪切变形对基桩 $P-\Delta$ 效应影响极小,可以忽略。

参考文献:

[1] 赵明华.轴向和横向荷载同时作用下的桩的计算[J].湖南大学学报,1987,14(2):68-81.
ZHAO M H. The calculation of piles under simultaneous axial and lateral loading [J]. Journal of Hunan University, 1987, 14(2):68-81.

[2] 横山兴满.桩结构物的计算方法和计算实例[M].唐业清,吴庆荪.译.北京:人民交通出版社,1981.
YOKOYAMA. Calculation method and cases of pile foundation [M]. Translated by Tang Yeqing & Wu Yisun. Beijing . China communication press, 1981. (in Chinese)

[3] 李微哲,赵明华,单远铭,等. 倾斜偏心荷载下基桩内力位移分析[J].中南公路工程,2005, 30(3) : 53-57.
LI W Z, ZHAO M H, SHAN Y M, et al. Analysis of single pile under eccentric and inclined loading [J]. General South Highway Engineering, 2005, 30(3): 53-56.

[4] 赵明华,徐卓君,马缤辉,等.倾斜荷载下基桩C法的幂级数解[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2012,39(3): 1-5.
ZHAO M H, XU Z J, MA B H, et al. Power series solution for pile based on C-method under inclined loads [J]. Journal of Hunan University(Naturnal Science), 2012, 39(3):1-5.

[5] 栾鲁宝,丁选民,周仕礼,等.考虑竖向荷载的桩基水平振动响应的解析解[J].建筑结构, 2015, 45(19): 80-86.
LUAN L B, DING X M, ZHOU S L, et al. Analytical solution of lateral vibration of a axial loaded pile [J].

Building Structure, 2015, 45(19):80-86.

[6] 赵明华,邹新军,邹银生,等.倾斜荷载下基桩的改进有限元–有限层分析方法[J].工程力学, 2004, 21(3): 129-133.

ZHAO M H, ZOU X J, ZOU Y S, et al. Behavior of piles under inclined loads by the improved finite element-finite layer method [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(3):129-133.

[7] 王用中,张河水.弹性地基梁的压弯计算及其应用[J].桥梁建设,1985,14(4):30-52.

WANG Y Z, ZHANG H S. Bending calculation of elastic foundation beam and its application [J]. Bridge Construction ,1985,14(4):30～52.(in Chinese)

[8] 赵明华,李微哲,曹文贵.复杂荷载及边界条件下基桩有限杆单元方法研究[J].岩土工程学报,2006,28(9): 1059-1064.

ZHAO M H, LI W Z, CAO W G. Study on applying finite pole element method to analysis of piles under complex loads with different boundary restraints [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006,28 (9): 1059-1064.

[9] 夏拥军,陆念力.梁杆结构二阶效应分析的一种新型梁单元[J].工程力学,2007,24(7):39-43.

XIA Y J, LU N N. A new beam element for second-order effect analysis of beam structures [J]. Engineering Mechanics, 2007,24(7):39-43.

[10] 赵明华,李微哲,单远铭,等.成层地基中倾斜荷载桩改进有限杆单元法研究[J].工程力学,2008,25(5): 79-85.

ZHAO M H, LI W Z, SHAN Y M, et al. Behavior analysis of piles in layered clays under eccentric and inclined loads by improved finite pole element method [J]. Engineering Mechanics,2008, 28(5): 79-85.

[11] 梁仁杰,吴京,何婧,等. $P-\Delta$ 效应对结构动力特性的影响[J].土木工程学报,2013,46(Sup2): 68-72.

LIANG R J, WU J, HE J, et al. Influence of $P-\Delta$ effect on dynamic characteristic of structure [J]. China Civil Engineering Journal, 2013, 46(Sup2):68-72.

[12] 李刚,江义.考虑 $P-\Delta$ 效应和自适应模态侧力分布的结构抗震能力评估[J].大连理工大学学报,2013, 53 (1):4-11.

LI G, JIANG Y. Evaluation of seismic capacity of structures considering $P-\Delta$ effects and adaptive modal lateral load distribution [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2013, 53(1):4-11.

[13] 耿江玮,朱东生,向中富,等.非规则连续梁桥非线性地震反应分析[J].重庆交通大学学报(自然科学版), 2011, 30(2):185-189, 281.

GENG J W, ZHU D S, XIANG Z F, et al. Nonlinear seismic response analysis of irregular continuous bridge [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science), 2011, 30(2):185-189, 281.

[14] 魏标,崔睿博,戴公连,等.橡胶支座对非规则连续梁桥地震反应的影响[J].中国公路学报, 2013,26(6): 110-117.

WEI B, CUI R B, DAI G L, et al. Impact of laminated rubber bearings on seismic response of irregular continuous bridges [J]. China Journal of Highway and Transport, 2013,26(6): 110-117.

[15] 张志俊,李小珍,张迅,等.弹性支座对桥梁车致振动的隔振效果研究[J].工程力学, 2015, 32(4):103-111.

ZHANG Z J, LI X Z, ZHANG X, et al. Study on the vibration-isolation effects of elastic bearings on train-induced vibration of railway bridge [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(4):103-111.

[16] 马长飞,谭平,张亚辉,等.考虑 $P-\Delta$ 效应的柱顶隔震结构的动力响应分析[J].土木工程学报, 2010,43 (Sup1):230-234.

MA C F, TAN P, ZHANG Y H. Dynamic responses analysis of structures with isolators on the top of the columns considering $P-\Delta$ effects [J]. China Civil Engineering Journal, 2010,43(Sup1):230-234.

[17] 刘彦辉,周福霖,谭平,等.考虑隔震支座转动及 $P-\Delta$ 效应的串联隔震结构响应研究[J].土木工程学报, 2015,48(9):60-66.

LIU Y H, ZHOU F L, TAN P, et al. Study of dynamic response of serially isolated structure considering $P-\Delta$ effect and rotation of bearings [J]. China Civil Engineering Journal. 2015, 48(9):60-66.

[18] 孟凡涛,张玉明,阮兴群.考虑剪切变形的半刚性连接钢框架 $P-\Delta$ 效应研究[J].应用力学学报, 2013, 30 (1):136-140.

MENG F T, ZHANG Y M, RUAN X Q. $P-\Delta$ effects analysis of steel frame with semi-rigid connection and shear deformation [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2013, 30(1):136-140.

(编辑　胡玲)